УДК (531.36 + 539.3)62-50

© 1997 г. И.В. Бурков, Л.Б. Фрейдович

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЕ С ИЗМЕРЕНИЕМ И БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ

Рассматривается задача позиционирования лагранжевой системы с упругими связями между свободными и управляемыми степенями свободы. Уравнения движения такой системы описывают, в частности, динамику робота-манипулятора с упругими сочленениями. Предлагаемые законы управления позволяют учесть ограничения на величину управляющего воздействия. Рассматривается, в частности, ситуация, когда скорости не доступны измерению. Анализ предложенных законов управления основывается на прямом методе Ляпунова, более подробно – на теореме Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости в целом. В доказательстве использован оригинальный способ проверки положительной определенности вспомогательной нелинейной функции, аналогичной полной механической энергии замкнутой управлением системы.

Постановка задачи. Рассматривается лагранжева динамическая система с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot q_1^T D(q_1)\dot q_1 + \dot q_2^T J \dot q_2 + (q_1 - q_2)^T K(q_1 - q_2)) + U(q_1)$$

Здесь q_1 и q_2 – n-мерные векторы, представляющие собой две группы обобщенных координат системы, $D(q_1)$ – положительно-определенная (nxn)-матрица, J и K – постоянные диагональные матрицы с положительными диагональными элементами. Кроме того, обобщенным координатам q_2 соответствует вектор u управляющих сил. Такая система, в частности, моделирует динамику n-звенного электромеханического манипулятора при учете упругости его шарниров. В этом случае q_1 – вектор углов между звеньями робота, q_2 – вектор углов поворота выходных валов электроприводов относительно соответствующих несущих звеньев, D – матрица кинетической энергии манипулятора, J – матрица кинетической энергии привода, K – матрица жесткостей выходных валов приводов, $U(q_1)$ – потенциальная энергия манипулятора в поле сил тяжести, u – вектор управляющих моментов, приложенных к роторам электродвигателей.

Система может быть записана в виде двух векторных дифференциальных уравнений [1, 2]

$$D(q_1)\ddot q_1 + C(q_1, \dot q_1)\dot q_1 + K(q_1 - q_2) + g(q_1) = 0 \tag{1.1}$$

$$J\ddot q_2 + K(q_2 - q_1) = u \tag{1.2}$$

Вектор $g(q_1)$ определяется моментами сил тяжести, а $C(q_1, \dot{q}_1)\dot{q}_1$ – вектор центробежных и кориолисовых сил. Заметим, что, как известно (см., например, [3]),

$$\dot{q}_1^T[\dot{D}(q_1) - 2C(q_1, \dot{q}_1)]\dot{q}_1 = 0 \tag{1.3}$$

Обозначим за q_{1d} желаемое (программное) положение звеньев.

Для произвольного вектора $x = [x_1,..., x_n]^T \in R^n$ можно определить его норму: $\|x\| = \max_i |x_i|$, тогда соответствующая ей норма матрицы $B = [b_{ij}]_{i,j=1,2,...,n}$ такова: $\|B\| = \max_i \sum_j |b_{ij}|$ и $\|K\| = \|\mathrm{diag}\{k_i\}_{i=1}^n\| = \max_i |k_i| = \max_i k_i$.

Выполняются известные свойства: $\|Bx\| \leqslant \|B\| \, \|x\|$; если существует B^{-1}, то $\|Bx\| \geqslant \|B^{-1}\|^{-1}\|x\|$; $\|B_1 + B_2\| \leqslant \|B_1\| + \|B_2\|$; $\|B_1B_2\| \leqslant \|B_1\| \, \|B_2\|$; $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ для любых $x_1, x_2 \in R^n$; $B_1, B_2 \in R^{n\times n}$.

В дальнейшем используются также обозначения: $\lambda_{\max}(B)$ и $\lambda_{\min}(B)$ для максимального и минимального собственных чисел матрицы $B \in R^{n\times n}$. Тогда

$$\|K\| = \lambda_{\max}(K) = \max_i k_i; \quad \|K^{-1}\|^{-1} = \lambda_{\min}(K) = \min_i k_i$$

Предположим что существуют $\alpha > 0$ и $A > 0$, такие, что

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant \alpha \|x - y\|, \quad \forall x, y \in R^n \tag{1.4}$$

или

$$\|\partial g(q_1)/\partial q_1\| \leqslant \alpha, \quad \forall q_1 \in R^n; \quad \|g(q_1)\| \leqslant A, \quad \forall q_1 \in R^n \tag{1.5}$$

Это предположение соблюдается для манипуляторов с вращательными степенями подвижности.

Закон управления u будет строиться в соответствии с доступной измерению информацией. В разд. 2 предполагаются доступными измерению положения q_2 и их скорости $\dot{q}_2$. В разд. 3 рассматривается закон управления, основывающийся на измерении только угловых положений q_2.

Необходимость такой постановки вызвана тем, что иногда установка на механическую систему тахометров довольно дорогостоящая. И кроме того, как известно, датчики скорости, обычно выдают менее достоверную, т.е. более зашумленную информацию. Интересно отметить, что удается доказать асимптотическую устойчивость в целом системы (1.1), (1.2), замкнутой основывающимся на измерении только углов управлением, несмотря на то, что в системе не учтено естественное трение.

Важно, что предлагаемые законы управления содержат функции, удовлетворяющие условиям, позволяющим сделать управление ограниченным заранее известной величиной. Для практического использования предлагаемых законов управления существен учет того обстоятельства, что любая используемая для управления система усилитель – двигатель не может развивать момент, превышающий некоторый фиксированный (вследствие наличия насыщения в выходной характеристике преобразователя мощности).

Во многих работах (например [1, 3, 4, 5]) ограничения на управление не учтены. Вводилось ограничение только на часть управления [6]. Предлагалось полностью ограниченное управление, но для случая лагранжевой системы без упругих элементов [7]; такая математическая модель позволяет полностью скомпенсировать силы тяжести (как и было сделано [7]), но является менее общей, чем используемая ниже (предложенная в [1, 2]) модель (1.1), (1.2). Жесткая модель не позволяет учесть возникающие в системе упругие колебания, мешающие точной установке координат q_1.

Перед изложением основных результатов и конкретизацией законов управления следует определить условия, которым должны удовлетворять используемые в этих законах функции $F(x)=[F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)]^T$; $F_i(x_i)$ – непрерывные, строго возрастающие функции, обращающиеся в нуль при нулевом значении аргумента, такие, что существуют положительные константы β_1,β_2,γ_1 и γ_2 со следующими свойствами:

$$\|F(x)\|\geqslant \gamma_1\|x\|, \text{ если } \|x\|\leqslant \beta_1 \tag{1.6}$$

$$\|\partial F(x)/\partial x\|\geqslant \gamma_2, \text{ если } \|x\|\leqslant \beta_2 \tag{1.7}$$

$$\|F(x)\|\geqslant \beta_1\gamma_1, \text{ если } \|x\|\geqslant \beta_1 \tag{1.8}$$

Предположим также, для простоты, что

$$F(x)=-F(-x) \tag{1.9}$$

Пусть, кроме того, $\beta_1=\beta_2=\beta>0$; $F_i(x_i)$ могут быть выбраны неограниченными, например

$$F_i(x_i)=\gamma x_i,\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma,\quad \beta_1 \text{ и } \beta_2 \text{ – любые числа} \tag{1.10}$$

или

$$F_i(x_i)=\begin{cases}\gamma x_i, & |x_i|\leqslant\beta\\ \gamma\beta+\varepsilon(x_i-\beta), & x_i>\beta\\ -\gamma\beta+\varepsilon(x_i+\beta), & x_i<-\beta\end{cases} \tag{1.11}$$

$$\beta_1=\beta_2=\beta,\quad \gamma_1=\gamma_2=\gamma,\quad \varepsilon>0$$

или ограниченными, например

$$F_i(x_i)=\frac{\beta\gamma}{\operatorname{arctg}\beta}\operatorname{arctg}x \tag{1.12}$$

$$\beta_1=\beta_2=\beta,\quad \gamma_1=\gamma,\quad \gamma_2=\frac{\beta\gamma}{(1+\beta^2)\operatorname{arctg}\beta}$$

Первый пример (1.10) представляет идеальную характеристику усилителя, другие два ((1.11) и (1.12)) – менее идеализированные его модели. Наиболее интересен пример (1.12), так как в нем

$$|F_i(x_i)|\leqslant\frac{\beta\gamma}{\operatorname{arctg}\beta}\frac{\pi}{2}=\text{const.}$$

Теперь можно приступить к определению законов управления и анализу их в смысле устойчивости.

2. Асимптотическая стабилизация системы при доступности измерению обобщенных скоростей $\dot q_2$. Предлагается следующий закон управления:

$$u=F(-(q_2-q_{2d})-K_v\dot q_2)+g_d\quad (g_d=g(q_{1d})) \tag{2.1}$$

где $F(x)$ – определенная в конце разд. 1 вектор-функция, удовлетворяющая условиям (1.6)–(1.9) с некоторыми положительными γ_1, γ_2 и β, выбор которых поясняется ниже и физически будет означать преобладание моментов управления над моментами сил тяжести; K_v – некоторая положительно-определенная диагональная матрица; q_{2d} – вектор, опредедяющий фиксированное желаемое положение координат q_2, который рассчитывается по желаемому положению координат q_1 следующим образом:

$$q_{2d}=q_{1d}+K^{-1}g_d \tag{2.2}$$

Итак, из всей динамической модели предполагаются известными жесткости и вектор, определяющий моменты гравитационных сил в желаемом положении. При этом доступными измерению предполагаются только $2n$ из $4n$ фазовых координат системы (1.1), (1.2).

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&q_{12} = -q_{21} = q_1 - q_2, \quad q_{12d} = -q_{21d} = q_{1d} - q_{2d} \\
&x = q_1 - q_{1d}, \quad y = q_2 - q_{2d} \\
&\Delta g(x) = g(x + q_{1d}) - g_d
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Утверждение 2.1. Если коэффициенты β_1 и γ_1 в (1.6) и (1.8) выбраны с учетом (1.4), (1.5) так, что

$$
\gamma_1 > \alpha(1 - \alpha \| K^{-1} \|)^{-1} > 0, \quad \gamma_1 \beta_1 > A + \| g_d \| \tag{2.4}
$$

то положение равновесия замкнутой системы (1.1), (1.2), (2.1) единственно и совпадает с желаемым: $q_1 = q_{1d}$, $q_2 = q_{2d}$ из (2.2).

Доказательство. Положение равновесия определяется системой

$$
g(q_1) = Kq_{21}, \quad Kq_{21} = F(-y) + g_d \tag{2.5}
$$

При учете соотношения (2.2) систему (2.5) можно переписать в виде

$$
\Delta g(x) = K(y - x), \quad K(y - x) = F(-y) \tag{2.6}
$$

Уравнения (2.5) выполнены тогда и только тогда, когда

$$
y = X, \quad \Delta g(x) = F(-X) \quad (X = x + K^{-1} \Delta g(x)) \tag{2.7}
$$

Второе соотношение (2.7) справедливо для некоторого x, только если

$$
\| \Delta g(x) \| = \| F(-X) \| \tag{2.8}
$$

Если $\|X\| \leqslant \beta_1$, то вследствие (1.6), (1.4)

$$
\| F(-X) \| \geqslant \gamma_1 \| X \| \geqslant \gamma_1 (\|x\| - \|K^{-1}\| \; \|\Delta g(x)\|) \geqslant \gamma_1 (1 - \alpha \| K^{-1} \|) \|x\|
$$

С другой стороны, в силу (1.4): $\|\Delta g(x)\| \leqslant \alpha \|x\|$. Тогда для выполнения равенства (2.8) необходимо $\alpha \|x\| \geqslant \gamma_1 (1 - \alpha \|K^{-1}\|) \|x\|$, но при учете первого неравенства (2.4) это возможно лишь при $\|x\| = 0$.

Если $\|X\| \geqslant \beta_1$, то вследствие (1.8) и $\|F(-X)\| \geqslant \beta_1 \gamma_1$, а из (1.5) следует, что $\|\Delta g(x)\| \leqslant \|g_d\| + A$, тогда для выполнения условия (2.8) необходимо $\|g_d\| + A \geqslant \beta_1 \gamma_1$, что невозможно ввиду выполнения второго соотношения (2.4).

Таким образом, условие (2.7) выполнено, лишь если $\|x\| = 0$, т.е. $x = 0$. Тогда из первого равенства (2.7) получим $y = 0$. Это означает, что соотношения (2.6) выполнены лишь при $x = 0, y = 0$.

Заметим, что моменты сил тяжести могут быть выражены через потенциальную энергию $U(q_1)$ по формуле

$$
g(q_1) = [g_1(q_1), \dots, g_n(q_1)]^T = \partial U / \partial q_1 = [\partial U / \partial q_{l_1}, \dots, \partial U q_{1_n}]^T
$$

По определению

$$
\int_0^y F^T(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{y_i} F_i(\eta_i) d\eta_i
$$

Рассмотрим функцию

$$
P(q_1, q_2) = \frac{1}{2} q_{12}^T K q_{12} - \frac{1}{2} q_{12d}^T K q_{12d} + U(q_1) - U_d + (q_{2d} - q_2)^T g_d + \int_0^{q_{2d} - q_2} F^T(\eta) d\eta \tag{2.9}
$$

где обозначено: $U_d = U(q_{1d})$.

Кроме последнего слагаемого, взятого по аналогии с выбранными ранее [7], $P(q_1, q_2)$ состоит из потенциалов сил, действующих в замкнутой системе (1.1), (1.2), (2.1). Учитывая соотношение (2.2), (2.9) можно привести к виду

$$P=\frac{1}{2}(x-y)^T K(x-y)+U(x+q_d)-U_d+x^T g_d+\int_0^{-y} F^T(\eta)d\eta$$

Если $F(\eta)$ взять в виде вектора функций (1.10), то приведенная функция P совпадает с рассмотренной ранее [4].

Утверждение 2.2. При выполнении неравенств (2.4) функция $P(q_1, q_2)$ обладает следующими свойствами.

1°. $P(q_1, q_2)$ имеет единственную стационарную точку $S: q_1 = q_{1d}, q_2 = q_{2d}$.

2°. Если

$$\lambda_{\min}(K)>\delta\alpha \quad \text{и} \quad \gamma_2>\delta\alpha \qquad \left(\delta=\lambda_{\max}\left(\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \tag{2.10}$$

где α из (1.4), γ_2 из (1.7), то в β_2-окрестности точки S функция $P(q_1, q_2)$ выпукла, а значит, S – точка локального минимума.

3°. $P(q_1,q_2)\to+\infty$ при $\|[q_1^T,q_2^T]^T\|\to+\infty$.

4°. $P(q_1,q_2)>P(q_{1d},q_{2d})=0$ при любых $(q_1,q_2)\neq(q_{1d},q_{2d})$, т.е. S – точка глобального минимума.

Доказательство. 1°. Надо заметить, что условие стационарности: $\partial P/\partial q_1=0$, $\partial P/\partial q_2=0$, сразу приводит к системе (2.5) и можно воспользоваться результатом утверждения 2.1.

2°. Требуется рассмотреть окрестность $\|x\|\leqslant\beta_2$, $\|y\|\leqslant\beta_2$. В этой окрестности матрица вторых производных от $P(q_1, q_2)$ оценивается снизу в смысле квадратичных форм

$$\frac{\partial^2 P(q_1,q_2)}{(\partial[q_1^T,q_2^T]^T)^2}\geqslant\begin{Vmatrix}K+\partial g/\partial q_1 & -K\\ -K & K+\gamma_2 E\end{Vmatrix}$$

Тогда можно применить утверждение из [5].

3°. Следует провести невырожденную замену переменных $\xi=x-y$, $\eta=x+y$ и учесть обозначения (2.3). Тогда

$$P=\frac{1}{2}\xi^T K\xi+\int_0^{(\xi-\eta)/2}F^T(\zeta)d\zeta+U\left(\frac{\xi+\eta}{2}+q_{1d}\right)-U_d-\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^T g_d$$

Можно выбрать направление $[a^T, b^T]^T$ в пространстве (ξ, η) такое, что

$$\|a\|=\beta,\ \|b\|\leqslant\beta \quad \text{или} \quad \|a\|\leqslant\beta,\ \|b\|=\beta \tag{2.11}$$

При подстановке всех таких a и b конец вектора $[a^T, b^T]^T$ пробегает границу рассмотренной в п. 2° области.

Рассмотрим поведение функции P на луче $[\xi^T,\eta^T]^T=t[a^T,b^T]^T$ при $t\in[1,\infty)$. Получим

$$\frac{dP}{dt}=t(a^T Ka)+\left(\frac{a-b}{2}\right)^T F\left(\frac{a-b}{2}t\right)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^T\Delta g\left(\frac{a+b}{2}t\right)$$

Если $\|a\|>0$, то в силу (1.8), (1.9) и (1.5) имеем $dP/dt\simeq t(a^T Ka)$ при $t\to\infty$, т.е. P возрастает с пропорциональной t скоростью начиная с некоторого значения t, которое увеличивается при приближении $\|a\|$ к нулю. Если $\|a\|=0$, то $\|b\|=\beta$ в силу (2.11), а значит (при учете (1.9)),

$$\frac{dP}{dt}=-\frac{b^T}{2}F\left(-\frac{b}{2}t\right)+\frac{b^T}{2}\Delta g\left(\frac{b}{2}t\right)\geqslant\frac{\beta}{2}(\gamma_1\beta-[A+\|g_d\|])=\text{const}>0$$

Итак, P возрастает не медленнее, чем с постоянной скоростью, пропорциональной $(\gamma_1\beta - [A + \|g_d\|])$, вдоль любого направления в пространстве (ξ, η), а значит, и в пространстве (x, y), начиная с некоторого фиксированного момента t^*. Это и завершает доказательство свойства 3°.

4°. Рассмотрим окрестность начала координат в пространстве (ξ, η), ограниченную поверхностью $[\xi^T, \eta^T]^T = [a^T, b^T]^T t^{**}$, где a и b пробегают все возможные значения из (2.11), а $t^{**} > t^*$ из доказательства свойства 3°. Функция $P(q_1, q_2)$ непрерывна, как видно из (2.9), следовательно, в указанной компактной окрестности начала координат P принимает наименьшее значение либо в точке локального минимума $[x^T, y^T]^T = [0^T, 0^T]^T$, где $P = 0$, либо на указанной поверхности. Предположение о том, что в какой-либо точке границы окрестности P принимает отрицательное значение, опровергается с помощью свойства 3°, из которого следует, что конечным увеличением t^{**} можно увеличить значение P на соответственно измененной границе на любое конечное число в положительную сторону. Приведенное рассуждение завершает доказательство п. 4°.

Теорема 2.1. При выполнении условий (1.4)–(1.9), (2.4), (2.10) замкнутая система (1.1), (1.2), (2.1) имеет единственное положение равновесия, совпадающее с желаемым: $q_1 = q_{1d}, q_2 = q_{2d}$, где величина q_{2d} определена формулой (2.2), причем это положение асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$V(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \tfrac{1}{2}(\dot q_1^T D(q_1)\dot q_1 + \dot q_2^T J \dot q_2) + P(q_1, q_2)$$

и учтем выражение (2.9).

В силу утверждения 2.2 это – функция Ляпунова для указанной замкнутой системы. Она представляет собой сумму кинетической энергии и аналога потенциальной энергии системы.

Найдем скорость изменения $V(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)$ вдоль траекторий замкнутой системы

$$\dot V(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \tfrac{1}{2}\dot q_1^T \dot D(q_1)\dot q_1 + \dot q_1^T D(q_1)\ddot q_1 + \dot q_2^T J \ddot q_2 + q_{12}^T K \dot q_{12} +$$

$$+\dot q_1^T g(q_1) - \dot q_2^T g_d + F^T(-y)(-\dot q_2) = \tfrac{1}{2}\dot q_1^T \dot D(q_1)\dot q_1 + \dot q_1^T[-C(q_1, \dot q_1)\dot q_1] +$$

$$+\dot q_1^T[-g(q_1) + K q_{21}] + \dot q_2^T[-K q_{21} + F(-y - K_v \dot q_2) + g_d] + q_{12}^T K \dot q_{12} + \dot q_1^T g(q_1) -$$

$$-\dot q_2^T g_d - \dot q_2^T F(-y) = -\dot q_2^T[F(y + K_v \dot q_2) - F(y)]$$

Сокращения проведены с учетом (1.3) и (1.9).

В силу строгого возрастания $F_i(y_i)$ имеем: $\dot V \leqslant 0$, причем $\dot V = 0$, только если $\dot q_2 = 0$, т.е. $q_2 = \dot q_{2c} = \text{const}$; тогда из (2.1) следует: $u = u_c = \text{const}$, а из (1.2) $q_1 = q_{1c} = \text{const}$. Тогда в соответствии с утверждением 2.1, $q_1 = q_{1d}, q_2 = q_{2d}$, и множество $\dot V = 0$ не содержит других целых траекторий. Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось применить теорему Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости в целом.

Следствие 2.1. Если в системе отсутствуют силы тяжести, то система (1.1), (1.2), (2.1) асимптотически устойчива в целом при всех положительно-определенных диагональных матрицах K_v и всех строго возрастающих, непрерывных, обращающихся в нуль при нулевом значении аргумента функциях $F(x)$.

У рассмотренного класса управлений есть недостаток: требование строгого возрастания функций $F_i(y_i)$. Как видно из проведенных выше выкладок, это требование нужно лишь для доказательства отсутствия целых траекторий (за исключением равновесного положения $q_1 = q_{1d}$, $q_2 = q_{2d}$), принадлежащих множеству $\dot V = 0$. Можно избавиться от этого недостатка, т.е. разрешить такие $F_i(y_i)$, что $F_i(y_i) = \text{const} \geqslant \beta_1\gamma_1$

при $|y_i| \geqslant \beta_3 \geqslant \beta_1$, если использовать вместо (2.1) управление в виде

$$u = -F(y) - F^*(\dot{q}_2) + g_d \tag{2.12}$$

Здесь $F_i(y_i)$ могут быть такими же, как в [6] (конечно, при выполнении соотношений (1.6)–(1.9)) или как в (1.11) при $\varepsilon = 0$. $F_i^*(y_i)$ – произвольные непрерывные, нечетные, функции с ненулевой производной в нуле.

Теорема 2.2. При выполнении условий (1.4)–(1.9), (2.4) и (2.10) замкнутая система (1.1), (1.2), (2.12) имеет единственное положение равновесия, совпадающее с желаемым: $q_1 = q_{1d}$, $q_2 = q_{2d}$, причем это положение асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Для новой системы функция $P(q_1, q_2)$ является уже не аналогом, а настоящей потенциальной энергией, т.е. производные от нее по координатам определяют действующие в системе силы. Доказательство теоремы 2.2 отличается от доказательства теоремы 2.1 лишь окончанием. Скорость изменения функции $V(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ вдоль траекторий новой системы примет вид

$$\dot{V} = -\dot{q}_2^T[\{F(y) + F^*(\dot{q}_2)\} - F(y)] = -\dot{q}_2^T F^*(\dot{q}_2)$$

И теперь утверждение, что $\dot{V} = 0$ лишь при $\dot{q}_2 = 0$ проходит несмотря на то, что координаты F^* могут иметь участки постоянства (конечно, вне сколь угодно малой окрестности нуля). Далее доказательство завершается так же, как и доказательство предыдущей теоремы.

3. Асимптотическая стабилизация при недоступных измерению обобщенных скоростях. Рассмотрим следующий закон управления:

$$u = F(q_3 - q_2) + g_d \tag{3.1}$$

Компоненты вектора F опять могут быть взяты в виде (1.10), (1.11) или (1.12), т.е. они непрерывно возрастают, так что выполнены условия (1.6)–(1.9).

Закон (3.1) не содержит скоростей, но зато опирается на вектор q_3, который вычисляется параллельно с движением и измерением q_2, путем численного или аппаратного решения уравнения

$$\dot{q}_3 = -G^{-1}(F(q_3 - q_2) + \varkappa(q_3 - q_{2d})) \tag{3.2}$$

где G и $\varkappa$ – положительно-определенные диагональные матрицы, а q_{2d} из (2.2).

Схема и методы исследования закона (3.1) в основном повторяют исследование закона (2.1) в разд. 2. Вначале доказываются утверждения, аналогичные утверждениям 2.1 и 2.2, а затем основная теорема, аналогичная теореме 2.1.

Утверждение 3.1. Если коэффициенты β_1, γ_1 и α выбраны так, что

$$\gamma_1 > \alpha(1 - \alpha\|K^{-1} + \varkappa^{-1}\|)^{-1} > 0, \quad \gamma_1\beta_1 > A + \|g_d\| \tag{3.3}$$

то положение равновесия замкнутой системы (1.1), (1.2), (3.1) и (3.2) единственно и совпадает с желаемым: $q_1 = q_{1d}$, $q_2 = q_{2d}$ из (2.2), $q_3 = q_{2d}$.

Доказательство, аналогично доказательству утверждения 2.1. После похожих выкладок вместо (2.7) получим

$$y = X, \quad z = Z, \quad F(Z - X) = \Delta g(x) \tag{3.4}$$

где введены дополнительно обозначения: $z = q_3 - q_{2d}$, $Z = -\varkappa^{-1}\Delta g(x)$. И далее оценивая по норме правую и левую части третьего равенства из (3.4), приходим к выводу: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Введем по аналогии с (2.9) функцию

$$P(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{2}q_{12}^TKq_{12}-\frac{1}{2}q_{12d}^TKq_{12d}+U(q_1)-U_d+$$

$$+(q_{2d}-q_2)^Tg_d+\int\limits_0^{q_3-q_2}F^T(\eta)d\eta+\frac{1}{2}(q_3-q_{2d})^T\varkappa(q_3-q_{2d}) \tag{3.5}$$

Утверждение 3.2. При выполнении неравенств (3.3) функция $P(q_1, q_2, q_3)$ обладает следующими свойствами.

1°. $P(q_1, q_2, q_3)$ имеет единственную стационарную точку $S: q_1 = q_{1d},\ q_2 = q_{2d},\ q_3 = q_{2d}$.

2°. Если

$$\lambda_{\min}(K)>\delta\alpha,\quad \gamma_2>\delta\alpha,\quad \lambda_{\min}(\varkappa)>\delta\alpha \quad \left(\delta=\lambda_{\max}\left(\begin{Vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{Vmatrix}\right)\right) \tag{3.6}$$

где α из (1.4), γ_2 из (1.7), то в некоторой конечной окрестности точки S функция $P(q_1, q_2, q_3)$ выпукла, а значит, S – точка локального минимума.

3°. $P(q_1, q_2, q_3)\to+\infty$ при $\|[q_1^T,q_2^T,q_3^T]^T\|\to+\infty$.

4°. $P(q_1,q_2,q_3)>P(q_{1d},q_{2d},q_{2d})=0$ везде кроме точки S.

Доказательство, аналогично доказательству утверждения 2.2. Основное отличие состоит в следующем. При доказательстве свойства 2° рассматривается окрестность: $\|z\|\leq\beta/3$, $\|x+y\|\leq 2\beta/3$, $\|x-y\|\leq 2\beta/3$. В этой окрестности $\|q_3-q_2\|\leq\beta$, а значит, используя (1.7), можно оценить матрицу вторых производных от $P(q_1, q_2, q_3)$ (в смысле квадратичных форм)

$$\frac{\partial^2P(q_1,q_2,q_3)}{(\partial[q_1^T,q_2^T,q_3^T]^T)^2}\geq\begin{Vmatrix}K+\partial g/\partial q_1 & -K & 0\\ -K & K+\gamma_2E & -\gamma_2E\\ 0 & -\gamma_2E & \varkappa+\gamma_2E\end{Vmatrix}$$

При доказательстве свойства 3° поведение P рассматривается на луче: $[x^T-y^T,x^T+y^T,z^T]^T=[a^T,b^T,c^T]^Tt$, $t\in[1,\infty)$, $\|c\|\leq\beta/3$, $\|a\|\leq 2\beta/3$, $\|b\|\leq 2\beta/3$, где хотя бы одно из неравенств выполняется как строгое равенство.

Теорема 3.1. При выполнении условий (1.4)–(1.9), (3.3), (3.6) замкнутая система (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) имеет единственное положение равновесия, совпадающее с желаемым: $q_1=q_{1d},q_2=q_{2d},q_3=q_{2d}$, где величина q_{2d} определена формулой (2.2), причем это положение асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$V(q_1,q_2,q_3,\dot q_1\dot q_2)=\tfrac{1}{2}(\dot q_1^TD(q_1)q_1+\dot q_2^TJ\dot q_2)+P(q_1,q_2,q_3)$$

и учтем выражение (3.5).

В силу утверждения 3.2 $V(q_1,q_2,q_3,\dot q_1,\dot q_2)$ – функция Ляпунова системы.

Найдем скорость изменения $V(q_1,q_2,q_3,\dot q_1,\dot q_2)$ вдоль траекторий замкнутой системы (1.1), (1.2), (3.1), (3.2)

$$\dot V(q_1,q_2,q_3,\dot q_1,\dot q_2)=\tfrac{1}{2}\dot q_1^T\dot D(q_1)\dot q_1-\dot q_1^TC(q_1,\dot q_1)\dot q_1+\dot q_1^T[-g(q_1)+Kq_{21}]+$$

$$+\dot q_2^T[-Kq_{21}+F(q_3-q_2)+g_d]+(\dot q_1-\dot q_2)^TKq_{12}+(q_3-q_{2d})^T\varkappa\dot q_3+$$

$$+\dot q_1^Tg(q_1)-\dot q_2^Tg_d+\dot q_3^TF(q_3-q_2)-\dot q_2^TF(q_3-q_2)=-\dot q_3^TG\dot q_3$$

Выкладки проведены с учетом соотношений (1.1), (1.2), (1.3), (3.1) и (3.2). Очевидно, в силу положительной определенности G, что $\dot V \leqslant 0$. При этом $\dot V = 0$ означает, что $\dot q_3 = 0$, т.е. $q_3 = q_{3c} = \text{const}$, тогда согласно (3.2) $F(q_3 - q_2) = -\varkappa(q_{3c} - q_{2d}) = \text{const}$. В силу строгой монотонности компонент вектора $F(x)$ это означает, что $q_2 = q_{2c} = \text{const}$, а тогда, из (1.2) следует $q_1 = q_{1c}$ и в соответствии с результатом утверждения 3.1 имеем $q_1 = q_{1d}, q_2 = q_{2d}, q_3 = q_{2d}$, и множество $\dot V = 0$ не содержит других целых траекторий рассматриваемой системы. Для завершения доказательства теоремы 3.1 осталось применить теорему Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости в целом.

При пренебрежении моментами сил тяжести условия устойчивости могут быть смягчены.

Следствие 3.1. Если в системе отсутствуют силы тяжести, то система (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) асимптотически устойчива в целом при любых положительно-определенных диагональных матрицах $G, \varkappa$ и любых монотонно возрастающих, непрерывных, обращающихся в нуль при нулевом значении аргумента функциях $F(x)$.

4. Замечания. 1°. Вместо модели (1.1), (1.2) из [1, 2] можно рассматривать более общую модель [4]

$$D(q_1)\ddot q_1 + B(q_1)\ddot q_2 + C_1(q_1, \dot q_1, \dot q_2)\dot q_1 + C_2(q_1, \dot q_1)\dot q_2 + K(q_1 - q_2) + g(q_1) = 0$$

$$J\ddot q_2 + B^T(q_1)\ddot q_1 + C_3(q_1, \dot q_1)\dot q_1 + K(q_2 - q_1) = u$$

Для нее можно доказать те же теоремы 2.1, 2.2 и 3.1. При этом доказательства несколько усложнятся; во вспомогательных функциях V следует заменить слагаемые $(\dot q_1^T D(q_1)\dot q_1 + \dot q_2^T J\dot q_2)/2$ новой кинетической энергией

$$\frac{1}{2}[\dot q_1^T\,\dot q_2^T]\begin{Vmatrix} D(q_1) & B(q_1) \\ B^T(q_1) & J \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix}$$

2°. Если сравнить закон управления [4]

$$u = -K_p(q_2 - q_{2d}) - K_v\dot q_2 + g_d$$

с законом управления (2.1) и особенно с законом управления (2.12), то видно, что предлагаемые в данной работе законы являются его обобщением, более приближенным к реальным характеристикам системы усилитель – двигатель.

3°. То же, что и в 2°, можно сказать сравнивая закон управления из [5] с законом (3.1), но, кроме того, предлагаемое здесь вспомогательное уравнение (3.2) (представляющее собой оцениватель обобщенных скоростей) имеет вдвое меньший чем в [5] порядок и, по-видимому, проще для реализации. Ранее рассматривалась [8–10] асимптотическая стабилизация нелинейных механических систем без измерения обобщенных скоростей. При этом число вспомогательных дифференциальных уравнений, которые необходимо решать в процессе управления, равнялось числу управлений. Рассматривалась асимптотическая стабилизация лагранжевой системы ограниченными управлениями без измерения скоростей [11], число управляющих сигналов равнялось числу степеней свободы, а внешние потенциальные силы отсутствовали.

4°. Энергетический метод исследования устойчивости нелинейных механических систем с диссипацией широко использовался. Рассматривалась асимптотическая стабилизация лагранжевой системы общего вида по отношению к скоростям [12], а также по отношению к позиционным координатам и скоростям [13]. Кроме цитированных выше работ, отметим [14, 15].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00813а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спонг М.В.* Моделирование и управление роботами с упругими сочленениями // Констр. и технолог. машиностр. 1988. № 3. С. 108–126. = Modelling and control of elastic joints robots // Trans. ASME. J. Dynam. Syst. Measurements and Contr. 1987. V. 109. P. 310–319.
2. *Бурков И.В., Заремба А.Т.* Динамика упругого манипулятора с электроприводом // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 57–64.
3. *Slotine J.-J.E., Li W.* On the adaptive control of robot manipulators // Intern. J. Robot. Res. 1987. V. 6. N 3. P. 49–59. = Adaptive manipulator control: a case study // IEEE Trans. Automat. and Contr. 1988. V. 33. N 11. P. 995–1003.
4. *Tomei P.* A simple *PD* controller for robots with elastic joints // IEEE Trans. Automat. and Contr. 1991. V. 36. N 10. P. 1208–1213.
5. *Ailon A., Ortega R.* An observer-based set-point controller for robot-manipulators with flexible joints // Syst. Contr. Lett. 1993. V. 21. N 4. P. 329–335.
6. *Arimoto S.* Fundamental problems of robot control. Part 2. // Robotica. 1995. V. 13. N 2. P. 111–122.
7. *Дунская Н.В., Пятницкий Е.С.* Стабилизация управляемых механических и электромеханических систем // Автоматика и телемеханика. 1988. № 12. С. 40–51.
8. *Berghuis H., Nijmeijer H.* Global regulation of robots using only position mearsurements // Syst. Contr. 1993. V. 21. N 4. P. 289–293.
9. *Burkov I.V.* Asymptotic stabilization of nonlinear Lagrangian systems without measuring velocities // Active Control in Mechanical Engineering. Proc. Int. Symp. (Lyon, France, 1993). Lyon: Association MV2. V. 2. Reprinted by Hèrmes, Paris. 1995. P. 440–448. Ed.: L. Jézéquel.
10. *Kelly R., Ortega R., Ailon, A., Loria A.* Global regulation of flexible joints robots using approximate differentiation // IEEE Trans. Automat. and Contr. 1994. V. 39. N 6. P. 1222–1224.
11. *Burkov I.V.* Stabilization of mechanical systems via bounded control and without velocity measurement // 2nd Russian-Swedish Control Conf. (St. Petersburg, Russia, Aug. 29–31, 1995). St. Petersburg: St. Petersburg Technical Univ. P. 37–41.
12. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, физики, астрономии, химии. 1957. № 4. С. 9–16.
13. *Пожарицкий Г.К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4.С. 657–667.
14. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. шк., 1982. 285 с.
15. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. С. 3–128.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
12.XII.1995