УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Исследуется задача определения собственных частот и форм для одномерных существенно неоднородных распределенных систем с граничными условиями первого рода. На основе метода Рэлея – Ритца (в частности, принципа Рэлея) дается оригинальное определение малого параметра и приводится постановка соответствующей возмущенной краевой задачи. Разрабатывается конструктивный метод построения двусторонних оценок первого собственного числа (частоты) и вычисления частот и форм с заданной сколь угодно высокой степенью точности. Расчетом конкретных примеров, моделирующих колебания неоднородной струны, и сравнением с имеющимися результатами иллюстрируется высокая эффективность предлагаемого численно-аналитического метода. Аналитическая процедура и вычислительный алгоритм модифицируются для случая граничных условий второго рода.

1. Постановка задачи. Рассматриваются одномерные колебательные системы с существенно неоднородными распределенными параметрами (см. [1–4] и др.). Механическими моделями таких систем являются струна, распределенная пружина, упругий брус или вал, некоторые гидродинамические и квантово-механические системы. В прикладных задачах, как правило, инерционные и упругие свойства могут значительно изменяться по длине (по пространственной координате), которая считается конечной. К указанным характеристикам относятся, например, линейная (погонная) плотность, распределенная жесткость на растяжение или изгиб, плотность стратифицированной жидкости и возмущающий потенциал. Кроме того, колебательная распределенная система может находиться в упругой среде (винклеровское основание [2, 3]), коэффициент жесткости которой также может изменяться.

Будем рассматривать, в основном, случай закрепленных левого и правого концов (граничные условия первого рода [3, 4]). Затем основные результаты без детального вывода будут сформулированы для случаев, когда один или оба конца являются свободными (граничные условия второго рода [3, 4]). Начальные достаточно гладкие распределения смещений и скоростей считаются заданными и согласованными с граничными условиями, которые могут быть переменными во времени. На систему в общем случае оказывается распределенное внешнее воздействие (сила или момент сил).

Рассматриваемая линейная начально-краевая задача допускает разделение переменных и сводится к определению собственных частот и форм колебаний [1–4] и др. Требуется при помощи методов функционального анализа и математической физики построить решение самосопряженной краевой задачи на собственные значения и функции (задача Штурма – Лиувилля) [3–8].

С учетом приведенных выше предположений исследуемая задача в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$[p(x)\,u']' + [\lambda r(x) - q(x)]\,u = 0, \quad 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad u = u(x, \lambda)$$

Здесь u – функция, определяющая форму колебаний, а λ – постоянная разделения переменных ($\lambda = \omega^2$, где ω – частота). Заданные достаточно гладкие функции p, q и r определяют жесткостные и инерционные свойства соответственно. Они удовлетворяют ограничениям $0 < p_1 \leqslant p \leqslant p_2 < \infty$, $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2 < \infty$, $q \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$. Налагаемые условия имеют определенный физический смысл. Отметим, что длина системы нормирована и равна единице. Кроме того, для определенности пока исследуется случай закрепленных концов.

Следует также заметить, что требование непрерывной дифференцируемости функции $p(x)$ согласно (1.1) излишне, поскольку физический смысл имеет характеристика $p(x)\,u' = z$. Уравнение (1.1) приводится к виду системы $u' = z/p$, $z' = -(\lambda r - q)\,u$ с нулевыми граничными условиями для u. Далее, при помощи линейной замены функции $v = up^{-1/2}(x)$ или замены аргумента $x \to y$ вида $y = \int p^{-1}(x)\,dx$ уравнение (1.1) приводится к виду, в котором $p(x) \equiv 1$ или $p(y) \equiv 1$ [6].

Для задачи (1.1) требуется найти значения параметра $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (собственные числа), при которых существуют нетривиальные решения $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ (собственные функции), определяющие соответственно собственные частоты и формы колебаний [1–8 и др.]. Для приложений существенное значение имеет проблема нахождения низших частот и форм ($n \leqslant 10$), как правило, определяющих качество функционирования механической системы; особый интерес представляет вычисление λ_1, $u_1(x)$. В основном, этому вопросу посвящено проводимое исследование. Собственные числа и функции с большими номерами $n \gg 1$ весьма эффективно вычисляются с помощью асимптотических формул [5].

В случае сложного поведения функций p, r, q, которые могут существенно изменяться на рассматриваемом интервале $x \in [0, 1]$ (например, на много порядков), существующие методы могут оказаться недостаточно эффективными при определении собственных частот и форм и в первую очередь низших. Для их приближенного вычисления разработан ряд методов, в том числе весьма изощренных [1–5, 8–11]. Как показывает вычислительная практика, наиболее простой и естественный вариационный метод Рэлея – Ритца часто дает приемлемые результаты для нахождения оценок сверху низших частот. Обоснование метода проведено Н.М. Крыловым [9] (установлена сходимость к точным значениям и дана оценка ее скорости).

Для приложений весьма важно построение оценок снизу. Имеются результаты, которые используют громоздкие вычисления, основанные на приближенном решении уравнения Фредгольма второго рода [10, 11], эквивалентного исходной задаче.

Итак, рассмотрим проблему нахождения первого собственного числа λ_1 задачи (1.1) как представляющего специальный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Будем применять малокоординатное приближение собственной функции по методу Рэлея – Ритца [1–3, 8–11]. Приведем формулировку вариационной задачи, эквивалентной задаче Штурма – Лиувилля (1.1). Она заключается в минимизации квадратического функционала $J[u]$ при дополнительном условии нормировки $\Phi[u] = 1$ на классе функций u, удовлетворяющих краевым условиям (1.1)

$$J[u] = \int_0^1 [p(x)\,u'^2 + q(x)\,u^2]\,dx \to \min \tag{1.2}$$

$$\Phi[u] = \|u\|_r^2 = (u,u)_r = \int_0^1 u^2 r(x)\,dx = 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Решение $u_1(x)$ вариационной задачи (1.2) есть первая собственная функция задачи Штурма – Лиувилля (1.1), а минимум функционала $J[u_1] = \lambda_1$ есть первое собственное число.

Для получения второй собственной функции $u_2(x)$ и числа λ_2 необходимо решить задачу (1.2) на более узком классе функций u, удовлетворяющих дополнительному условию ортогональности $\Phi_1[u] = (u, u_1)_r = 0$, где круглые скобки, как и в (1.2), означают скалярное произведение функций u, u_1 с весом $r(x)$. После того как построена функция $u_2(x)$ и найдено значение $\lambda_2 = J[u_2]$, аналогично ставится задача для определения $u_3(x)$, λ_3, а также последующих функций $u_n(x)$ и чисел λ_n:

$$
\begin{aligned}
&J[u] \to \min, \quad \Phi[u] = 1, \quad \Phi_k[u] = (u, u_k)_r = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\
&J[u_n] = \lambda_n, \quad u_n(x) = u(x, \lambda_n)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Процедура построения последующих решений задачи Штурма–Лиувилля (1.1) путем сведения к вариационным задачам с ограничениями в виде равенств типа (1.3) может быть неограниченно продолжена.

Далее рассматривается задача (1.2) как наименее громоздкая и представляющая практический интерес. В приложениях для ее приближенного решения часто применяется детально разработанный метод Рэлея–Ритца [1–11]. Частным результатом является принцип Рэлея, позволяющий просто при помощи квадратур получить оценку сверху λ_1^* для первого собственного числа λ_1:

$$
0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_1^* = \frac{J[\psi_1]}{\Phi[\psi_1]}, \quad \psi_1(0) = \psi_1(1) = 0 \tag{1.4}
$$

Здесь $\psi_1(x)$ – некоторая ("пробная") функция, не обязательно нормированная согласно (1.2), имеющая непрерывную первую производную для $x \in [0, 1]$. Она выбирается из дополнительных соображений относительно первой формы колебаний [1, 3, 9]. В частности, функция $\psi_1 \neq 0$ при $0 < x < 1$, т.е. не имеет промежуточных нулей; при $q \equiv 0$ она выпукла вверх или вниз и т.д.

Равенство $\lambda_1 = \lambda_1^*$ в (1.4) имеет место тогда и только тогда, когда $\psi_1(x) = ku_1(x)$, $k = \text{const}$. Оценка (1.4) не позволяет судить о близости значений λ_1^* и λ_1. Для этого необходимо получить оценку снизу $\lambda_{1*} \geqslant \lambda_1$, что является весьма непростой проблемой. Как указывалось, имеющиеся подходы [10, 11] к построению таких оценок используют теорию интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Они требуют громоздких кратных квадратур, приводящих к значительным вычислительным затратам. В связи с вышеизложенным представляется важным изучить следующие вопросы.

1°. Установить насколько хорошо полученная по методу Рэлея–Ритца оценка λ_1^* типа (1.4) с использованием малого набора координатных функций $\psi_i(x)$ (в частности, согласно принципу Рэлея при помощи одной функции $\psi_1(x)$) аппроксимирует точное значение λ_1.

2°. Найти оценку снизу λ_{1*}, которая совместно с λ_1^* дает удовлетворительную оценку λ_1.

3°. Уточнить полученные оценки λ_1^*, λ_{1*}.

4°. Разработать процедуру последовательного уточнения оценок, дающую в пределе искомое точное значение λ_1.

5°. Предложить подходы для приближенного решения других краевых задач.

2. Оценка снизу первого собственного числа. Пусть $\psi_1(x)$ – некоторая допустимая функция, т.е. непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая краевым условиям (1.4); выполнение условия нормировки с весом $r(x)$ (1.2) не обязательно. Пусть λ_1^* – оценка сверху собственного числа λ_1, полученная согласно принципу Рэлея, см. (1.2). Наряду с задачей Штурма–Лиувилля (1.1) ($n = 1$) рассмотрим следующую задачу Коши:

$$
[p(x)v']' + [\lambda_1^* r(x) - q(x)]v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \tag{2.1}
$$

Ее решение $v = v_1(x, \lambda_1^*)$ предполагается известным в любом из видов: аналитическом, численном или в виде алгоритма (процедуры). Тогда можно установить, что функция v_1 обладает свойствами

$$v_1(0, \lambda_1^*) = v_1(\xi, \lambda_1^*) = 0, \quad 0 < \xi \leqslant 1 \tag{2.2}$$

Здесь ξ – первая точка пересечения оси x (абсцисса). Правое неравенство (2.2) для ξ есть следствие второй осцилляционной теоремы Штурма [6], причем равенство имеет место лишь при условии $\lambda_1^* = \lambda_1$. Таким образом, в общем случае при $\psi_1 \not\equiv ku_1$ получим $\lambda_1 < \lambda_1^*$, $0 < \xi < 1$. Мерой близости оценки сверху $\lambda_1^* - \lambda_1 > 0$ может служить малость величины $\varepsilon = 1 - \xi > 0$, которая обеспечивается на основе результатов [9].

Скорректируем (уменьшим) величину $\lambda = \lambda_1^*$ в (2.1), умножив ее на число $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$. Естественно связать величину $\varkappa$ со значением $\xi < 1$, например $\varkappa = \varkappa(\xi) = \xi^\gamma$, $0 < \gamma < \infty$, см. далее. Рассмотрим теперь задачу Коши типа (2.1) с уменьшенным значением $\lambda = \lambda_1^*\varkappa$:

$$[p(x)\, w']' + [\lambda_1^*\varkappa r(x) - q(x)]\, w = 0, \quad w(0) = w'(0) = 1 \tag{2.3}$$

Пусть решение $w = w_1(x, \lambda_1^*\varkappa)$, $x \in [0, 1]$ задачи Коши (2.3) построено численно или аналитически. Имеет место утверждение

Теорема 1. Если $w = w_1(x, \lambda_1^*\varkappa) \geqslant 0$ при $0 < x \leqslant 1$, то значение $\lambda_1^*\varkappa = \lambda_{1*}$ дает оценку снизу первого собственного числа λ_1:

$$\lambda_{1*} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^*, \quad \lambda_{1*} = \lambda_1^*\varkappa \tag{2.4}$$

Оценка сверху λ_1^* построена ранее согласно принципу Рэлея (1.4) (или Рэлея–Ритца, см. разд. 5).

Доказательство утверждения следует непосредственно из свойств первой собственной функции $u_1(x)$. Действительно, для $u_1(x)$ при $\lambda = \lambda_1$ имеем тождество (1.1), причем для определенности можно считать $u_1'(0) > 0$; тогда $u_1'(1) < 0$, $u_1(x) = 0$, $0 < x < 1$. Значения $u_1(x)$, λ_1 не предполагаются известными. Аналогично для известной функции w_1 – решения задачи Коши (2.3) – справедливо аналогичное тождество. Умножая тождество для u_1 на w_1, а для w_1 на u_1, вычитая и интегрируя по частям с учетом граничных условий, получим равенство

$$(\lambda_1 - \lambda_1^*\varkappa) \int_0^1 u_1 w_1 r\, dx = -p(1)\, u_1'(1)\, w_1(1, \lambda_1^*\varkappa) \tag{2.5}$$

Из условия теоремы следует, что правая часть равенства (2.5) неотрицательна. Поскольку интеграл положителен, то из (2.5) следует оценка снизу λ_{1*} (2.4).

Обсудим конструктивный аспект теоремы. По-видимому, он невелик, как и в методе "пристрелки", пока не предложено эффективное правило выбора величины $\varkappa$, см. разд. 3. Удобство применения связано с тем, что абсцисса ξ определяется посредством аналитического или численного интегрирования задачи Коши (2.1).

3. Применение метода возмущений для уточнения решения задачи Штурма–Лиувилля. Из выражения (2.2) и оценки (2.4) следует, что критерием точности малокоординатного (в частности, однокоординатного $\psi_1(x)$) приближения первой собственной функции $u_1(x)$ может служить выполнение сильного неравенства

$$1 - \xi = \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.1}$$

Малость числового параметра ε (3.1) достигается удачным выбором пробной функции $\psi_1(x)$ или на основе аппроксимации [9]. Это свойство позволяет разработать эффективную процедуру уточнения решения задачи (1.1) и оценок λ_1^*, λ_{1*}.

Введем новую независимую переменную $y = \xi x$ и преобразуем соотношения (1.1) к виду возмущенной задачи Штурма–Лиувилля с малым параметром ε:

$$\left[p\left(\frac{y}{\xi(\varepsilon)}\right)u'\right]' + \left[\mu r\left(\frac{y}{\xi(\varepsilon)}\right) - \frac{1}{\xi^2(\varepsilon)}q\left(\frac{y}{\xi(\varepsilon)}\right)\right]u = 0, \quad \mu = \frac{\lambda}{\xi^2} \tag{3.2}$$

$$u = u(y,\varepsilon), \quad 0 \leqslant y \leqslant \xi, \quad u(0,\varepsilon) = u(\xi,\varepsilon) = 0, \quad \frac{1}{\xi(\varepsilon)} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots$$

Штрихами обозначены производные по y. Этот прием аналогичен предложенному Пуанкаре [12, 13] для построения возмущенных периодических движений нелинейных колебательных систем.

В качестве "порождающей задачи" возьмем следующую:

$$[p(y)\,u']' + [\mu r(y) - q(y)]\,u = 0, \quad u(0) = u(\xi) = 0 \tag{3.3}$$

Согласно (2.1), (2.2), первое собственное число $\mu_1 = \lambda_1^*$ и функция $u_1 = v_1(y, \lambda_1^*)$ известны. На их основе при $\varepsilon > 0$, достаточно малом, может быть разработана эффективная процедура метода возмущений, позволяющая построить искомое решение $\mu_1(\varepsilon)$, $u_1(y, \varepsilon)$ задачи (3.2) с произвольной заданной степенью точности по ε.

Применим сперва стандартную схему разложения искомых величин по степеням ε. Считая функции $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ гладкими, приведем возмущенную задачу Штурма–Лиувилля (3.2) к виду

$$\begin{gathered}[p(y)\,u']' + [\mu r(y) - q(y)]\,u = \varepsilon H(\mu, y, \varepsilon, [u]), \quad u(0,\mu,\varepsilon) = u(\xi,\mu,\varepsilon) = 0 \\ H \equiv -[p'yu']' - \mu y r'(y)\,u + 2q(y)\,u + yq'(y)\,u + \varepsilon\ldots, \quad \mu = \lambda\xi^{-2}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\mu = \mu_1(\varepsilon)$ – искомое собственное число, $u = u_1(y, \mu, \varepsilon)$ – соответствующая функция. Решение задачи (3.4) ищем в виде разложений

$$\mu = \mu_1 + \varepsilon\nu_1^{(1)} + \varepsilon^2\ldots, \quad u = u_1 = v_1(y,\lambda_1^*) + \varepsilon v_1^{(1)}(y) + \varepsilon^2\ldots \tag{3.5}$$

Подставляя представления (3.5) в (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность однотипных краевых задач

$$\begin{gathered}[p(y)v_1^{(i)}]' + [\lambda_1^* r(y) - q(y)]v_1^{(i)} = -\nu_1^{(i)} r(y) v_1 + H_i(y) \\ v_1^{(i)}(0) = v_1^{(i)}(\xi) = 0, \quad i \geqslant 1\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь на i-м шаге неизвестными являются $\nu_1^{(i)}$, $v_1^{(i)}$, а функции $H_i(y)$ определяются на основе решений на предыдущих шагах. Решение задачи (3.6) строится стандартными методами теории линейных дифференциальных уравнений [6]. Оно может быть выполнено в виде квадратур, поскольку общее решение соответствующего однородного уравнения находится при помощи формулы Лиувилля, см. разд. 4, на основе известной функции $v_1(y, \lambda_1^*)$.

Для разрешимости краевой задачи (3.6) необходимо (альтернатива Фредгольма), чтобы правая часть была ортогональна v_1. Из этого соотношения на каждом i-м шаге определяются искомые коэффициенты $\nu_1^{(i)}$:

$$\nu_1^{(i)} = \frac{1}{\|v_1\|^2}\int_0^\xi H_i(y) v_1(y,\lambda_1^*)\,dy, \quad \|v_1\|^2 = \int_0^\xi v_1^2(y,\lambda_1^*)\,r(y)\,dy \tag{3.7}$$

Заметим, что функция H_1 согласно (3.4) находится с помощью известных λ_1^* и

$v_1(y, \overset{*}{\lambda_1})$. Тогда из формулы (3.7) следует выражение для $\nu_1^{(1)}$:

$$\nu_1^{(1)} = \frac{1}{\|v_1\|^2} \int_0^\xi \{p'(y)\, y v_1'^2 + [-\lambda_1^* y r'(y) + 2q(y) + y q'(y)] v_1^2(y, \lambda_1^*)\}\, dy \tag{3.8}$$

В результате получаем искомое первое число $\mu_1(\varepsilon)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, см. (3.5). Из определения μ (3.4) получим значение $\lambda_1(\varepsilon)$ с такой же погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1^* \xi^2 \left(1 + \varepsilon \frac{\nu_1^{(1)}}{\lambda_1^*}\right) + O(\varepsilon^2) = \lambda_1^* \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\nu_1^{(1)}}{\lambda_1^*} - 2\right)\right] + O(\varepsilon^2) \tag{3.9}$$

Построение более высоких приближений искомых значений $\lambda_1(\varepsilon)$, $u_1(x, \varepsilon)$ и обоснование сходимости приводятся в разд. 4.

Вернемся вновь к обсуждению результатов теоремы 1 разд. 2 и рассмотрим оценку снизу λ_{1*} (2.4) с учетом выражения (3.9) для λ_1. Если величина ε достаточно мала, то при условии $\nu_1^{(1)} > 0$, см. (3.8), для λ_{1*} получим значение $\lambda_{1*} = \overset{*}{\lambda_1}\xi^2(1 + \varepsilon\eta\nu_1^{(1)})$, где $\eta < 1$, в частности $\eta = 0$, т.е. $\lambda_{1*} = \overset{*}{\lambda_1}\xi^2$. Грубое условие, приводящее к неравенству $\nu_1^{(1)} > 0$, состоит в том, что выражения в фигурных скобках (3.8), в частности $p' \geqslant 0$, $r' \leqslant 0$, $q' \geqslant 0$, неотрицательны, см. расчет примеров в разд. 5. Заметим, что при $\nu_1^{(1)} > 0$ для $\varkappa = \xi^2(\gamma = 2)$ должно выполняться условие $w_1 \geqslant 0$ теоремы 1.

Рассмотрим случай $\nu_1^{(1)} < 0$; тогда оценкой снизу является величина $\lambda_{1*} = \overset{*}{\lambda_1}\xi^2(1 + \varepsilon\eta\nu_1^{(1)})$, $\eta > 1$. Значение $\lambda_1^{*(2)} = \overset{*}{\lambda_1}\xi^2$ будет улучшенной оценкой сверху, которую можно использовать аналогично $\overset{*}{\lambda}_1$, см. разд. 2, 3. Процесс построения нижней оценки может быть продолжен, см. пример 2 (разд. 5).

Если имеет место критический случай $\nu_1^{(1)} = 0$, то оценкой снизу будет величина $\lambda_{1*} = \overset{*}{\lambda_1}\xi^2\eta$, $\eta < 1$ ($\eta = 1 - O(\varepsilon)$). Более точная оценка потребует вычислений последующих коэффициентов $\nu_1^{(i)}$, $i \geqslant 2$. Таким образом, при $\varepsilon \ll 1$ нижней оценкой заведомо будет величина $\lambda_{1*} = \eta\overset{*}{\lambda_1}$, $1 - \eta = \delta$, $1 \gg \delta \gg \varepsilon$ (например, $\delta = \varepsilon^\chi$, $0 < \chi < 1$, в частности, $\delta = \varepsilon^{1/2}$) независимо от знака $\nu_1^{(1)}$.

Аналогичный вышеизложенному подход может быть применен и обобщен на краевые условия второго (см. разд. 6) и третьего родов, а также для нахождения вторых собственных чисел λ_2 и функций u_2 задачи (1.1) и последующих согласно (1.3).

Представляет принципиальный интерес в теоретическом и прикладном аспектах исследование проблемы построения улучшенных оценок и уточненного решения краевой задачи (3.2). Ниже излагается подход, основанный на применении метода последовательных приближений, разработанного для исследования задач теории нелинейных колебаний [12, 13 и др.].

4. Построение точного решения и обоснование метода возмущений. Изложенная выше нестандартная процедура выделения малого параметра и применения метода возмущений для приближенного решения краевой задачи (3.2) или (3.4) может быть продолжена путем учета более высоких степеней ε^j, $j \leqslant 1$. Однако изложенный в разд. 3 подход не адаптирован для вычислений на ЭВМ высших приближений. Поэтому целесообразно преобразовать исходную возмущенную задачу Штурма–Лиувилля (3.2) к виду (для упрощения выкладок здесь полагаем $p(x) \equiv 1$, что не снижает общности, см. разд. 1)

$$u'' + [\mu r(y) - q(y)]\, u + h(\mu, y, \varepsilon)\, u = 0$$

$$u = u(y, \mu, \varepsilon), \quad u = u(0, \mu, \varepsilon) = u(\xi, \mu, \varepsilon) = 0, \quad y \in [0, \xi] \tag{4.1}$$

$$\mu = \lambda d^2, \quad d = (1-\varepsilon)^{-1}, \quad h \equiv \mu[r(dy) - r(y)] + q(y) - d^2 q(dy)$$

Считая функции $r(x)$, $q(x)$, $x \in [0, 1]$ гладкими, находим, что $h = O(\varepsilon)$ для $y \in [0, \xi]$, $\mu \sim \lambda_1^* \sim 1$. Поскольку система (4.1) линейна по u, μ (билинейна по совокупности u, μ), то в дальнейшем достаточно ограничиться условием Липшица по x для r, q. Полагая $\varepsilon = 0$ в (4.1), получим невозмущенную задачу (3.3), решение которой $\mu_0 = \lambda_1^*$, $u_0(y, \mu_0) = v_1(y, \lambda_1^*)$ – первое собственное число и функция – считаются известными, см. (2.1), (2.2), (3.3).

Непосредственное решение краевой задачи (4.1) методами теории возмущений оказывается весьма громоздким и трудоемким из-за необходимости удовлетворения граничного условия при $y = \xi$. Поэтому воспользуемся его следствием

$$\mu \int_0^\xi u^2 r(y)\, dy = \int_0^\xi \{u'^2 + [q(y) - h(\mu, y, \varepsilon)]\, u^2\}\, dy \tag{4.2}$$

и откажемся от указанного краевого условия (4.1). Заменим его на произвольное ненулевое условие для производной u' при $y = 0$, в частности положим $u'(0, \mu, \varepsilon) = 1$. Этот переход допустим, так как $u'(0, \mu, \varepsilon) \neq 0$ и, кроме того, функции u определены с точностью до ненулевого множителя.

Итак, вместо исходной возмущенной краевой задачи (4.1) рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &u'' + [\mu r(y) - q(y)]\, u + h(\mu, y, \varepsilon)\, u = 0 \\ &u(0, \mu, \varepsilon) = 0, \quad u'(0, \mu, \varepsilon) = 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

которая совместно с уравнением (4.2) позволяет более просто найти искомые величины $\mu = \mu_1(\varepsilon)$, $u = u_1(y, \varepsilon)$ – первые собственные число и функцию соответственно. Применим к эквивалентной задаче (4.2), (4.3) стандартную процедуру метода последовательных приближений. Для этой цели сделаем замены

$$\mu = \mu_0 + \nu, \quad \mu_0 = \lambda_1^*; \quad u = u_0 + z, \quad u_0(y, \mu_0) = v_1(y, \lambda_1^*) \tag{4.4}$$

Соотношение (4.2) после подстановки выражений (4.4) преобразуется к квазилинейному функциональному уравнению вида

$$\begin{aligned} &\nu = \nu_1^* + N(\nu, [z], [z'], \varepsilon), \quad \nu_1^* = \nu_1^*(\varepsilon) = -\|u_0\|^{-2} I[h_0 u_0^2] \\ &\|u_0\|^2 = I[u_0^2 r], \quad I[\varphi] \equiv \int_0^\xi \varphi(y)\, dy, \quad N = I[\Psi(\nu, z, z', y, \varepsilon)] \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\Psi \equiv z'^2 + (q - \mu_0 r)\, z^2 - (h_0 + \nu r)(2u_0 z + z^2) - \nu h_\nu (u_0 + z) \\ &h_0 \equiv h(\mu_0, y, \varepsilon), \quad h_\nu \equiv r(dy) - r(y), \quad h_\nu \sim \varepsilon \end{aligned}$$

Поскольку величина $\mu_0 = \lambda_1^*$ – первое собственное число невозмущенной задачи – известна, зависимость u_0 от μ_0 можно не указывать ради сокращения записи. Далее, квадратные скобки в (4.5) означают, что к соответствующим функциям применен оператор интегрирования по y типа I.

Аналогичным образом преобразуем задачу Коши (4.3) для возмущения z (4.4):

$$\begin{aligned} &z'' + [\mu_0 r(y) - q(y)]\, z = -(\nu_1^* r + h_0)\, u_0 - F(\nu, z, [z], [z'], y, \varepsilon) \\ &F \equiv (\nu r + h)\, z - \nu(h_\nu + N u_0 r); \quad z(0, \nu, \varepsilon) = 0, \quad z'(0, \nu, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

При $\varepsilon = 0$ задача (4.5), (4.6) допускает тривиальное решение. Функции и операторы N, F имеют квадратический порядок по отношению к малым величинам ε, ν, ν_1, z, z'.

Будем строить искомое решение $\nu = \nu(\varepsilon)$, $z = z(y, \varepsilon)$ последовательными приближениями по рекуррентной схеме [13]

$$\nu_{j+1} = \nu_1^* + N(\nu_j, [z_j], [z_j'], \varepsilon), \quad j \geqslant 1; \quad \nu_1 = \nu_1^*(\varepsilon) \sim \varepsilon$$

$$z_{j+1} = z_1^*(y,\varepsilon) + L(\nu_j, [z_j], [z_j'], y, \varepsilon), \quad z_{j+1}' = \frac{dz_{j+1}}{dy}$$

$$z_1^*(y,\varepsilon) \equiv -\int_0^y W(y,s)[\nu_1^* r(s) + h(\mu_0, s, \varepsilon)]\, u_0(s)\, ds; \quad z_1^*, z_1^{*\prime} \sim \varepsilon \tag{4.7}$$

$$L_j \equiv -\int_0^y W(y,s)\, F(\nu_j, z_j(s,\varepsilon), [z_j], [z_j'], s, \varepsilon)\, ds; \quad L_j, L_j' \sim \varepsilon^2$$

Здесь $W(y, s)$ – импульсная переходная функция невозмущенного уравнения (4.6). Она известна, поскольку имеется возможность построения общего решения z_0 однородного уравнения при помощи формулы Лиувилля [6, 13]

$$z_0 = c_1 u_0(y) + c_2 w_0(y), \quad w_0(y) \equiv u_0(y) \int_0^y \frac{ds}{u_0^2(s)} \tag{4.8}$$

$$W(y,s) = -u_0(y)\, w_0(s) + w_0(y)\, u_0(s), \quad W(s,s) = 0, \quad W_y'(s,s) = 1$$

Функция $W(y, s)$ (4.8) равномерно ограничена для всех $y, s, \xi \geqslant y \geqslant s \geqslant 0$ [6].

Теорема 2. Последовательные приближения ν_j, z_j, z_j' (4.7) равномерно сходятся при $j \to \infty$ для достаточно малых значений ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ к единственному точному решению $\nu^*(\varepsilon)$, $z^*(y, \varepsilon)$, $z^{*\prime}(y, \varepsilon)$ задачи (4.5), (4.6) обращающемуся в нуль при $\varepsilon = 0$.

Доказательство разбивается на несколько этапов. Во-первых, индукцией устанавливается, что последовательные приближения (4.7) равномерно ограничены независимо от номера $j = 1, 2, \ldots, k, k + 1, \ldots$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом. Таким образом, имеют место неравенства

$$|\nu_j| \leqslant \varepsilon c_\nu, \quad |z_j| \leqslant \varepsilon c_z, \quad |z_j'| \leqslant \varepsilon c_{z'}, \quad j \geqslant 1 \tag{4.9}$$

в которых постоянные c_ν, c_z, $c_{z'}$ находятся конструктивно при помощи оценок функций W, r, q, h, h_ν.

Неравенства (4.9) позволяют затем установить, во-вторых, что операторы (4.7) "сближают расстояние". На основе теоремы Банаха об операторе сжатия устанавливается существование неподвижной точки, см. [7, 8]. Итак, доказано существование пределов $\nu^*(\varepsilon)$, $z^*(y, \varepsilon)$, $z^{*\prime}(y, \varepsilon)$ для достаточно малых значений $\varepsilon > 0$. Эти пределы ограничены согласно (4.9) и обращаются в нуль при $\varepsilon = 0$.

Величина параметра ε_0, определяющая область сходимости по ε, может быть конструктивно оценена следующим образом [7, 8, 13]. Для разностей

$$\Delta\nu_{j+1} = |\nu_{j+1} - \nu_j|, \quad \Delta z_{j+1} = \max_{0 \leqslant y \leqslant \xi} |z_{j+1} - z_j|, \quad \Delta z_{j+1}' = \max_{0 \leqslant y \leqslant \xi} |z_{j+1}' - z_j'|$$

на основе (4.7) при помощи оценок (4.9) получим неравенства вида

$$\Delta g_{j+1} \leqslant \varepsilon(\alpha_g \Delta\nu_j + \beta_g \Delta z_j + \gamma_g \Delta z_j'), \quad g = \nu, z, z' \tag{4.10}$$

Постоянные $(\alpha, \beta, \gamma)_g$ в (4.10) эффективно определяются через правые части соотношений (4.7) аналогично c_g (4.9). Складывая неравенства (4.10), получим оценку

$$\begin{gathered}\Delta_{j+1} \leqslant \varepsilon C \Delta_j; \quad \Delta_j \equiv \Delta\nu_j + \Delta z_j + \Delta z_j', \quad C = \max(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma) \\ \mathrm{A} = \alpha_\nu + \alpha_z + \alpha_{z'}, \quad \mathrm{B} = \beta_\nu + \beta_z + \beta_{z'}, \quad \Gamma = \gamma_\nu + \gamma_z + \gamma_{z'}\end{gathered} \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует основное условие теоремы об операторе сжатия

$$\varepsilon_0 C = \theta < 1, \quad \varepsilon_0 = \theta C^{-1}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{4.12}$$

Сходимость $\nu_j \to \nu^*$, $z_j \to \overset{*}{z_j}$, $z_j' \to z^{*\prime}$ при условии (4.12) следует из свойства абсолютной и равномерной сходимости при $j \to \infty$ частичных сумм вида $\nu_{j+1} = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) + ... + (\nu_{j+1} - \nu_j)$ и аналогичных для z_{j+1}, z_{j+1}'. Поскольку для слагаемых имеют место оценки (4.11), соответствующие ряды при $j \to \infty$ сходятся, как суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем, не большим θ, $\theta < 1$.

В-третьих, докажем, что предельные функции $\nu^*(\varepsilon)$, $z^*(y, \varepsilon)$, $z^{*\prime}(y, \varepsilon)$ удовлетворяют уравнениям (4.5), (4.6). Задача Коши (4.6) должна быть представлена при помощи переходной функции $W(y, s)$ в форме интегрального уравнения с оператором L, см. (4.7). Далее подставим в N, F, L эти функции; получим некоторые значения ν, z, z'. Используя (4.7), вычислим $\max \Delta g_{j+1}$. Они удовлетворяют неравенствам типа (4.10), в которых выражения справа вместо Δg_j содержат разности $\Delta \overset{*}{g_j}$. Поскольку последние, как установлено выше, стремятся к нулю при $j \to \infty$, это означает, что

$$\nu = \nu^*(\varepsilon), \quad z = z^*(y, \varepsilon), \quad z' = z^{*\prime}(y, \varepsilon), \quad y \in [0, \xi], \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \tag{4.13}$$

– решение задачи (4.5), (4.6). Согласно формулам замены (4.4) функции

$$\mu = \mu_0 + \nu^*(\varepsilon), \quad u = u_0(y) + z^*(y, \varepsilon), \quad u' = du / dy$$

$$\lambda = d^{-2}[\mu_0 + \nu^*(\varepsilon)], \quad u = u_0(d^{-1}x) + z^*(d^{-1}x, \varepsilon), \quad u_x' = d^{-1} du / dy \tag{4.14}$$

– решения задач Штурма–Лиувилля (4.1) и (1.1) соответственно.

Наконец, в-четвертых, докажем единственность построенного решения (4.13), а вместе с ним и (4.14) при $\varepsilon > 0$, достаточно малом, см. (4.12). Пусть предположено противное, т.е. ν_*, z_*, z_*' – другое решение задачи (4.5), (4.6), удовлетворяющее (4.9). Тогда для разностей $\Delta\nu = \nu^* - \nu_*$, $\Delta z = |z^* - z_*|_{\max}$, $\Delta z' = |z^{*\prime} - z_*'|_{\max}$ получим неравенства типа (4.12), причем в правых частях стоят те же величины $\Delta\nu$, Δz, $\Delta z'$. Если выполнено строгое неравенство (4.12), то эти неравенства могут быть справедливыми лишь при условии $\Delta\nu = 0$, $\Delta z = 0$, $\Delta z' = 0$, т.е. $\nu^* \equiv \nu_*$, $z^* \equiv z_*$, $z^{*\prime} \equiv z_*'$. Таким образом, единственность решения (4.13) и (4.14) также установлена.

Отметим, что искомое решение $\nu(\varepsilon)$, $z(y, \varepsilon)$, $z'(y, \varepsilon)$ может быть построено при помощи процедуры разложений по степеням малого параметра ε. При этом используется аналитичность соотношений (4.2), (4.3) по μ, u, u' или (4.5), (4.6) по ν, z, z'. Аналитичность r, q относительно y, ε не требуется. Доказательство существования решения, обоснование сходимости рядов, оценка радиуса сходимости и доказательство единственности проводятся методом мажорантных функций Коши [3, 14].

Используя метод Рэлея–Ритца, представляется возможным без принципиальных затруднений распространить изложенный в разд. 4 подход на задачу построения последующих собственных значений λ_n и функций $u_n(x)$, $n \geqslant 2$.

Таким образом, предложенная нестандартная методика введения малого числового параметра ε (3.1) позволяет уточнить значения собственных чисел и функций. В отличие от метода пристрелки уточнение проводится по степеням ε^j, а не последовательным делением отрезка. На основе формул (3.3), (3.8), (3.9) можно построить численно-аналитическую процедуру, обеспечивающую ускоренную сходимость [15, 16].

Эффективность разработанного подхода иллюстрируется ниже расчетами модельных примеров. В общем случае для численного интегрирования задачи Коши и вычисления интегралов могут потребоваться вычислительные средства типа PC AT. Однако для несложных расчетов удовлетворительные результаты могут быть получены с помощью программируемых микрокалькуляторов.

5. Модельные примеры. Для иллюстрации эффективности изложенных в разд. 2–4 подходов рассмотрим краевые задачи, возникающие при исследовании колебаний закрепленной на концах неоднородной струны [3, 4]. Применяя метод разделения переменных, для координатных функций получим задачи Штурма–Лиувилля вида (1.1), в которых $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$.

Пример 1. Возьмем функцию линейной плотности вида $r(x) = 1 + \sin \pi x$, $x \in [0, 1]$. Используя пробную функцию $\psi_1 = \sin \pi x$, получим согласно (1.4) оценку сверху первого собственного числа: $\lambda_1 \leqslant \lambda_1^* = 5{,}33827$. Интегрирование задачи Коши (2.1) приводит к абсциссе $\xi = 0{,}999417$, весьма близкой к единице. Величина малого параметра ε находится по формуле (3.1): $\varepsilon = 1 - \xi = 5{,}83 \cdot 10^{-4} \ll 1$ и оказывается достаточно малой. Скорректированное значение $\lambda_1^* \xi^2 = 5{,}33205$, как вытекает из результатов интегрирования соответствующей задачи Коши (2.3) (при $\varkappa = \xi^2$, $\gamma = 2$), приводит к весьма точной оценке снизу λ_{1*} собственного числа λ_1 (условия теоремы 1 выполнены). Кроме того, это утверждение следует из формулы (3.8), поскольку $v_1^{(1)} > 0$.

Далее, согласно многокоординатным чрезвычайно громоздким расчетам и оценкам [10, 11] имеем в качестве "точного" значения $\lambda_1 = 0{,}54032\pi^2 \simeq 5{,}33274$. Уточненное по формуле (3.9) значение $\lambda_1^{(1)} = 5{,}33284$, что приводит к относительной погрешности $|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1| \lambda_1^{-1} \sim 10^{-5}$, т.е. $O(\varepsilon^2)$.

Пример 2. Рассмотрим для сравнения с приведенными результатами внешне близкую функцию плотности $r(x) = 1 + \sin(\pi x/2)$, $x \in [0, 1]$. Заметим, что средняя плотность (суммарная масса) струны в обоих случаях одинакова и равна $1 + 2/\pi$. Используем ту же пробную функцию $\psi_1 = \sin \pi x$ в принципе Рэлея; получим оценку сверху $\lambda_1^* = 5{,}87805$. Интегрирование задачи Коши (2.1) приводит к значению $\xi = \xi^{(1)} = 0{,}99805$, также весьма близкому к $x = 1$; параметр $\varepsilon =$ $= 1 - \xi^{(1)} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$. Анализ задачи Коши (2.3) с $\lambda_1^{*(2)} = \lambda_1^* \xi^{(1)2} = 5{,}85515$ показывает, что условия теоремы 1 не выполнены: $w_1(1, \lambda_1^{(2)}) < 0$. Кроме того, как следует из формулы (3.9), $v_1^{(1)} < 0$, что подтверждает эти выводы. Поэтому $\lambda_1^{*(2)} = \lambda_1^* \xi^{(1)2}$ будет улучшенной оценкой сверху числа: $\lambda_1^* > \lambda_1$ $(\lambda_1^{*(2)} < \lambda_1^*)$, которую будем использовать для определения уточненной абсциссы $\xi = \xi^{(2)}$. Анализ задачи Коши (2.1) с $\lambda = \lambda_1^{*(2)}$ приводит к более близкому значению корня ξ (2.2): $\xi =$ $= \xi^{(2)} = 0{,}99975$ и к существенно меньшему значению малого параметра $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$. Эту процедуру можно продолжить и на третьем шаге получить вновь улучшенную оценку сверху $\lambda_1^{*(3)} = \lambda_1^{*(2)} \xi^{(2)2} = 5{,}85222$, т.е. $5{,}85215 < \lambda_1 < 5{,}85222$, и весьма точное значение $\xi = \xi^{(3)} = 0{,}99999$ (точнее, $\xi^{(3)} = 0{,}999994$). После четвертой итерации находим $\lambda_1^{(4)} = \lambda_1^{*(3)} \xi^{(3)2} = 5{,}85215$; интегрированием задачи Коши (2.3) удается, наконец, численно установить, что $w_1(x, \lambda_1^{(4)}) > 0$, $x \in [0, 1]$, т.е. $\lambda_1^{(4)} = \lambda_{1*}^{(4)}$ – оценка снизу. В результате получена весьма точная двусторонняя оценка $\lambda_{1*}^{(4)} < \lambda_1 < \lambda_1^{*(3)}$.

Возьмем в рассматриваемом примере более точное двухкоординатное приближение метода Рэлея–Ритца: $\psi_1(x) = c_1 \sin \pi x + c_2 \sin 2\pi x$. Эта пробная функция приводит к оценке сверху $\lambda_1^* =$ $= 5{,}85232$ и значению $\xi = 0{,}99999$ (точнее, $\xi = 0{,}999985$). Значение $\lambda_1^* \xi^2 = 5{,}85214$ оказывается оценкой снизу, поскольку выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $v_1^{(1)} > 0$. Таким образом, сразу установлена удовлетворительная двусторонняя оценка $\lambda_1^* \xi^2 < \lambda_1 < \lambda_1^*$, однако она несколько менее точная, чем полученная выше после четвертой итерации. Вычислительный опыт показывает, что экономичнее может оказаться выбор несколько более точной пробной функции [9].

Пример 3. Исследуем другой поучительный пример, для которого удается построить точное аналитическое решение задачи Штурма–Лиувилля. Возьмем функцию $r(x) =$

$= (1+x^2)^{-2}$, $x \in [0, 1]$. Полное решение задачи имеет вид

$$\lambda_n = 16n^2 - 1, \quad u_n(x) = \sqrt{1+x^2}\sin(4n\,\mathrm{arctg}\,x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_1 = 15, \quad u_1(x) = \sqrt{1+x^2}\sin(4\,\mathrm{arctg}\,x) = 2x(1-x^2)(1+x^2)^{-3/2}$$

Для простейшей пробной функции $\psi_1 = \sin \pi x$ при помощи результатов разд. 2 получим искомую оценку сверху $\lambda_1^* = 15{,}33728$, абсциссу $\xi = 0{,}98350$ и малый параметр $\varepsilon = 1{,}65 \cdot 10^{-2}$. Согласно теореме 1, находим оценку λ_1 снизу: $\lambda_{1*} = \lambda_1^* \xi^2 = 14{,}83533$. Заметим, кстати, поскольку $r' < 0$, согласно (3.8) $\nu_1^{(1)} > 0$. Уточненное значение равно $\lambda_1^{(1)} = 15{,}00847$, а относительная погрешность $|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1|\,\lambda_1^{-1} = 5{,}7 \cdot 10^{-4}$, т.е. порядка ε^2. Итак, несмотря на "грубость" выбора пробной функции ψ_1, получены удовлетворительные результаты оценивания после первой итерации.

Пример 4. Рассмотрим кратко аналогичную задачу, для которой пробная функция также весьма сильно отличается от точной собственной функции. Возьмем уравнение типа Эйлера [6] с функцией $r(x) = (1+x)^{-2}$, $x \in [0, 1]$. Получим точное аналитическое решение

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi n}{\ln 2}\right)^2, \quad u_n(x) = \sqrt{1+x}\sin\left(\frac{\pi n}{\ln 2}\ln(1+x)\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^2 = 20{,}79229, \quad u_1(x) = \sqrt{1+x}\sin\left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)\ln(1+x)$$

Для привычной элементарной функции $\psi_1 = \sin \pi x$ по формуле (1.4) получим $\lambda_1^* = 22{,}22421$, что нельзя назвать хорошим приближением. Выполняя расчеты согласно разд. 2, определим $\xi = 0{,}95459$, $\varepsilon = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$; в соответствии с теоремой 1 оценка снизу $\lambda_{1*} = \lambda_1^{(1)} = 20{,}25164$. По формулам (3.8), (3.9) найдем уточненное значение $\lambda_1^{(1)} = 20{,}80330$. Абсолютная погрешность $\lambda_1^{(1)} - \lambda_1 \approx 10^{-2}$, а относительная $(\lambda_1^{(1)} - \lambda_1)\,\lambda_1^{-1} = 5 \cdot 10^{-4} \sim \varepsilon^2$, т.е. имеет место значительное увеличение точности оценки.

Аналогично могут быть исследованы более содержательные в прикладном аспекте примеры. Отметим, что предлагаемые приемы оценивания собственных чисел и приближенного численно-аналитического решения задач Штурма–Лиувилля будут эффективными еще в большей мере, если уравнение (1.1) близко к точно интегрирующемуся. В частности, если оно близко к уравнению с постоянными коэффициентами, то удается построить системы собственных значений $\{\lambda_n(\varepsilon)\}$ и функций $\{u_n(x, \varepsilon)\}$ с заданной степенью точности по ε, равномерной относительно индекса n, $n = 1, 2, \ldots$ [17].

6. Распространение подхода на другие классы задач. Обсудим возможности развития численно-аналитического метода разд. 2–4 на другие типы краевых условий. Для определенности рассмотрим весьма кратко случай граничных условий второго рода: $u'(0) = u'(1) = 0$. Чтобы не загромождать изложение, в уравнении (1.1) положим $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Это допущение соответствует механической модели свободной натянутой струны с переменной по длине линейной плотностью $r(x)$, см. разд. 5. Излагаемый ниже подход может быть перенесен на более общий случай $q(x) \not\equiv 0$, $p = p(x)$. Итак, рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$u'' + \lambda r(x)\, u = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0 \tag{6.1}$$

Она имеет собственное число $\lambda_0 = 0$ и соответствующую функцию $u_0 = 1$. Требуется определить (оценить и уточнить) следующее, отличное от нуля собственное число λ_1. Сопоставим с краевой задачей (6.1) соответствующую вариационную, см. разд. 1. Требуется найти минимум функционала при дополнительных изопериметрических условиях

$$J[u]=\int_0^1 u'^2dx \to \min, \quad \Phi[u]=\|u\|^2=1, \quad \Phi_1[u]=(1,u)_r=0 \tag{6.2}$$

Вычисления проводятся по схеме, аналогичной разд. 1–3. Далее для наглядности и конкретности возьмем рассмотренный выше пример 3 функции $r(x) = (1 + x^2)^{-2}$, $x \in [0, 1]$. Для сравнения выпишем точное аналитическое решение

$$\lambda_n=\gamma_n^2-1, \quad \gamma=\mathrm{Arctg}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{1}{4}\pi\gamma\right)-\gamma^{-1}\right), \quad \lambda_1=17{,}41687$$

$$u_n(x)=\sqrt{1+x^2}\cos(\gamma_n \,\mathrm{arctg}\, x), \quad n=1,2,\ldots \tag{6.3}$$

В качестве пробной функции ψ_1 из рассматриваемого класса возьмем простейшую вида $\psi_1 = \alpha + \cos \pi x$, где α – постоянная, определяемая условием ортогональности (с весом $r(x)$) $\Phi_1[\psi_1] = 0$ (6.2). В результате получим функцию ψ_1, значительно отличающуюся от $u_1(x)$ (6.3), и соответствующую ей оценку сверху первого собственного числа по принципу Рэлея

$$\psi_1(x) = \cos \pi x - 0{,}27269, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_1^* = 18{,}06583 \tag{6.4}$$

Численным интегрированием решаем задачу Коши для уравнения (6.1) с $\lambda = \lambda_1^*$ (6.4) и условиями на левом конце $v_1(0) = 1, v_1'(0) = 0$. Далее определяем величину $\xi = 0{,}96875$, для которой $v_1'(\xi) = 0$, и малый параметр $\varepsilon = 0{,}03125$. При помощи подхода разд. 2 получим оценку снизу $\lambda_{1*} = \lambda_1^*\xi^2 = 16{,}95440$. При помощи методики возмущений (см. разд. 3) находим уточненное значение $\lambda_1^{(1)} = 17{,}48420$, относительная погрешность которого $(\lambda_1^{(1)} - \lambda_1)\,\lambda_1^{-1} = 4\cdot10^{-3} \sim \varepsilon^2$.

Возьмем более сложную пробную функцию ψ_1, содержащую две гармоники:

$$\psi_1(x)=c_1(\cos\pi x-0{,}27269)+c_2(\cos 2\pi x+0{,}00125)$$

Она удовлетворяет условию $\Phi_1[\psi_1] = 0$ (6.2). Оценка сверху по методу Рэлея–Ритца дает значение $\lambda_1^* = 17{,}41833$, которое значительно ближе к точному значению λ_1 (6.3), чем полученное в однокоординатном приближении (6.4). Интегрирование соответствующей задачи Коши (см. выше) приводит к значениям $\xi = 0{,}99993$, $\varepsilon = 7\cdot10^{-5}$. Вычисление оценки снизу дает искомое значение $\lambda_{1*} = \lambda_1^*\xi^2 = 17{,}41575$, также весьма близкое к точному. Вычисляя среднее, находим $\langle\lambda_1\rangle = {}^1/_2\,(\mu_0 + \lambda_1^*) = 17{,}41704$, которое отличается от точного на величину $\langle\lambda_1\rangle - \lambda_1 = 0{,}00017$, что можно считать высокоточным приближением. Относительная погрешность будет $(\langle\lambda_1\rangle - \lambda_1)\,\lambda_1^{-1} = 10^{-5}$. Уточнение λ_1, т.е. вычисление $\lambda_1^{(1)}$, приведет к еще меньшей погрешности $O(\varepsilon^2) \sim 10^{-8}$. Таким образом, как отмечалось ранее, точность вычислений может быть значительно увеличена, а трудоемкость расчетов уменьшена усложнением пробной функции (см. пример 2 разд. 5).

Аналогично вышеизложенному можно осуществить процедуру оценивания и уточнения собственных чисел и функций для $n \geqslant 2$, а также для краевых условий третьего рода, смешанных и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00221, 96-01-00265).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
2. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
3. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
6. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
7. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
8. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
9. *Крылов Н.М.* Методы приближенного решения задач математической физики. Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. 150 с.
10. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
11. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
12. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с; Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
13. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
14. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
15. *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 180–191.
16. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* Accelerated convergence method in Sturm–Liouville problem // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 4. P. 517–521.
17. *Акуленко Л.Д., Шамаев А.С.* Приближенное решение некоторых возмущенных краевых задач // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 200–209.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1996