УДК 539.3:62-50

© 1997 г. Э.К. Лавровский, А.М. Формальский

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

Рассматривается однородная круглая мембрана, края которой прикреплены к массивному абсолютно твердому кольцу. В недеформированном состоянии мембрана располагается в той же плоскости, что и кольцо. Изучаются одномерные перемещения кольца с мембраной в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Исследуется вопрос о стабилизации положения системы при помощи внешней управляющей силы, действующей на кольцо вдоль этого направления. Стабилизирующее управление организовано в виде линейной обратной связи по перемещению кольца, его скорости, интегралу от перемещения и деформациям мембраны. Учитывается запаздывание в контуре управления. Исследуется устойчивость процесса управления. В пространстве коэффициентов обратной связи найдены области асимптотической устойчивости желаемого положения равновесия мембраны.

Аналогичная задача рассматривалась ранее для стержня, подверженного изгибным [1–3] или продольным и крутильным [4] деформациям. Изучалась (см., например, [5]) задача управления движениями мембраны, но в другой постановке. Рассматриваемая ниже задача может представлять интерес для проблемы стабилизации космических пленочных конструкций [6].

1. Уравнения движения. Рассмотрим круглую однородную мембрану с поверхностной плотностью ρ. Края мембраны крепятся к абсолютно твердому кольцу, масса которого M, радиус a. В невозмущенном состоянии мембраны ее поверхность лежит в плоскости, которая совпадает с плоскостью кольца. Натяжение мембраны σ считается одинаковым во всех точках деформированной и недеформированной поверхности и действует в касательной плоскости.

Будем пользоваться полярной системой координат r, θ, которую расположим в плоскости кольца с началом в его центре. Уравнения движения рассматриваемой системы и граничное условие можно записать в виде

$$\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{d^2 z}{dt^2}\right)=\sigma\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right] \tag{1.1}$$

$$M\frac{d^2 z}{dt^2}=F-\sigma\int_0^{2\pi}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} a\,d\theta \tag{1.2}$$

$$u(a,\theta,t)=0 \tag{1.3}$$

Здесь $u(r, \theta, t)$ – отклонение мембраны в момент времени t от ее невозмущенной плоской поверхности в направлении, перпендикулярном этой поверхности (в отсутствие деформаций $u(r, \theta, t) \equiv 0$), z – отклонение (перемещение) кольца от желаемого (заданного) положения в направлении, перпендикулярном его плоскости, F – управляющая сила, вектор которой перпендикулярен плоскости кольца. Уравнение (1.1) описывает колебания мембраны [7, 8] при заданном ускорении кольца. Уравнение (1.2) описывает движение кольца, второе слагаемое в его правой части – силу, действующую на кольцо со стороны мембраны.

Введем новую переменную

$$v(r,\theta,t) = u(r,\theta,t) + z(t) \tag{1.4}$$

которая характеризует полное отклонение деформированной мембраны от ее желаемого положения, а также безразмерные переменные, обозначаемые звездочками, по формулам

$$u = au^*,\quad v = av^*,\quad z = az^*,\quad r = ar^*,\quad t = \tau t^* \left(\tau^2 = \frac{\rho a^2}{\sigma}\right) \tag{1.5}$$

Подставляя соотношения (1.4), (1.5) в уравнения (1.1), (1.2) и опуская звездочки, получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \tag{1.6}$$

$$\mu \left.\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right|_{r=1} = f - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=1} d\theta \quad \left(\mu = \frac{M}{2\rho\pi a^2},\quad f = \frac{F}{2\pi\sigma a}\right) \tag{1.7}$$

В соотношении (1.7) μ и f – безразмерные масса кольца и сила, приложенная к нему. Это соотношение, полученное из уравнения (1.2) при помощи равенства

$$v(1,\theta,t) = z(t) \tag{1.8}$$

в новой краевой задаче играет роль граничного условия. Равенство (1.8) вытекает из граничного условия (1.3). Если управляющая сила f не зависит от переменной z, то последняя является циклической.

2. Управление, постановка задачи. При $f \equiv 0$ краевая задача (1.6), (1.7) имеет решение

$$v(r,\theta,t) = C\,(u(r,\theta,t) = 0,\ z = C)$$

где C – произвольная постоянная. Это решение описывает кольцо с недеформированной мембраной, отклоненное на величину $z = C$ от желаемого положения. При $C = 0$ имеем

$$v(r,\theta,t) = 0\,(u(r,\theta,t) = 0,\ z = 0) \tag{2.1}$$

Интересным представляется вопрос о синтезе управления f, обеспечивающего асимптотическую устойчивость решения (2.1) системы (1.6), (1.7). Есть, однако, основания полагать, что управлять движением только кольца недостаточно, чтобы стабилизировать положение мембраны с гашением ее упругих несимметрических колебаний. Рассмотрим поэтому случай симметричных колебаний, когда деформация мембраны u не зависит от угла θ. Уравнения (1.6), (1.7) в этом случае принимают вид

$$\ddot v(r,t) = \frac{1}{r}\left(rv'(r,t)\right)',\quad \mu\ddot v(1,t) = f - v'(1,t) \tag{2.2}$$

Точка означает дифференцирование по времени, штрих – по координате r. Равенства (2.1) переписываются так:

$$v(r,t) = 0 \quad (u(r,t) = 0,\ z = 0) \tag{2.3}$$

Управление, стабилизирующее равновесие (2.3) системы (2.2), будем строить в виде линейной обратной связи

$$T\dot{f}(t)+f(t)=-\gamma_0 v(1,t)-\gamma_1\dot{v}(1,t)-\gamma_2\int\limits_0^t v(1,\zeta)d\zeta-\sum\sigma_n v''(r_n,t) \tag{2.4}$$

Здесь $T > 0$ безразмерная постоянная времени, характеризующая запаздывание в контуре управления, γ_0, γ_1 и γ_2 – постоянные коэффициенты обратной связи по перемещению z кольца, его производной и интегралу, σ_n – коэффициент (постоянный) обратной связи по деформации мембраны при $r = r_n$. Здесь и всюду далее $n = 1, ..., N$ и суммирование ведется от $n = 1$ до $n = N$. Процесс управления начинается в момент $t = 0$. Для реализации обратной связи (2.4) необходимы позиционный датчик, датчики скорости и деформации (тензодатчики).

Линейная краевая задача (2.2), (2.4) имеет некоторый спектр собственных чисел λ. Конкретизируем задачу о стабилизации решения (2.3) системы (2.2) следующим образом. В пространстве коэффициентов обратной связи (2.4) требуется найти область значений, при которых все собственные числа λ таковы, что $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Для сравнения наряду с описанной выше будем рассматривать систему с обратной связью (2.4), состоящую из кольца с массой M и недеформируемой мембраны с массой $\rho\pi a^2$. В тех же безразмерных переменных уравнения движения этой системы, содержащей по существу только одно абсолютно твердое тело массы $M + \rho\pi a^2$, имеют вид

$$\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\ddot{z}=f,\quad T\dot{f}+f=-\gamma_0 z-\gamma_1\dot{z}-\gamma_2\int\limits_0^t z(\zeta)d\zeta \tag{2.5}$$

3. Характеристическое уравнение. Решение краевой задачи (2.2), (2.4) будем искать в виде

$$v(r,t)=Ke^{\lambda t}R(r)$$

где K – постоянная, λ – собственное число, $R(r)$ – собственная функция.

Для функции $R(r)$ получаем краевую задачу

$$\lambda^2 rR(r)=\left[rR'(r)\right]' \tag{3.1}$$

$$\left[\mu\lambda^2 R(1)+R'(1)\right](T\lambda+1)\lambda+\left(\gamma_0\lambda+\gamma_1\lambda^2+\gamma_2\right)R(1)+\lambda\sum\sigma_n R''(r_n)=0 \tag{3.2}$$

Вводя новую переменную $y = r\lambda$, можно, как известно [7, 8], функцию $R(r)$, зависящую не только от радиуса r, но и от параметра λ, представить в виде $R(y)$. Соотношения (3.1), (3.2) при этом переписываются так (нижний индекс y означает дифференцирование по аргументу y):

$$R(y)=R_{yy}(y)+\frac{1}{y}R_y(y) \tag{3.3}$$

$$\Delta(\lambda)=\left[\mu\lambda^3(T\lambda+1)+\gamma_0\lambda+\gamma_1\lambda^2+\gamma_2\right]R(\lambda)+$$
$$+\lambda^2(T\lambda+1)R_y(\lambda)+\lambda^3\sum\sigma_n R_{yy}(r_n\lambda)=0 \tag{3.4}$$

Решение уравнения Бесселя (3.3) при $R(0) = 1$, $R'(0) = 0$ представляется в виде ряда с положительными коэффициентами [8]

$$R(y)=1+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{1}{2!^2}\left(\frac{y}{2}\right)^4+\ldots+\frac{1}{k!^2}\left(\frac{y}{2}\right)^{2k}+\ldots \tag{3.5}$$

Уравнение (3.4) – искомое характеристическое уравнение системы. Соотношения (3.3), (3.4) однородны относительно функции R, поэтому условие $R(0) = 1$ не ограничивает общности рассмотрения. Характеристический квазиполином $R(\lambda)$ системы в случае неподвижного кольца описывается выражением (3.5). При $\gamma_2 = 0$ обе части равенства (3.2), а также (3.4) следует сократить на множитель λ.

Из соотношений (3.4), (3.5) следует, что $\Delta(0) = \gamma_2$. При $\lambda \to \infty$ имеем $R(\lambda) \to \infty$ и $\Delta(\lambda) \to \infty$. Поэтому при $\gamma_2 < 0$ уравнение (3.4) имеет действительный корень $\lambda > 0$ и решение (2.3) неустойчиво. Пусть $\Delta_1(\lambda) = \Delta(\lambda)/\lambda$. Тогда при $\gamma_2 = 0$ получаем $\Delta_1(0) = \gamma_0$. При $\lambda \to \infty$ имеем $\Delta_1(\lambda) \to \infty$. Поэтому при $\gamma_2 = 0$, $\gamma_0 < 0$ (положительная обратная связь) уравнение (3.4) имеет действительный корень $\lambda > 0$ и равновесие (2.3) неустойчиво. Пусть $\Delta_2(\lambda) = \Delta_1(\lambda)/\lambda$. Тогда при $\gamma_2 = \gamma_0 = 0$ получаем $\Delta_2(0) = \gamma_1$. При $\lambda \to \infty$ имеем $\Delta_2(\lambda) \to \infty$. Поэтому при $\gamma_2 = \gamma_0 = 0$, $\gamma_1 < 0$ (отрицательное демпфирование) уравнение (3.4) имеет действительный корень $\lambda > 0$ и равновесие (2.3) неустойчиво. Неравенства $\gamma_2 > 0$, $\gamma_0 > 0$ (при $\gamma_2 = 0$), $\gamma_1 > 0$ (при $\gamma_2 = \gamma_0 = 0$) представляют собой необходимые условия асимптотической устойчивости решения (2.3). Необходимые и достаточные условия устойчивости (точные области устойчивости в пространстве коэффициентов обратной связи) найдем в следующих разделах методом D-разбиений [9].

Подставим в уравнение (3.4) $\lambda = i\omega$, где ω – действительное число, и рассмотрим его вещественную и мнимую части:

$$\left[T\mu\omega^4 - \gamma_1\omega^2 + \gamma_2\right]J_0(\omega) + T\omega^3 J_1(\omega) = 0$$

$$(\gamma_0 - \mu\omega^2)\omega J_0(\omega) - \omega^2 J_1(\omega) - \omega^3 \sum \sigma_n R_{yy}(r_n i\omega) = 0 \tag{3.6}$$

Здесь $J_0(\omega) = R\,(i\omega)$, $J_1(\omega) = -iR_y(i\omega)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно.

В пространстве параметров системы соотношения (3.6) определяют образ мнимой оси $\lambda = i\omega$, $-\infty < \omega < +\infty$. Они не меняются при замене ω на $-\omega$. Поэтому границу области асимптотической устойчивости в пространстве параметров будем искать путем построения поверхности (3.6) при $0 \leqslant \omega < \infty$.

4. Области устойчивости. Будем строить области асимптотической устойчивости аналитически, переходя от частных случаев к более общим.

Пусть сначала

$$\sigma_n = 0, \ \gamma_2 = 0, \ T = 0 \tag{4.1}$$

Если $\gamma_2 = 0$, то прежде всего нужно сократить обе части равенств (3.6) на ω. Вместо (3.6) при условиях (4.1) получаются равенства

$$\gamma_1\omega J_0(\omega) = 0 \quad (\gamma_0 - \mu\omega^2)J_0(\omega) - \omega J_1(\omega) = 0 \tag{4.2}$$

При $\omega = 0$ из (4.2) получаем уравнение $\gamma_0 = 0$. Как известно [8], нули функций $J_0(\omega)$, $J_1(\omega)$ не совпадают и, более того, чередуются. Поэтому при $\omega > 0$ равенства (4.2) могут иметь место только при $\gamma_1 = 0$. Второе из уравнений (4.2) при $\omega > 0$ можно записать в виде

$$\gamma_0 = \mu\omega^2 + \zeta(\omega), \qquad \zeta(\omega) = \omega J_1(\omega) / J_0(\omega) \tag{4.3}$$

Обозначим через ω_k $(k = 1, 2, ...)$ положительные нули функции Бесселя $J_0(\omega)$, пронумерованные в порядке их возрастания. Используя дифференциальные соотношения между функциями $J_0(\omega)$ и $J_1(\omega)$, убеждаемся в том, что производная функции $\zeta(\omega)$ всегда положительна. Значит, величина (4.3) строго монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ с изменением ω от 0 до ω_1 и строго монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ с ростом ω от ω_k до ω_{k+1} $(k = 1, 2, ...)$. Таким образом, при изменении величины ω от

0 до ∞ точка (4.3) бесконечное число раз пробегает ось $\gamma_1 = 0$ от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, границы области асимптотической устойчивости, если таковая существует, принадлежат прямым $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_1 = 0$. Из сказанного в разд. 3 следует, что вне области $\gamma_0 \geqslant 0$, $\gamma_1 \geqslant 0$ уравнение (3.4) имеет такие корни λ, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Таким образом, при условии (4.1) область асимптотической устойчивости, если она существует, описывается неравенствами

$$\gamma_0 > 0, \ \ \gamma_1 > 0 \tag{4.4}$$

Оказывается, что в области (4.4), которую обозначим через D, действительно имеет место асимптотическая устойчивость.

Для доказательства используем прием, изложенный в [1, 2, 4, 10, 11]. Умножим обе части уравнения (3.1) на сопряженную функцию $\overline{R}(r)$ и проинтегрируем его в пределах от 0 до 1. Используя граничные условия (3.2) и условие $R'(0) = 0$, получаем

$$\lambda^2\left[\int_0^1 rR(r)\overline{R}(r)dr + \mu R(1)\overline{R}(1)\right] + \lambda\gamma_1 R(1)\overline{R}(1) +$$

$$+\gamma_0 R(1)\overline{R}(1) + \int_0^1 rR'(r)\overline{R}'(r)dr = 0$$

В области (4.4) коэффициенты полученного квадратного относительно λ уравнения неотрицательны. Поэтому в ней все собственные значения λ таковы, что $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Поскольку $\operatorname{Re}\lambda = 0$ только на границе области (4.4), то внутри нее все собственные значения λ таковы, что $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Область асимптотической устойчивости равновесного режима $z(t) \equiv 0$ системы (2.5) в случае $\gamma_2 = T = 0$ также описывается неравенствами (4.4). Следовательно, в этом случае "податливость" мембраны не оказывает влияния на область устойчивости.

Пусть теперь $T > 0$ и рассмотрим более общий, нежели (4.1), случай, когда

$$\sigma_n = 0, \ \ \gamma_2 = 0 \tag{4.5}$$

Сокращая уравнения (3.6) на множитель ω и полагая $\omega = 0$, а затем $\omega > 0$, получаем, что граница области устойчивости состоит из участков прямой $\gamma_0 = 0$ и прямой

$$\gamma_0 = \mu\omega^2 + \zeta(\omega), \quad \gamma_1 = \mu T\omega^2 + T\zeta(\omega) \ \ (0 \leqslant \omega < \infty) \tag{4.6}$$

Параметрические уравнения (4.6) описывают прямую, поскольку из них вытекает, что

$$\gamma_1 = T\gamma_0 \tag{4.7}$$

При изменении величины ω от 0 до $+\infty$ точка (4.6) бесконечное число раз пробегает всю прямую (4.7).

Обозначим через $D(T)$ (фиг. 1) область, описываемую неравенствами

$$\gamma_0 > 0, \ \ \gamma_1 > T\gamma_0 \tag{4.8}$$

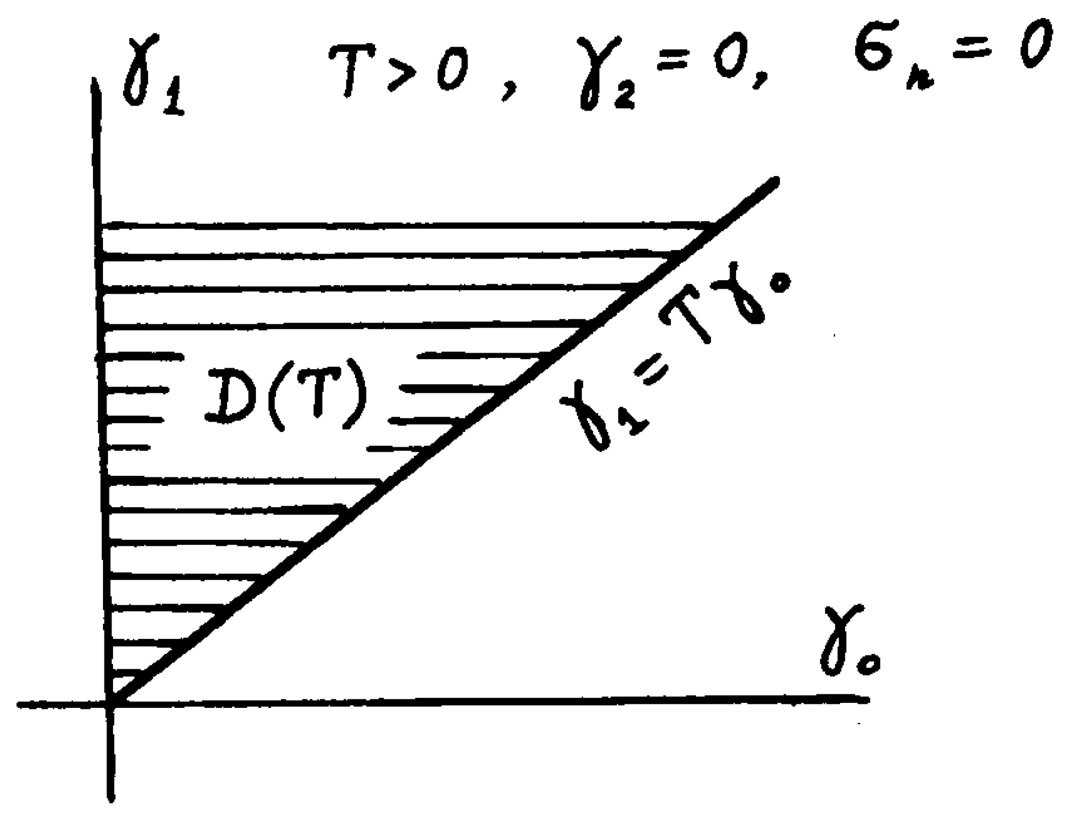
При $\gamma_0, \gamma_1 \in D(T)$ все собственные значения λ таковы, что $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, поскольку $\operatorname{Re}\lambda = 0$ только при $\gamma_0 = 0$ или $\gamma_1 = T\gamma_0$. Построим множество $D(T)$ в пространстве трех параметров γ_0, γ_1, T при $0 < T < \infty$. Собственные значения λ непрерывно зависят от T. При $T \to 0$ имеем $D(T) \to D$, где D – область асимптотической устойчивости (4.4) в случае (4.1). Отсюда вытекает, что в случае (4.5) решение (2.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $\gamma_0, \gamma_1 \in D(T)$.

С помощью условий Гурвица получаем, что область асимптотической устойчивости равновесия $z(t) \equiv 0$ системы (2.5) в случае $\gamma_2 = 0$ также описывается неравенствами (4.8). Следовательно, в этом случае, как и в случае $\gamma_2 = T = 0$, "податливость" мембраны не влияет на область устойчивости.

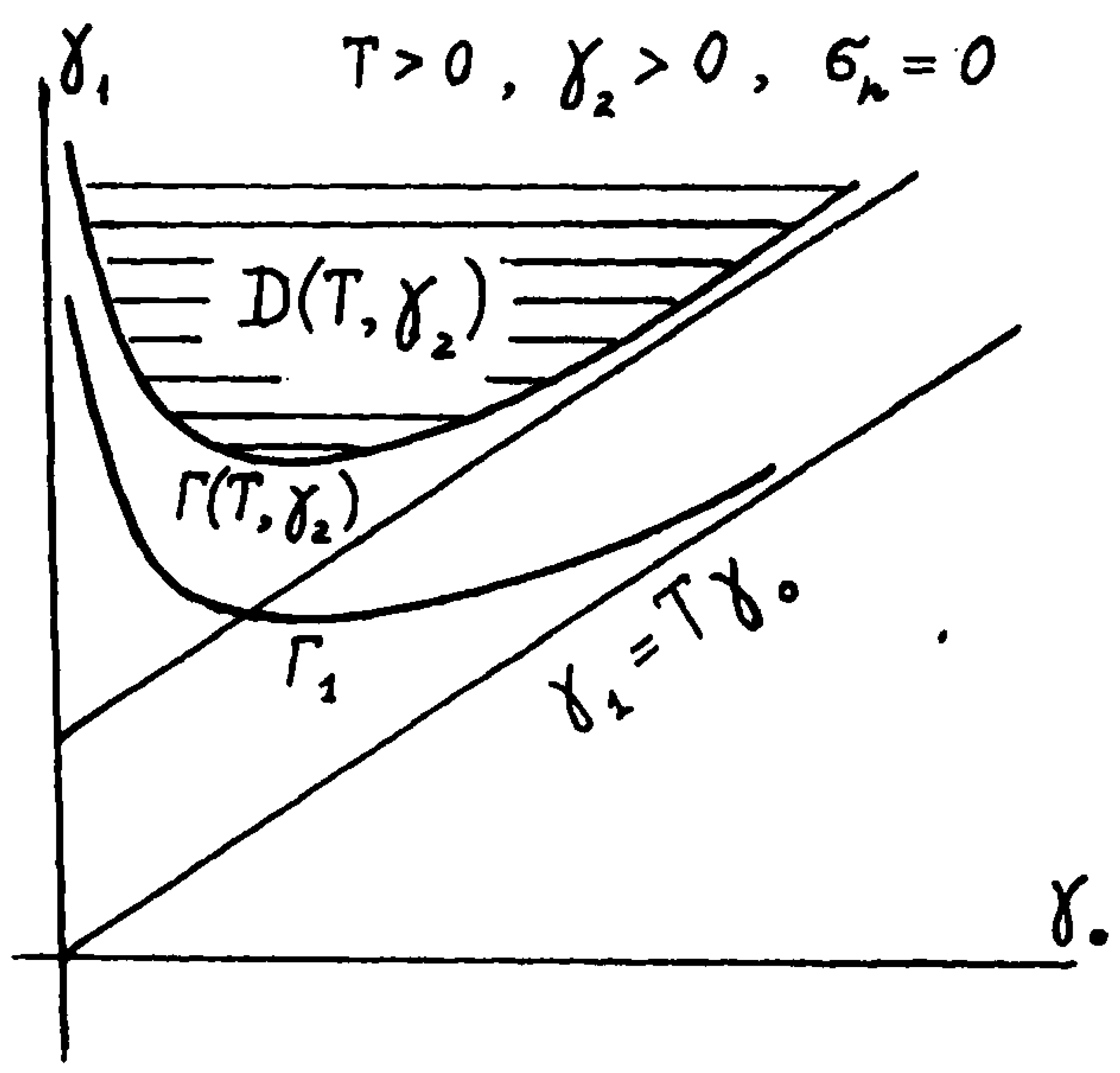
Пусть теперь $T > 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, и рассмотрим более общий, нежели (4.5), случай, когда только

$$\sigma_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{4.9}$$

В разд. 3 было показано, что при $\gamma_2 < 0$ решение (2.3) системы (2.2), (2.4) неустойчиво. Поэтому будем считать, что $\gamma_2 > 0$. Выберем некоторую величину $\gamma_2 > 0$ и



Фиг. 1



Фиг. 2

построим область устойчивости $D(T, \gamma_2)$ в плоскости коэффициентов γ_0, γ_1. Видно, что граница $\Gamma(T, \gamma_2)$ области $D(T, \gamma_2)$ описывается параметрическими уравнениями, отличающимися от уравнений (4.6) наличием во втором из них дополнительного слагаемого γ_2/ω^2; кроме того, в этом случае $0 < \omega < \omega_1$. При $\omega \to 0$ кривая $\Gamma(T, \gamma_2)$ асимптотически приближается к оси $\gamma_0 = 0$, а при $\omega \to \omega_1$ – к прямой

$$\gamma_1 = T\gamma_0 + \gamma_2 / \omega_1^2$$

которая параллельна прямой (4.7) и находится выше нее.

Обозначим через $E(T, \gamma_2)$ область асимптотической устойчивости равновесия $z(t) \equiv 0$ системы (2.5). С помощью условий Гурвица получаем, что область $E(T, \gamma_2)$ ограничена ветвью гиперболы

$$\gamma_0(\gamma_1 - T\gamma_0) - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\gamma_2 = 0 \qquad (\gamma_0 > 0,\ \gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0) \tag{4.10}$$

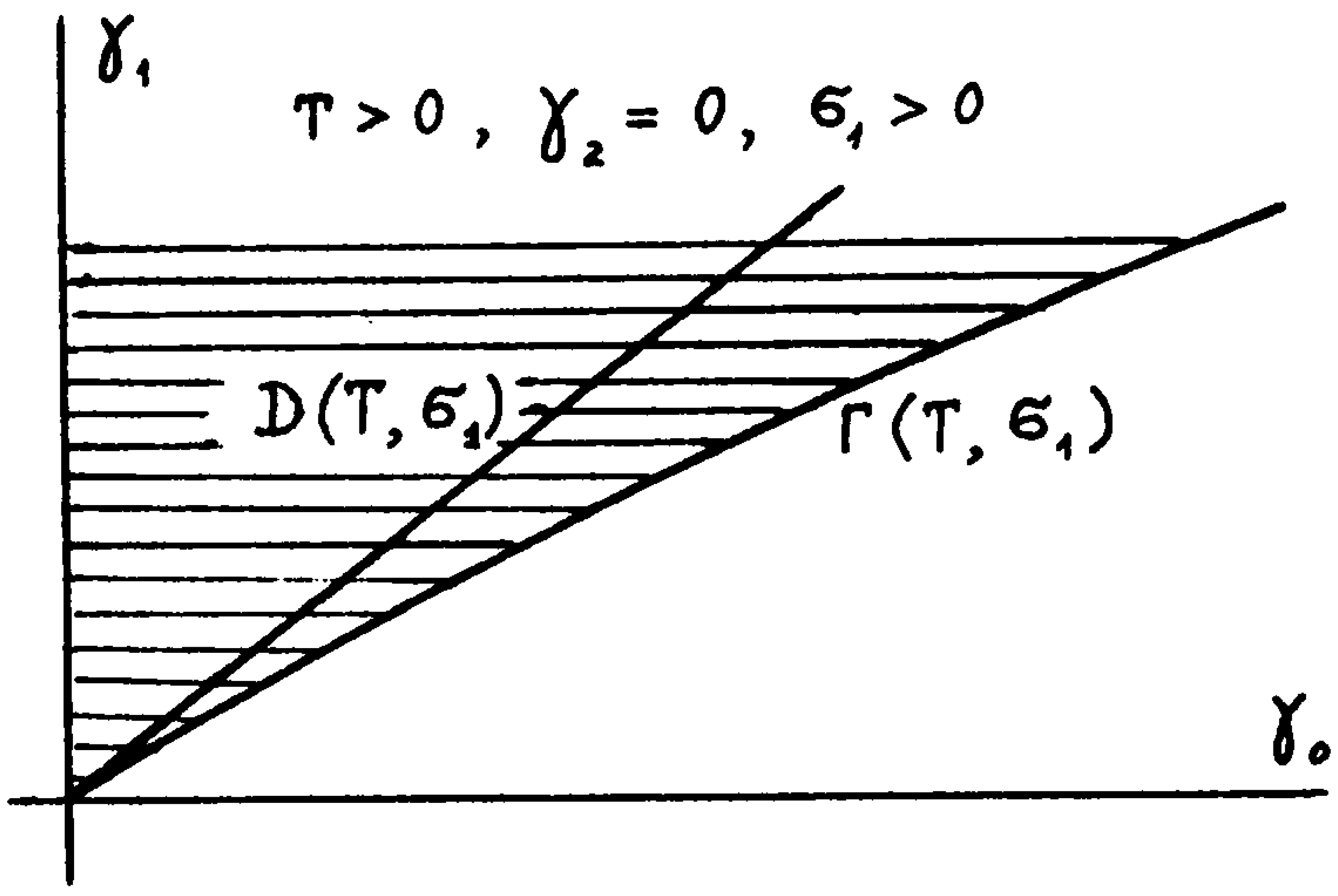
Асимптотами этой гиперболы являются ось $\gamma_0 = 0$ и прямая (4.7).

Подставим функции $\gamma_0(\omega)$ и $\gamma_1(\omega)$ из уравнения границы $\Gamma(T, \gamma_2)$ в левую часть уравнения (4.10). Пользуясь дифференциальными соотношениями между функциями Бесселя, можно показать, что полученная при этой подстановке функция положительна при $0 < \omega < \omega_1$. Она стремится к нулю при $\omega \to 0$ и к бесконечности при $\omega \to \omega_1$. Таким образом, граница $\Gamma(T, \gamma_2)$ располагается выше границы Γ_1 (4.10), а область $D(T, \gamma_2)$ лежит целиком внутри области $E(T, \gamma_2)$ (фиг. 2). То есть в отличие от двух рассмотренных выше случаев (4.1) и (4.5) в случае (4.9) область устойчивости для податливой мембраны меньше, нежели для абсолютно твердой.

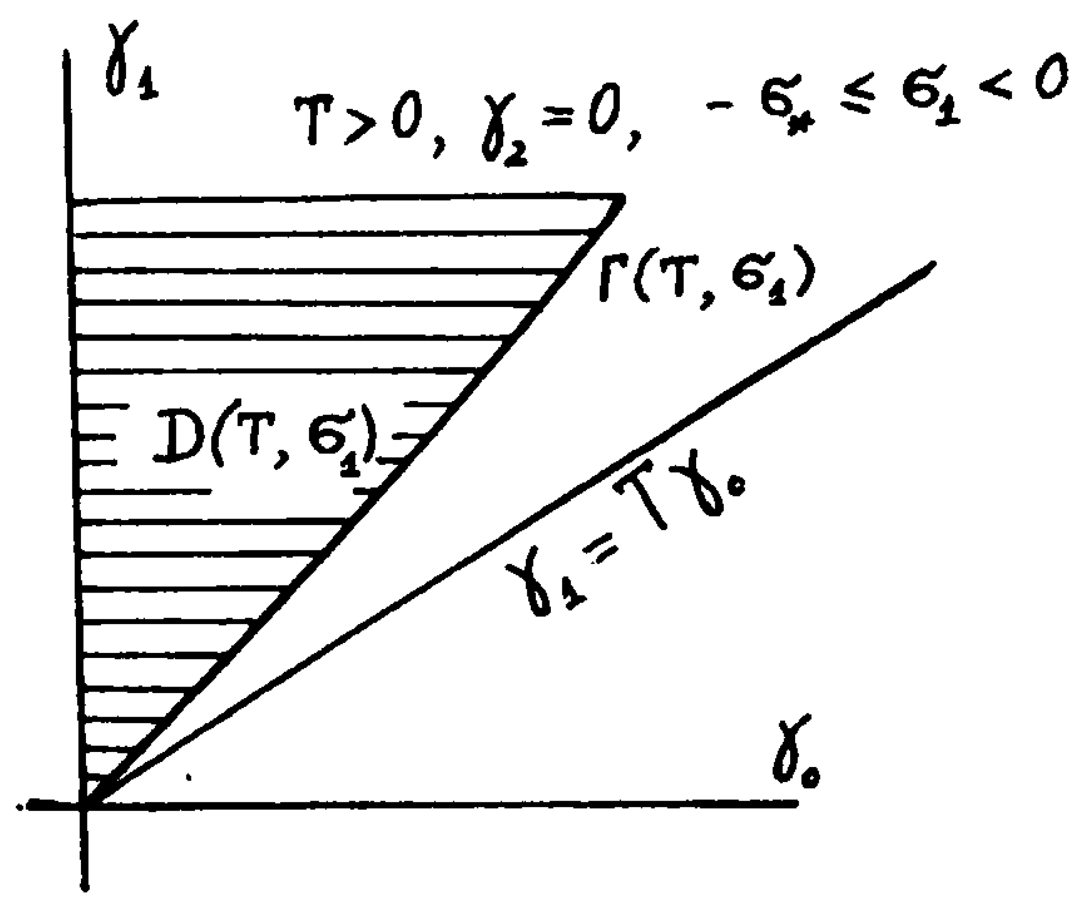
5. Область устойчивости при наличии тензодатчиков. Рассмотрим более общий, нежели (4.9), случай, когда

$$\sigma_1 \neq 0, \quad r_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \ldots = \sigma_n = 0 \tag{5.1}$$

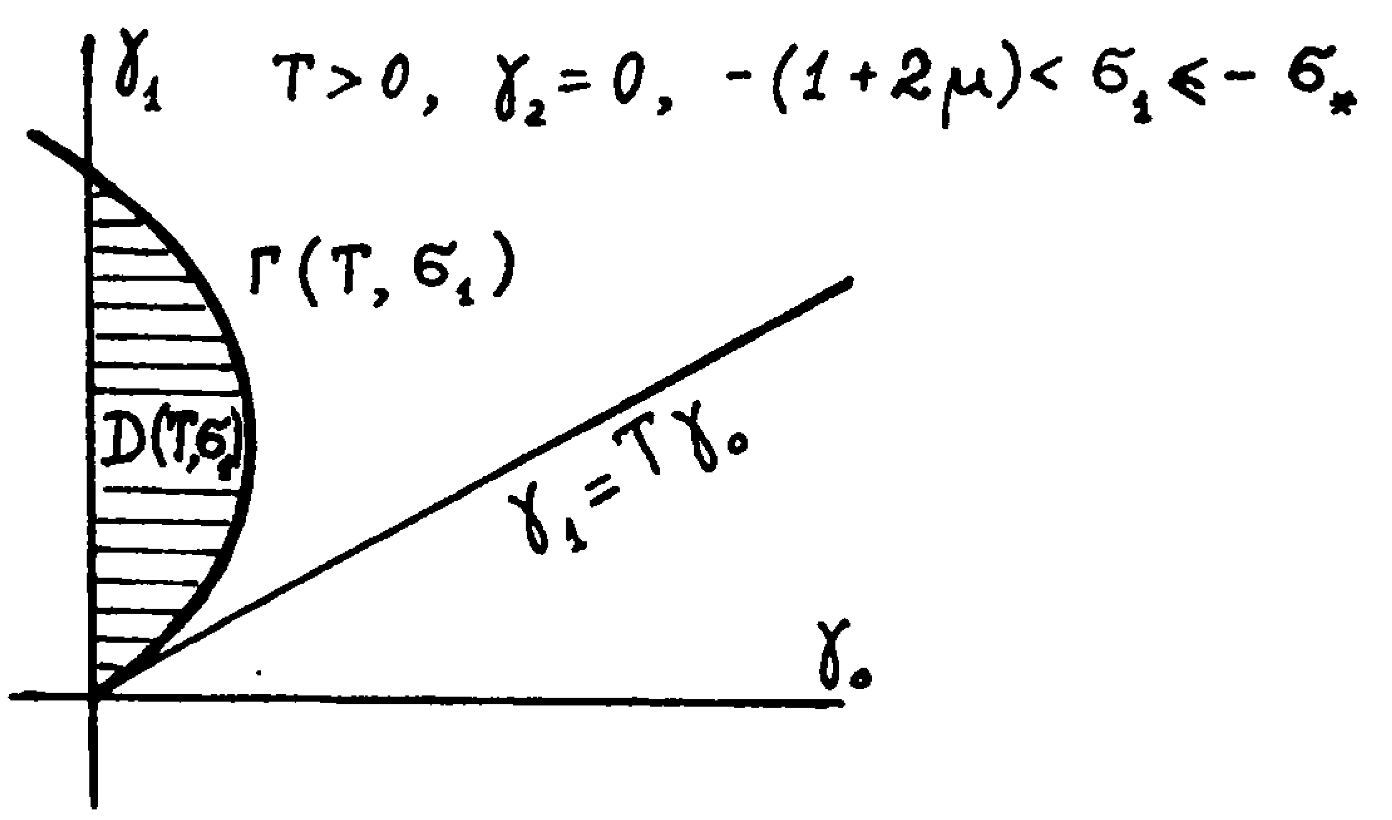
Последнее слагаемое в левой части уравнения (3.4) при этом имеет вид $\lambda^3\sigma_1 / 2$.



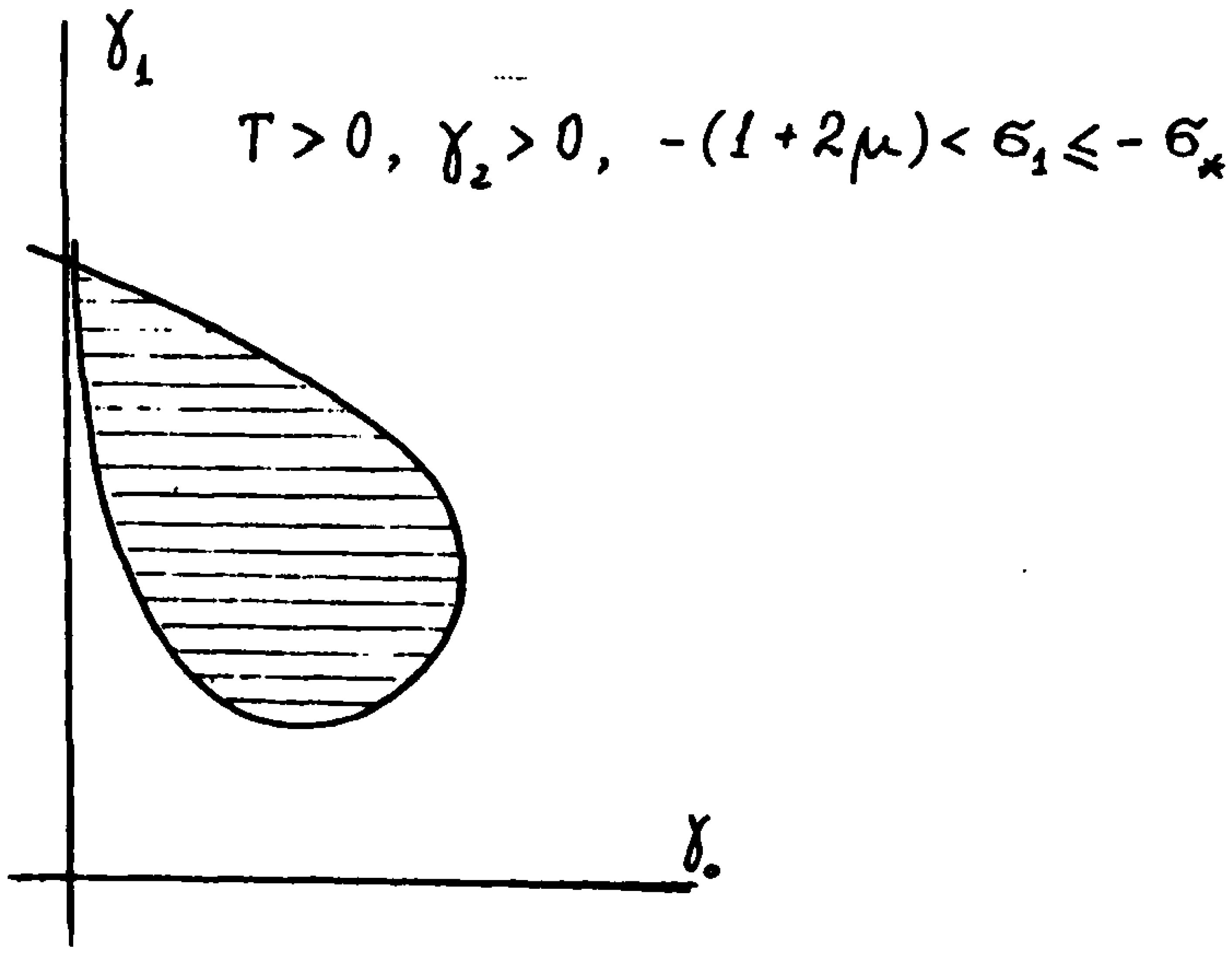
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Пусть $\Delta_3(\lambda) = \Delta(\lambda)/\lambda^3$. Тогда при $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ получаем $\Delta_3(0) = \mu + (\sigma_1 + 1)/2$. При $\lambda \to \infty$ имеем $\Delta_3(\lambda) \to \infty$. Поэтому при $\sigma_1 < -(1 + 2\mu)$ в точке $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ уравнение (3.4) имеет действительный корень $\lambda > 0$ и равновесие (2.3) неустойчиво. Так же обстоит дело при $\sigma_1 < -(1+2\mu)$ и в малой окрестности точки $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Пусть кроме условия (5.1) имеет место сначала также условие

$$\gamma_2 = 0 \tag{5.2}$$

Обозначим через $D(T, \sigma_1)$ расположенное в полуплоскости $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ множество, ограниченное полуосью $\gamma_0 = 0, \gamma_1 > 0$ и кривой $\Gamma(T, \sigma_1)$, которая при постоянных значениях $T > 0, \sigma_1$ описывается параметрическими уравнениями (параметр $\omega \subset (0, \omega_1)$), отличающимися от уравнений (4.6) наличием в первом из них дополнительного слагаемого $\sigma_1\omega^2/(2J_0(\omega))$. Поскольку $\gamma_1(\omega) > 0$ и $\gamma_1(\omega) \to \infty$ при $\omega \to \omega_1$, кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$ располагается в верхней полуплоскости плоскости (γ_0, γ_1) и не ограничена. Кроме того, функция $\gamma_1(\omega)$ строго монотонно растет с ростом ω от 0 до ω_1, поэтому кривая $\Gamma(T,\sigma_1)$ не имеем самопересечений.

При $\sigma_1 \to 0$ имеем $D(T, \sigma_1) \to D(T)$, поскольку кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$ при $\sigma_1 \to 0$ стремится к прямой (4.7). Напомним, что $D(T)$ – область асимптотической устойчивости (4.8) в случае (4.5). Поэтому при коэффициентах σ_1, близких к нулю, множество $D(T, \sigma_1)$, и только оно, будет областью асимптотической устойчивости системы при условиях (5.1), (5.2). При $\sigma_1 > 0$ величина $\gamma_0(\omega)$ из уравнения кривой $\Gamma(T, \sigma_1)$ с ростом значения ω от 0 до ω_1 строго монотонно растет от нуля до ∞, кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$ при этом располагается ниже прямой (4.7). С ростом σ_1 кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$, оставаясь в первом квадранте, "опускается все ниже и ниже", приближаясь к полуоси $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 = 0$. С ростом коэффициента σ_1 от 0 до ∞ множество $D(T, \sigma_1)$ (фиг. 3), оставаясь областью устойчивости, непрерывно растет и при $\sigma_1 \to \infty$ стремится к области D (4.4), которая является областью устойчивости как для абсолютно твердой, так и упругой мембраны в случае (4.1). Таким образом, область асимптотической устойчивости можно увеличить, вводя в обратную связь сигналы о деформации. Несмотря на наличие запаздывания T в контуре управления, эту область можно довести "почти" до области D, в которой имеет место устойчивость при $T = 0$.

Выше показано, что область устойчивости системы при управлении (2.4) принадлежит полуплоскости $\gamma_0 > 0$. При $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 < 0$ характеристическое уравнение имеет собственное значение $\lambda > 0$. Кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$ располагается в верхней полуплоскости плоскости (γ_0, γ_1). Из сказанного вытекает, что область устойчивости, если таковая существует, принадлежит первому квадранту, т.е. области D (4.4), независимо от значений σ_n, r_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Другими словами, D – максимально возможная область устойчивости.

Если $\sigma_1 < -(1+2\mu)$, то кривая $\Gamma(T, \sigma_1)$, начинаясь при $\omega = 0$ из точки $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, располагается, как можно показать, целиком во втором квадранте. Поскольку при $\gamma_2 = 0$ и значениях γ_0, γ_1, близких к нулю, уравнение (3.4) имеет корень $\lambda > 0$, система неустойчива во всех точках γ_0, γ_1. Отсюда вытекает, что необходимым условием устойчивости равновесия (2.3) является неравенство

$$\sigma_1 > -(1+2\mu) \tag{5.3}$$

Из таблиц для функций Бесселя [8] следует, что $(1+2\mu) > 2J_1(\omega_1)/\omega_1$. Поэтому величина σ_1, удовлетворяющая неравенству

$$-\sigma_* < \sigma_1 < 0, \quad \sigma_* = 2J_1(\omega_1)/\omega_1 \tag{5.4}$$

удовлетворяет также неравенству (5.3). Можно показать, что при условии (5.4) величина $\gamma_0(\omega)$ из уравнения кривой $\Gamma(T, \sigma_1)$ с ростом значения ω от 0 до ω_1 строго монотонно растет. При этом она ограничена, если $\sigma_1 = -\sigma_*$, и не ограничена в противном случае. Поэтому при условии (5.4) область D (T, σ_1) не ограничена, вместе с тем D $(T, \sigma_1) \subset D(T)$ (фиг. 4).

Если

$$-(1+2\mu) < \sigma_1 \leqslant -\sigma_* \tag{5.5}$$

то функция $\gamma_0(\omega)$ положительна при малых значениях ω, на интервале $(0, \omega_1)$ один раз обращается в нуль и $\gamma_0(\omega) \to -\infty$ при $\omega \to \omega_1$. Отсюда получаем, что при условии (5.5) область устойчивости D (T, σ_1), расположенная в первом квадранте, ограничена (фиг. 5). С уменьшением величины σ_1 от 0 до $-(1+2\mu)$ область устойчивости $D(T, \sigma_1)$ непрерывно и строго монотонно уменьшается и стягивается к пустому множеству.

Поскольку область устойчивости системы при управлении (2.4) принадлежит максимально возможной области D и D $(T, \sigma_1) \to D$ при $\sigma_1 \to \infty$, то установка тензодатчиков не только в центре мембраны, но и в других ее точках не может привести к расширению области устойчивости.

Для ликвидации статической ошибки в регулируемой системе в обратную связь обычно вводят интегральный член. При этом $\gamma_2 \neq 0$. Выше показано, что устойчивость может иметь место только при условии $\gamma_2 > 0$. Уравнения границы области устойчивости в этом случае отличаются от рассмотренных в этом разделе наличием во втором из уравнений типа (4.6) дополнительного слагаемого γ_2/ω^2. С помощью этих уравнений можно выяснить структуру области устойчивости. При $\sigma_1 > 0$, а также при условии (5.4) эта область не ограничена и похожа на область, показанную на фиг. 2, а при условии (5.5) ограничена и напоминает "каплю" (фиг. 6). Неравенство (5.3) остается необходимым условием устойчивости и при $\gamma_2 \neq 0$.

Полученные выше уравнения границ областей устойчивости могут быть использованы для численного построения этих областей при конкретных значениях параметров системы.

Интересно, что структура найденных областей устойчивости, с качественной точки зрения, оказывается такой же, как и в [1–4], хотя здесь рассматривается задача стабилизации упругой мембраны, а в [1–4] – упругого стержня. В то же время формулы, описывающие границы областей устойчивости для мембраны и для стержня, конечно, не совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* О стабилизации углового положения упругого стержня // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 6. С. 115–123.
2. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* Стабилизация заданной позиции упругого стержня // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 752–760.
3. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* Управление упругим звеном манипулятора при помощи обратной связи по положению и скорости груза // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 51–60.
4. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* Устойчивость процесса управления стержнем при наличии продольных или крутильных деформаций // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6. С. 203–214.
5. *Акуленко Л.Д.* Управление движениями мембраны посредством граничных силовых воздействий // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 731–741.
6. *Гуляев В.И., Кошелев В.А., Лизунов П.П., Мельников В.М., Гром А.А., Мирчевский А.В.* Динамика космического пленочного отражателя при программных движениях несущего тела // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 6. С. 99–107.
7. *Лэмб Г.* Динамическая теория звука. М.: Физматгиз, 1960. 372 с.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967, 444 с.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.II.1995