

УДК 539.3

© 1997 г. П.В. Керекеша

СОБСТВЕННО СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ В ФОРМЕ СЕГМЕНТА

Рассматривается собственно смешанная задача [1] об изгибе тонкой упругой плиты в форме сегментной лунки, нагруженной равномерной нагрузкой. Получено точное и приближенное решение задачи с оценкой среднеквадратической погрешности. Исследовано поведение изгибающего момента в угловых точках и точках раздела граничных условий.

1. Постановка задачи. Требуется определить прогибы тонкой упругой плиты в форме сегмента (фигура), изгибаемой равномерной нагрузкой интенсивности $q_0 = \text{const}$ при условии, что на границе $0 < x < a, y = 0$ плита оперта, а на оставшейся части границы – закреплена.

В биполярных координатах ([2], с. 44) задача сводится к решению уравнения

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right] (w) = \frac{q_0 h^3}{D} \tag{1.1}$$

$$(D = El^3/[12(1 - \nu^2)], h = (a \operatorname{cha} + \cos \beta)^{-1})$$

с граничными условиями

$$w|_{\beta=\gamma} = w_{\beta}|_{\beta=\gamma} = 0, \quad -\infty < \alpha < \infty$$

$$w|_{\beta=0} = w_{\beta}|_{\beta=0} = 0, \quad -\infty < \alpha < 0 \tag{1.2}$$

$$w|_{\beta=0} = w_{\beta\beta}|_{\beta=0} = 0, \quad 0 < \alpha < \infty$$

Здесь l – толщина плиты, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

2. Сведение задачи к задаче Римана. Вначале "доопределим" граничные условия ([3], с. 175)

$$w|_{\beta=\gamma} = w_{\beta}|_{\beta=\gamma} = w|_{\beta=0} = 0, \quad -\infty < \alpha < \infty \tag{2.1}$$

$$w_{\beta\beta}|_{\beta=0} = f_-(\alpha), \quad w_{\beta}|_{\beta=0} = f_+(\alpha), \quad -\infty < \alpha < \infty \tag{2.2}$$

К граничным условиям (2.1)–(2.2) применим интегральное преобразование Фурье. Получим

$$W(x, 0) = 0, \quad W_{\beta}(x, 0) = F^+(x), \quad W_{\beta\beta}(x, 0) = F^-(x) \tag{2.3}$$

$$W(x, \gamma) = 0, \quad W_{\beta}(x, \gamma) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Здесь

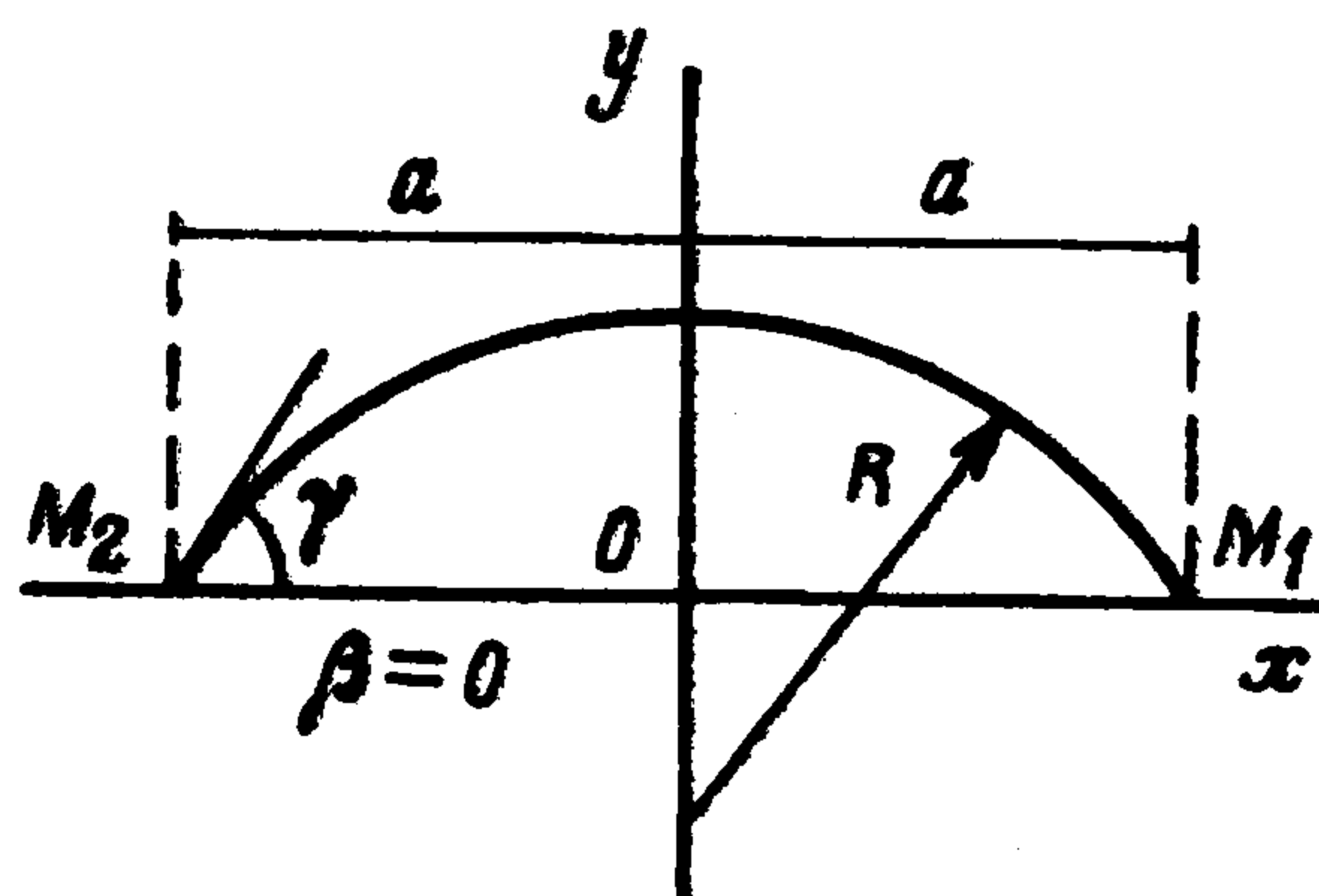
$$W(x, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, \beta) e^{ix\alpha} d\alpha$$

а $F^+(x)$ и $F^-(x)$ – предельные значения аналитических функций соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Переходя к построению решения уравнения (1.1), представим $w(\alpha, \beta)$ в виде ([2], с. 115)

$$w(\alpha, \beta) = \frac{q_0 a^3}{16D} [w_0(\alpha, \beta) + (\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)^{-1}] \quad (2.4)$$

Второе слагаемое в квадратных скобках – частное решение неоднородного уравнения (1.1), а $w_0(\alpha, \beta)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.



Найдем образ Фурье $W(x, \beta)$ функции $w(\alpha, \beta)$ и удовлетворим граничным условиям (2.3). В результате приходим к следующей задаче Римана.

$$F^+(x) = A(x)(F^-(x) + \lambda H(x)), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{H(x)}{\sqrt{2\pi}} = & \frac{x}{\operatorname{sh} \pi x} \left(\frac{2x^2 - 4}{3} + G_1(x)G_2(x) + 4G_3(x)G_4(x) \right) + \\ & + 2G_3(x)G_5(x) + \frac{2 \operatorname{sh} x\gamma}{\operatorname{sh} \pi x \sin \gamma} (G_1(x)G_4(x) - G_2(x)G_3(x)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$G_1(x) = \frac{x^2 \sin 2\gamma - x \operatorname{sh} 2x\gamma}{\operatorname{sh}^2 x\gamma - x^2 \sin^2 \gamma}, \quad G_2(x) = \frac{x \operatorname{sh} 2x\gamma + \sin 2\gamma}{\operatorname{ch} 2x\gamma - \cos 2\gamma}$$

$$G_3(x) = \frac{x^2 \operatorname{ch} x\gamma \sin \gamma - x \operatorname{sh} x\gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh}^2 x\gamma - x^2 \sin^2 \gamma}$$

$$G_4(x) = \frac{\operatorname{ch} x\gamma \sin \gamma + x \operatorname{sh} x\gamma \cos \gamma}{\operatorname{ch} 2x\gamma - \cos 2\gamma}, \quad G_5(x) = \frac{x \operatorname{ch} x\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} x\gamma \cos \gamma}{\operatorname{sh} \pi x \sin^2 \gamma}$$

$$A(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x\gamma - x^2 \sin^2 \gamma}{x(x \sin 2\gamma - \operatorname{sh} 2x\gamma)}, \quad \lambda = \frac{q_0 a^3}{16D}$$

Отметим, что при получении задачи Римана (2.5) было использовано представление образа Фурье функции $w_0(\alpha, \beta)$ [4].

3. Точное решение задачи Римана. Задачу Римана (2.5) представим в несколько ином виде

$$\sqrt{x+iq}^+ K(x) F^+(x) = -\frac{F^-(x)}{2\sqrt{x-iq}} - \frac{\lambda H(x)}{\sqrt{x-iq}} \quad (3.1)$$

где

$$K(x) = -\left(2\sqrt{x^2 + q^2} A(x)\right)^{-1}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = 1, \quad \operatorname{Ind} K(x) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь \sqrt{z}^+ и \sqrt{z}^- определены и аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, их значения имеют положительную мнимую часть.

Исходя из структуры (2.6) функции $H(x)$ решение задачи Римана (3.1) будем искать в классе функций ([3], с. 23), таких, что

$$\left(F^+(x)\sqrt{x+iq}^+\right) \in L_2^+, \left(F^-(x)\left(\sqrt{x-iq}^-\right)^{-1}\right) \in L_2^- \quad (3.3)$$

В соответствии с выбранным классом решений и с учетом условия (3.2) задача (3.1) имеет единственное решение ([3], с. 35). Выпишем его

$$F^+(x) = X^+(x)\left(\sqrt{x+iq}^+\right)^{-1} \Omega^+(x) \quad (3.4)$$

$$F^-(x) = -2X^-(x)\left(\sqrt{x-iq}^-\right) \Omega^-(x) \quad (3.5)$$

где

$$X^\pm(x) = \exp\left\{\frac{\operatorname{sgn} t \pm 1}{2} V^{-1}(\ln K(\tau))(t)\right\}(x) \quad (3.6)$$

$$\Omega^\pm(x) = V\left\{\frac{\operatorname{sgn} t \pm 1}{2} V^{-1}\left(\frac{H(\tau)}{X^-(\tau)\sqrt{\tau-iq}^-}\right)(t)\right\}(x) \quad (3.7)$$

Здесь V и V^{-1} соответственно операторы прямого и обратного преобразования Фурье.

Решение (3.4)–(3.7) задачи Римана трудно реализуемо для численных расчетов, а поэтому встает проблема приближенного решения задачи Римана (3.1) и естественно исходной с соответствующей оценкой погрешности.

4. Приближенное решение задачи Римана. Оценка погрешности. Наряду с задачей Римана (2.5) рассмотрим соответствующую ей приближенную

$$\sqrt{x+iq}^+ \bar{K}(x) \bar{F}^+(x) = -\frac{\bar{F}^-(x)}{2\sqrt{x-iq}^-} - \frac{\lambda \bar{H}(x)}{\sqrt{x-iq}^-} \quad (4.1)$$

где

$$\bar{K}(x) = -\left(2\sqrt{x^2+q^2} \bar{A}(x)\right)^{-1}, \bar{A}(x) = -\frac{1}{2}(x^2+p^2)^{-1/2} \frac{x^2+a_1^2}{x^2+b_1^2} \quad (4.2)$$

$$\bar{H}(x) = \sqrt{2\pi}(\bar{H}_1(x) + \bar{H}_2(x)) \quad (4.3)$$

$$\bar{H}_1(x) = \frac{2x^2-4}{3} \frac{4a_2^2}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+a_2^2)} \quad (4.4)$$

$$\bar{H}_2(x) = \frac{\bar{H}_2(0)b_2^2}{(x^2+1)(x^2+b_2^2)}, H_2(0) = \bar{H}_2(0) \quad (4.5)$$

Параметры $a_1, b_1, p, a_2, b_2, \rho$ заранее неизвестны. Они фиксируются из условия минимальности погрешности приближенного решения. Приближенное решение строится по формулам

$$\bar{F}^+(x) = \bar{X}^+(x)\left(\sqrt{x+iq}^+\right)^{-1} \bar{\Omega}^+(x) \quad (4.6)$$

$$\bar{F}^-(x) = -2\bar{X}^-(x)\left(\sqrt{x-iq}^-\right) \bar{\Omega}^-(x) \quad (4.7)$$

$$\tilde{\Omega}^{\pm}(x) = V \left\{ \frac{\operatorname{sgn} t \pm 1}{2} V^{-1} \left(\frac{\lambda \tilde{H}(\tau)}{\tilde{X}^{-}(\tau) \sqrt{\tau - iq}} \right) (t) \right\} (x) \quad (4.8)$$

Функции $\tilde{X}^{\pm}(x)$ определяются из факторизации коэффициента $\tilde{K}(x)$. Полагая $p = q$, факторизацию выполняем элементарно:

$$\tilde{X}^{+}(x) = \frac{x + a_1 i}{x + b_1 i}, \quad \tilde{X}^{-}(x) = \frac{x - b_1 i}{x - a_1 i}$$

Для оценки среднеквадратической погрешности приближенного решения воспользуемся известными результатами ([3], с. 156). Применительно к рассматриваемому случаю (3.3) и при учете дополнительных исследований оценка погрешности такова:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Delta F^{+}(x) \sqrt{x + iq} \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Delta F^{-}(x) \sqrt{x - iq} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (4.9)$$

$$(\Delta F^{\pm}(x) = F^{\pm}(x) - \tilde{F}^{\pm}(x))$$

Заметим, что

$$\|\Delta F^{+}(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} \left(\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right) \quad (4.10)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{L^2}{1 - \eta} \left(\varepsilon_1 \|\tilde{F}^{+}\|_2 + \sqrt{\pi} \lambda \varepsilon_2 \right), \quad L = \max \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{b_1}{a_1} \right), \quad \eta = \sqrt{2} L \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 = \max_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{1}{\tilde{A}(x)} - \frac{1}{A(x)} \right| \frac{1}{2\sqrt{p}}, \quad \varepsilon_2 = \max_{-\infty < x < \infty} \left| \sqrt{x^2 + 1} (H(x) - \tilde{H}(x)) \right|.$$

Для получения минимальной среднеквадратической погрешности приближенного решения необходимо добиться, чтобы величина ε была как можно меньшей, а функция $\tilde{H}(x)$ наиболее "близкой" к функции $H(x)$. Минимизация величин приводит к фиксированию параметров a_1, b_1, p, a_2, b_2 . Для разных углов γ , характеризующих форму сегмента, параметры a_1, b_1, p, a_2, b_2 и величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ также различны. Полученные численно значения параметров a_1, b_1, p, b_2 , ($a_2 = 1.4$) и величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ при разных значениях γ представлены ниже

γ	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
a_1	9,539	7,4983	2,8522	2,0602	1,6175	1,0433	0,7713	0,5975
b_1	7,1984	3,596	2,4004	1,8143	1,4804	0,8743	0,6427	0,5149
p	8,8517	3,822	2,1785	1,3802	0,9214	0,8052	0,6029	0,4285
ε_1	0,1553	0,1074	0,0834	0,0684	0,0595	0,0325	0,0245	0,0223
ε_2	1,065	1,075	1,155	1,286	1,51	1,5332	13,296	35,04
b_2	7,213	6,058	7,421	3,152	1,753	0,875	0,074	0,002

5. Построение приближенного решения задачи Римана в явном виде. Составной частью приближенного решения задачи Римана (4.1) являются функции, определяемые по формуле (4.8). Непосредственно применение ее может привести к трудностям. Их можно сравнительно легко преодолеть, если учесть структуру функции $\tilde{\Omega}(x)$. Функции $\tilde{\Omega}^{\pm}(x)$ будем находить последовательно. Вначале решим задачу о "скачке"

для функции

$$\tilde{G}(x) = \lambda \frac{x - a_1 i}{x - b_1 i} \tilde{H}(x) = \tilde{G}^+(x) - \tilde{G}^-(x)$$

где

$$\tilde{G}^+(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{iA_k}{x + \alpha_k i}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = a_2, \quad \alpha_4 = b_2 \quad (5.1)$$

$$\tilde{G}^-(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{iB_k}{x - \alpha_k i} - \frac{iB_0}{x - b_1 i}$$

Постоянные A_k, B_k, B_0 находятся методом неопределенных коэффициентов. Затем решим задачу о "скачке" для функции

$$\tilde{\Omega}(x) = \left(\sqrt{x - ip^-} \right)^{-1} \tilde{G}(x) = \tilde{\Omega}^+(x) - \tilde{\Omega}^-(x)$$

Ясно, что

$$\tilde{\Omega}^+(x) = \sum_{k=1}^4 \frac{iA_k C_k}{x + \alpha_k i} \quad (5.2)$$

$$\tilde{\Omega}^-(x) = \frac{\tilde{G}^-(x)}{\sqrt{x - ip^-}} + \sum_{k=1}^4 \frac{iA_k \left(\left(\sqrt{x - ip^-} \right)^{-1} - C_k \right)}{x + \alpha_k i}$$

где

$$C_k = -2\sqrt{2} / (\sqrt{\alpha_k + p})$$

Итак, приближенное решение задачи Римана (4.1) получено в явном виде. Оно последовательно строится по формулам (5.1), (5.2), (4.3)–(4.7). Вполне естественно, что оно будет зависеть от угла γ согласно результатам разд. 4.

6. Точное и приближенное решение исходной задачи. Оценка погрешности. Решение задачи Римана (2.5) является лишь промежуточным звеном в построении решения исходной задачи. Для получения решения исходной задачи необходимо к функции $W(\alpha, \beta)$ применить обратное преобразование Фурье. Приближенное решение $\tilde{W}(\alpha, \beta)$ строится по тем же формулам, что и функция $W(\alpha, \beta)$, только с заменой $F^+(x)$ на $\tilde{F}^+(x)$

$$(w_\beta(x, 0) = F^+(x), \quad \tilde{w}_\beta(x, 0) = \tilde{F}^+(x)).$$

Для получения приближенного решения $\tilde{w}(\alpha, \beta)$ исходной задачи необходимо на функцию $\tilde{W}(\alpha, \beta)$ подействовать оператором обратного преобразования Фурье. При этом справедлива оценка среднеквадратической погрешности

$$\|w(\alpha, \beta) - \tilde{w}(\alpha, \beta)\|_2 \leq M_1 \|\Delta F^+(x)\|_2, \quad M_1 = \max_{\substack{x \in R \\ \beta \in (0, \gamma)}} U_2(x, \beta) \quad (6.1)$$

(функция $U_2(x, \beta)$ фигурирует в представлении $w_0(x, \beta)$ [4]).

При учете неравенства (4.11) оценка погрешности выглядит так:

$$\|w(\alpha, \beta) - \tilde{w}(\alpha, \beta)\|_2 \leq \frac{M_1 \epsilon}{\sqrt{p}} \quad (6.2)$$

7. Приближенное вычисление изгибающих моментов на защемленной границе. Одной из важных характеристик теории изгиба тонких плит является изгибающий момент на защемленной границе. Используя известные формулы ([2], с. 109), будем иметь

$$\tilde{M}_0(\alpha) = -\frac{D}{a}(\operatorname{ch} \alpha + 1)V^{-1} \left(\frac{d^2 \tilde{W}(\alpha, \beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=0} \right) = -\frac{D}{a}(\operatorname{ch} \alpha + 1) \tilde{f}_-(\alpha) \quad (7.1)$$

$$\tilde{M}_\gamma(\alpha) = -\frac{D}{a}(\operatorname{ch} \alpha + 1)V^{-1} \left(\frac{d^2 \tilde{W}(\alpha, \beta)}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\gamma} \right) \quad (7.2)$$

Итак, для определения изгибающего момента на защемленной части границы $\beta = 0$ необходимо найти $\tilde{f}_-(\alpha) = (V^{-1} \tilde{F}^-(x))(\alpha)$. Учитывая результаты разд. 5, функцию $\tilde{f}_-(\alpha)$ найдем в явном виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_-(\alpha) = & 2\sqrt{2\pi}\lambda \left(B_0 e^{a_1 \alpha} + \sum_{k=1}^4 \left(\frac{a_1 - b_1}{a_1 - \alpha_k} \right) B_k e^{a_1 \alpha} + \sum_{k=1}^4 \frac{\alpha_k - b_1}{\alpha_k - a_1} B_k e^{\alpha_k \alpha} - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^4 A_k \left(1 + \frac{b_1 - \alpha_1}{a_1 + \alpha_k} \right) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{i\sqrt{\alpha_k + p} + \sqrt{\alpha_1}} e^{\tau^2} d\tau \right) \right) + \\ & + 2\lambda(a_1 - b_1)(p - a_1) \sum_{k=1}^4 A_k \sqrt{\frac{2}{\alpha_k + p}} \int_0^{\alpha} e^{t(p - \alpha_k)} \frac{dt}{|\sqrt{t}|} - 4\sqrt{2}\lambda \sum_{k=1}^4 \frac{A_k e^{p\alpha}}{\sqrt{\alpha_k + p} \sqrt{|\alpha|}}, \quad \alpha < 0 \quad (7.3) \end{aligned}$$

Для определения изгибающего момента на защемленной части границы $\beta = \gamma$ найдем сначала функцию $d^2 \tilde{W} / d\beta^2 \Big|_{\beta=\gamma}$. Используя представление (2.4), найдем

$$\frac{d^2 \tilde{W}}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\gamma} = \lambda \left(\sum_{n=1}^4 C_n(x) K_n(x) + K_5(x) \right) + \lambda C_3(x)(x^2 - 1) \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{C_1(x)}{\sqrt{2\pi}} &= -\frac{x}{\operatorname{sh} \pi x}, \quad C_2(x) = \tilde{F}^+(x) \\ \frac{C_3(x)}{\sqrt{2\pi}} &= -\frac{\operatorname{sh} x\gamma}{\operatorname{sh} \pi x \cdot \sin \gamma}, \quad \frac{C_4(x)}{\sqrt{2\pi}} = -G_5(x) \\ K_1(x) &= 2(G_1(x)G_4(x) + G_2(x)G_3(x)), \quad K_2(x) = 2G_3(x) \\ K_3(x) &= 2(G_1(x)G_2(x) - G_3(x)G_4(x)), \quad K_4(x) = G_1(x) \\ K_5(x) &= \frac{(x^2 + 1)\operatorname{sh} x\gamma \sin^2 \gamma - 2 \cos \gamma (x \operatorname{ch} x\gamma \sin \gamma - \operatorname{sh} x\gamma \cos \gamma)}{\operatorname{sh} \pi x \sin^3 \gamma} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Наконец, к равенству (7.5) применим обратное преобразование Фурье. Указанное преобразование можно осуществить, используя теорему о вычетах. При этом полезными будут значения корней трансцендентных уравнений

$$\operatorname{sh} z \pm z \sin 2\gamma / (2\gamma) = 0 \quad (7.6)$$

(см. [2], с. 61, табл. 1, 2).

8. Поведение изгибающих моментов в угловых точках и в точках раздела граничных условий. Поскольку приближенное значение момента $\tilde{M}_0(\alpha)$ находится в

явном виде, то его поведение в угловых точках и в точках раздела граничных условий можно описать. Имеют место следующие асимптотики:

$$\tilde{M}_0(\alpha) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\right), \quad \alpha \rightarrow -0, \quad \tilde{M}_0(\alpha) \rightarrow \infty (\alpha \rightarrow -\infty, a_1 < 1) \quad (8.1)$$

$$\tilde{M}_0(\alpha) \rightarrow M_0 = 2\sqrt{2\pi}\lambda \left(\frac{b_1-1}{a_1-1}\right) B_1 (\alpha \rightarrow -\infty, a_1 > 1, p > \alpha_k)$$

При этом были использованы свойства интеграла вероятностей и достаточно очевидные пределы

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{-(\alpha_k+1)\alpha} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\alpha_k+p}\sqrt{|\alpha|}} e^{-\tau^2} d\tau\right) = \begin{cases} 0, & p \geq 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{(a_1-1)\alpha} \int_0^{\alpha} e^{t(p-\alpha_k)} \frac{dt}{\sqrt{|t|}} = \begin{cases} 0, & a_1 > 1, p > \alpha_k, k=1,2,3 \\ 0, & a_1 > 1, p < \alpha_k, p - \alpha_k + a_1 - 1 \geq 0 \\ \infty, & a_1 < 1 \end{cases}$$

Теперь обратимся к исследованию поведения момента $\tilde{M}_\gamma(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \pm \infty$. Для этой цели запишем

$$\tilde{M}_\gamma(\alpha) = -\frac{q_0 a^2}{16} (\operatorname{ch} \alpha + \cos \gamma) \left(\sum_{n=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n(t) k_n(t-\alpha) dt - c_3''(\alpha) - c_3(\alpha) + k_5(\alpha) \right) \quad (8.2)$$

$$c_n(t) = (V^{-1}C_n)(t), \quad k_n(t) = (V^{-1}K_n)(t)$$

использована теорема о свертке ([3], с. 15)). Переходя к пределу в равенстве (8.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{M}_\gamma(\pm\infty) &= M_\gamma(\pm\infty) = M_\gamma = \\ &= -\frac{q_0 a^2}{16} \left(\frac{2\gamma - \sin 2\gamma}{8\gamma \sin 2\gamma} \frac{\sin 2\gamma + \gamma \cos \gamma}{\gamma \sin 2\gamma - 2\sin^2 \gamma} + \frac{2\gamma \cos \gamma - \sin 2\gamma}{4(\gamma \sin 2\gamma - 2\sin^2 \gamma)} \frac{\sin 2\gamma + \gamma}{\gamma \sin 2\gamma} + \right. \\ &+ \frac{\sin 2\gamma + 2\gamma}{2\gamma \sin 2\gamma} \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma}{\gamma \sin 2\gamma - 2\sin^2 \gamma} + \frac{\sin 2\gamma + 2\gamma \cos \gamma}{2\gamma \sin 2\gamma} \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma \cos \gamma}{\gamma \sin 2\gamma - 2\sin^2 \gamma} + \\ &\left. + \frac{4\cos^2 \gamma - \sin 2\gamma}{2\sin^3 \gamma} + \left(\cos \gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin 2\gamma - 2\gamma \cos \gamma}{\gamma \sin 2\gamma - 2\sin^2 \gamma} + 2 \right) \quad (8.3) \end{aligned}$$

(были учтены соотношения (7.5) и теорема тауберова типа [5]). Предполагается также, что $b_1 \geq 1$, $\alpha_k \geq 1$, $\forall k$ и $\gamma < \pi/2$. Последнее условие обеспечивает аналитичность функций $K_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, и следовательно,

гарантирует существование пределов $\lim_{z \rightarrow i} K_n(z)$.

9. Выводы. Все предельные операции в равенстве (8.2) были совершены при $\gamma < \pi/2$. Учтено так же, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_+(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{f}_+(\alpha) = 0$$

При $\gamma \geq \pi/2$ момент $M_\gamma(\alpha)$ стремится к бесконечности. В этом случае оказывают влияние первые корни уравнений (7.6), что вполне согласуется с известными более простыми аналогичными задачами [2]. С другой стороны, в случае $\gamma < \pi/2$ момент

отличен от нуля в угловых точках M_1 и M_2 (фигура) и вычисляется точно для разных γ по формуле (8.3).

Автор благодарит С.Ю. Хачатурова за проведение численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я., Ростовцев Н.А. Контактные (смешанные) задачи теории упругости // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 235–252.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнение типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
4. Керекеша П.В., Тихоненко Н.Я. Одна смешанная задача теории упругости // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1313–1320.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 443 с.

Одесса

Поступила в редакцию
10.XI.1995