УДК 531.36:62–50

© 1997 г. А.И. Короткий

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЙ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ СОСТОЯНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается обратная задача динамики о восстановлении множества априори неизвестных управлений (возмущений), действующих на нелинейную динамическую систему и порождающих наблюдаемое движение этой системы. Информацией для восстановления служат приближенные измерения текущих фазовых положений системы, восстановление осуществляется в динамике (в реальном времени) в метрике Хаусдорфа. Известно, что эта задача некорректна. Для ее решения предлагаются конструктивные физически осуществимые регуляризирующие конечно-шаговые позиционные алгоритмы устойчивой динамической аппроксимации искомого множества.

Работа продолжает исследования [1–5] и в идейном плане опирается на полученные ранее результаты [6–9]. Близкие подходы к нахождению параметров динамических систем, основанные на методах гарантированного оценивания, рассматривались, например, в [10–13].

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую динамическую систему, которая на отрезке времени $T=[t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ описывается нелинейным уравнением

$$\dot{y}(t)+A(t)y(t)=B(t,y(t))u(t)+f(t), \quad y(t_0)=y_0 \tag{1.1}$$

Система подвержена воздействию априори неизвестных управлений $u=u(t)$, каждому допустимому управлению $u\in\Sigma$ соответствует вполне определенное движение системы $y=y(u)=y(t;u)$. По наблюдению за каким-либо движением системы и приближенным измерением его текущих состояний $y(t)$, требуется в динамике определять все те управления $u\in\Sigma$, которые порождают наблюдаемое движение. Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, $t\in T$.

Пусть V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, непрерывно и плотно вложенное в гильбертово пространство H. Отождествляя H со своим сопряженным H^*, получим тройку непрерывно и плотно вложенных пространств $V\subset H\subset V^*$ (пусть для определенности $C_V\|\cdot\|_V \geqslant C_H\|\cdot\|_H \geqslant \|\cdot\|_{V^*}$). Пусть заданы числа p и p_0, такие, что $1<p\leqslant p_0<\infty$, $2\leqslant p_0$. Положим $X=L^p(T;V)\cap L^{p_0}(T;H)$, тогда $X^*=L^q(T;V^*)+L^{q_0}(T;H)$, где $1/p+1/q=1$, $1/p_0+1/q_0=1$. Пусть $W=\{y\in X:\dot{y}\in X^*\}$, где $\dot{y}$ – производная от y в смысле пространства распределений $D^*(T;V^*)$, $\|y\|_W=\|y\|_X+\|\dot{y}\|_{X^*}$. Определения используемых здесь функциональных пространств и их основные свойства даны, например, в [14, 15]. В частности, X и W – рефлексивные банаховы пространства, пространство W непрерывно вложено в $C(T;H)$.

Для любых $y,z\in W$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\langle y(t),z(t)\rangle-\langle y(s),z(s)\rangle=\int_s^t \big(\langle\dot{y}(\tau),z(\tau)\rangle+\langle\dot{z}(\tau),y(\tau)\rangle\big)d\tau$$

которая при $y = z$ переходит в формулу

$$\|y(t)\|_H^2 - \|y(s)\|_H^2 = 2\int_s^t \langle \dot{y}(\tau), y(\tau) \rangle d\tau$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая двойственность между V^* и V, которая на H совпадает со скалярным произведением в H, $s \in T$.

Для каждого элемента $y \in W$ в пространстве V^* справедливо равенство Ньютона – Лейбница

$$y(t) = y(s) + \int_s^t \dot{y}(\tau) d\tau$$

каждый элемент $y \in W$ почти всюду на T сильно дифференцируем, как отображение $T \to V^*$, и соответствующая сильная производная почти всюду на T совпадает с производной $\dot{y}$.

Пусть $\{A(t) : t \in T\}$ – семейство радиально непрерывных монотонных операторов из V в V^* таких, что $\langle A(t)v, w \rangle$ при любых фиксированных $v, w \in V$ есть непрерывная функция, $\langle A(t)y(t), z(t) \rangle$ при любых фиксированных $y, z \in X$ есть измеримая функция t, существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 \in R$, $C_3 > 0$, для которых при любых $t \in T$, $v \in V$ выполняются неравенства

$$\langle A(t)v, v \rangle \geq C_1 \|v\|_V^p - C_2, \quad \|A(t)v\|_{V^*} \leq C_3\left(\|v\|_V^{p-1} + 1\right)$$

Пусть $\{B(t, z) : t \in T, z \in H\}$ – семейство линейных непрерывных операторов, действующих из конечномерного гильбертова пространства U в пространство H, при этом отображение $T \times H \ni (t, z) \to B(t, z) \in L(U; H)$ непрерывно и для любых $t \in T$, $x, z \in H$ справедливы неравенства

$$\|B(t, x) - B(t, z)\|_{L(U;H)} \leq C_4 \|x - z\|_H$$

$$\|B(t, z)\|_{L(U;H)} \leq C_5\left(\|z\|_H + 1\right)$$

где C_4 и C_5 – некоторые неотрицательные постоянные, $L(U; H)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов из U в H с естественной нормой.

Пусть $y_0 \in H$, $f \in X^* \cap C(T; V^*)$, P – выпуклое ограниченное замкнутое множество элементов из U, Σ – множество всех измеримых отображений $T \to P$ (оно выпукло ограничено и замкнуто в пространстве $L^r(T; U)$, $1 \leq r < \infty$). Множество P представляет собой множество мгновенных ограничений для допустимых управлений из Σ.

Задача Коши (1.1), при указанных условиях, налагаемых на ее параметры, имеет единственное решение из пространства W. При этом отображение

$$H \times X^* \times L^r(T; U) \ni (y_0, f, u) \to y = y(y_0, f, u) \in C(T; H)$$

непрерывно ([14], гл. 6, § 1). Решение $y = y(u)$ будем также трактовать как движение динамической системы (1.1) на отрезке времени T в фазовом пространстве H из начального состояния y_0 под действием управления $u \in \Sigma$. Пусть $Y = \{y(u) : u \in \Sigma\}$ – множество всех возможных движений системы (1.1) из начального состояния y_0 (множество Y ограничено в W).

Для каждого движения $y \in Y$ введем множество всех управлений

$$\Sigma(y) = \{u \in \Sigma : y(u) = y\}$$

порождающих это движение. Это множество непусто и, вообще говоря, не одноэлементно, оно всегда выпукло ограничено и замкнуто в $L^r(T; U)$. В каждый момент времени t возможно измерение текущего состояния $y(t)$ системы и результат измерения $\xi(t)$ связан с состоянием $y(t)$ соотношением

$$\xi(t) = y(t) + \eta(t), \quad \|\eta(t)\|_V \leqslant h \tag{1.2}$$

Задача состоит в построении алгоритма, который по ходу процесса (в темпе реального времени) по результатам измерений (1.2) текущих фазовых состояний наблюдаемого движения $y \in Y$ динамической системы приближенно (в соответствующей метрике Хаусдорфа) восстанавливает по ходу процесса множество $\Sigma(y)$. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем точнее входная информация. Уравнение движения и множество P считаются известными.

Пусть Ξ – множество всех отображений $T \to V^*$, S_h – замкнутый шар в V радиуса $h > 0$ с центром в нуле и

$$\Xi_h(y) = \{\xi \in \Xi : \xi(t) = y(t) + \eta(t), \ \eta(t) \in S_h\}, \quad y \in Y$$

На множестве $\mathrm{Conv}(\Sigma)$ всех непустых выпуклых ограниченных замкнутых подмножеств множества $\Sigma \subset L^r(T; U)$ будем рассматривать метрику Хаусдорфа

$$\rho(\Sigma_1, \Sigma_2) = \max\left\{ \sup_{u_1 \in \Sigma_1} \inf_{u_2 \in \Sigma_2} \|u_1 - u_2\|_{L^r(T;U)}, \sup_{u_2 \in \Sigma_2} \inf_{u_1 \in \Sigma_1} \|u_1 - u_2\|_{L^r(T;U)} \right\}$$

Скажем, что семейство $(D_h)_{h>0}$ операторов D_h: $\Xi \to \mathrm{Conv}(\Sigma)$ является ρ-регуляризирующим в точке $y \in Y$, если

$$\sup\{\rho(D_h\xi, \Sigma(y)) : \xi \in \Xi_h(y)\} \to 0, \quad h \to 0$$

Решение задачи будем искать в классе конечно-шаговых динамических позиционных ρ-регуляризирующих алгоритмов (КДПА). Под КДПА здесь понимается тройка

$$D = \left((\tau_i)_{i=1}^m ; (Z_i)_{i=0}^{m-1} ; (G_i)_{i=0}^{m-1} \right) \tag{1.3}$$

где m – натуральное число, $(\tau_i)_{i=0}^m$ – разбиение отрезка T точками τ_i ($t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \vartheta$), Z_i – отображение $T \times T \times V^* \times V^* \times \mathrm{Conv}(\Sigma[\tau_i, \tau_{i+1})) \to V^*$, G_i – отображение $T \times V^* \times V^* \to \mathrm{Conv}(\Sigma[\tau_i, \tau_{i+1}))$, $\Sigma[\tau_i, \tau_{i+l}))$ – множество всех измеримых отображений $[\tau_i, \tau_{i+1}) \to P$, $\mathrm{Conv}(\Sigma[\tau_l, \tau_{i+1}))$ – множество всех непустых выпуклых ограниченных замкнутых подмножеств множества $\Sigma[\tau_i, \tau_{i+1}) \subset L^r([\tau_i, \tau_{i+1}); U)$. Работа подобных алгоритмов во времени и формирование ими в динамике соответствующих реализаций подробно описана [1–5, 7, 8] (см. ниже формирование управляемого процесса). С содержательной точки зрения отображения (Z_i) формируют движение вспомогательной управляемой системы-модели, отображения (G_i) позиционным способом формируют управляющие воздействия для системы-модели [6].

Для КДПА (1.3) и функции $\xi \in \Xi$ пару элементов

$$(z(\cdot), g(\cdot)) = (z(\cdot \mid D, \xi), g(\cdot \mid D, \xi)) \in (T \to V^*) \times \mathrm{Conv}(\Sigma)$$

сформированных по правилу

$$z(t_0) = \xi(t_0), \quad z(t) = Z_i(t, \tau_i, z(\tau_i), \xi(\tau_i), g_i(\cdot)), \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, m-1$$

$$g(\cdot)\big|_{[\tau_i, \tau_{i+1})} = g_i(\cdot) = G_i(\tau_i, z(\tau_i), \xi(\tau_i)), \quad i = 0, \ldots, m-1$$

назовем управляемым процессом для КДПА (1.3) и измерения $\xi \in \Xi$. Каждому КДПА (1.3) можно поставить в соответствие оператор $D : \Xi \to \mathrm{Conv}(\Sigma)$, который для простоты обозначаем тем же самым символом и который действует по правилу $D\xi =$

$= g(\cdot|D, \xi)$. Этот оператор будем отождествлять с самим КДПА (1.3). Очевидно, такой оператор обладает свойством неупреждаемости: из условия $\xi_1(\tau) = \xi_2(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, $t \in T$, следует совпадение сужений на отрезок $[t_0, t]$ образов $D\xi_1$ и $D\xi_2$. Отметим, что алгоритмы решения задачи восстановления управлений, обладающие свойством неупреждаемости, важны для практики, например в случаях, когда речь идет о разовом восстановлении при отсутствии возможности повторить вычисления или использовании результатов восстановления в системах обратной связи.

Итак, для решения задачи восстановления достаточно построить какое-нибудь ρ-регуляризирующее семейство КДПА. Ниже укажем некоторые способы построения искомых алгоритмов.

2. Построение регуляризирующего семейства алгоритмов. Введем предварительно несколько вспомогательных понятий и обозначений. Для фиксированного $y \in Y$ определим многозначное отображение

$$Q(\cdot|y): T \ni t \to Q(t|y) \in \mathrm{Conv}(P)$$

по правилу

$$Q(t|y) = \{w \in P : \dot{y}(t) + A(t)y(t) = B(t, y(t))w + f(t)\}$$

если функция y дифференцируема в точке t и это множество непусто, в противном случае $Q(t|y) = P$. Ясно, что $\Sigma(y) = \mathrm{sel}\, Q(\cdot|y)$, где $\mathrm{sel}\, Q(\cdot|y)$ – множество всех измеримых селекторов многозначного отображения $Q(\cdot|y)$, $Q(\cdot|y) \in M(T; P)$, где $M(T; P)$ – пространство всех измеримых ограниченных (а потому и интегрируемых) многозначных отображений $T \to \mathrm{Conv}(P)$. Для $Q \in M(T; P)$ положим

$$\varphi(t, l|Q) = \min\{\langle l, w\rangle_U : w \in Q(t)\}, \quad l \in E$$

где E – замкнутый единичный шар в U с центром в нуле (т.е. $\varphi(t, \cdot|Q)$ – нижний опорный функционал выпуклого компакта $Q(t)$).

Заметим, что для каждого $Q \in M(T; P)$ имеет место включение $\varphi(\cdot, \cdot|Q) \in B$, где B – банахово пространство функций Каратеодори $\varphi: T \times E \to R$ с естественной нормой

$$\|\varphi\|_B = \int_T \|\varphi(t, \cdot)\|_{C(E)} dt$$

В пространстве $M(T; P)$ введем новую метрику σ

$$\sigma(Q_1, Q_2) = \|\varphi(\cdot, \cdot|Q_1) - \varphi(\cdot, \cdot|Q_2)\|_B$$

Можно установить, что из сходимости $\sigma(Q_n, Q) \to 0$ вытекает сходимость $\rho(\mathrm{sel}\, Q_n, \mathrm{sel}\, Q) \to 0$. Отсюда следует, что для решения задачи восстановления достаточно построить семейство $(\Lambda_h)_{h>0}$ неупреждающих σ-регуляризирующих операторов Λ_h: $\Xi \to M(T; P)$, т.е.

$$\sup\{\sigma(\Lambda_h\xi, Q(\cdot|y)) : \xi \in \Xi_h(y)\} \to 0, \quad h \to 0$$

Тогда семейство неупреждающих операторов $(D_h)_{h>0}$, $D_h\xi = \mathrm{sel}\, \Lambda_h\xi$, будет ρ-регуляризирующим.

В свою очередь подходящие операторы Λ_h можно искать в классе конечношаговых динамических позиционных алгоритмов с многозначными кусочно-постоянными реализациями управлений (КДПАМ)

$$\Lambda = \left((\tau_i)_{i=0}^{m}; (Z_i^*)_{i=0}^{m-1}; (G_i^*)_{i=0}^{m-1}\right) \tag{2.1}$$

где Z_i^* – отображение $T \times T \times V^* \times V^* \times \mathrm{Conv}(P) \to V^*$, G_i^* – отображение

$T \times V^* \times V^* \to \mathrm{Conv}(P)$. Управляемый процесс для КДПАМ (2.1) и функции $\xi \in \Xi$ определим как пару функций на T

$$(z(\cdot), Q(\cdot)) = (z(\cdot|D,\xi), Q(\cdot|D,\xi)) \in (T \to V^*) \times (T \to \mathrm{Conv}(P))$$

сформированных по правилу

$$z(t_0) = \xi(t_0), \quad z(t) = Z_i^*(t, \tau_i, z(\tau_i), \xi(\tau_i), Q_i(\cdot)), \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1$$

$$Q(t) = Q_i(t) = G_i^*(\tau_i, z(\tau_i), \xi(\tau_i)), \quad \tau_i < t \leqslant \tau_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1$$

Алгоритм (2.1) и соответствующий ему оператор $\Lambda : \Xi \ni \xi \to \Lambda\xi = Q(\cdot) \in M(T; P)$, как оговаривалось выше, будем отождествлять. Ясно, что построенный оператор обладает свойством неупреждаемости. Приступим теперь к построению подходящих семейств КДПАМ.

Условие 1. Существует функция $\omega(\cdot,\cdot) : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, такая, что $\omega(\delta, h) \to 0$ при $\delta, h \to 0$ и

$$\|A(t)y(t) + B(t, y(t))w + f(t) - A(s)(y(s) + \eta) - B(s, y(s) + \eta)w - f(s)\|_{V^*} \leqslant \omega(\delta, h)$$

при любых $t, s \in T$, $|t - s| \leqslant \delta$, $y \in Y$, $\eta \in S_h$, $w \in P$.

Определим конкретное семейство КДПАМ следующими условиями:

$$\Lambda_h = \left(\left(\tau_{hi}\right)_{i=0}^{m(h)} ; \left(Z_{hi}^*\right)_{i=0}^{m(h)-1} ; \left(G_{hi}^*\right)_{i=0}^{m(h)-1} \right) \tag{2.2}$$

$$Z_{hi}^*(t, s, z, x, F) = x, \quad t, s \in T, \quad z, x \in V^*, \quad F \in \mathrm{Conv}(P)$$

$$G_{hi}^*(t, z, x) =$$

$$= \left\{ w \in P : \left\| \frac{x - z}{\tau_{hi} - \tau_{hi-1}} + A(\tau_{hi-1})z - B(\tau_{hi-1}, z)w - f(\tau_{hi-1}) \right\|_{V^*} \leqslant \omega(\delta, h) + 2hC_V / \delta \right\}$$

для $t \in [\tau_{hi}, \tau_{hi+1})$, $z, x \in V^*$, в противном случае $G_{hi}^*(t, z, x) = P$.

Пусть $\delta(h)$ – диаметр разбиения отрезка T, т.е.

$$\delta(h) = \max\{\tau_{hi+1} - \tau_{hi} \mid i = 0, \dots, m(h) - 1\}$$

Теорема. Пусть выполнены условие 1 и согласования $\delta(h) \to 0$, $h/\delta(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда семейство КДПАМ (2.2) является σ-регуляризирующим в каждой точке $y \in Y$.

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Зафиксируем произвольную последовательность $\{h_k\}$, $h_k > 0$, $h_k \to 0$ и рассмотрим произвольный управляемый процесс $(z_k(\cdot), Q_k(\cdot))$, отвечающий КДПАМ (2.2) с $\xi = \xi_k \in \Xi_h(y)$, $h = h_k$. Требуется показать, что $\sigma(Q_k(\cdot), Q(\cdot|y)) \to 0$ при $k \to \infty$.

Допустим, что этой сходимости нет. Тогда, согласно определению σ,

$$\int_T \|\varphi(t, \cdot|Q_k) - \varphi(t, \cdot|Q)\|_{C(E)} dt \not\to 0$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем конечную ε-сеть $\{l_1, \dots, l_n\}$ для E. Тогда

$$\sup_{l \in E} \inf_{1 \leqslant j \leqslant n} \|l - l_j\|_U \leqslant \varepsilon \tag{2.3}$$

Не нарушая общности рассуждений и выделяя, если нужно, подпоследовательности, можно считать, что для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\varphi\left(\cdot, l_j \middle| Q_k\right) \to \varphi^*\left(\cdot, l_j\right) \text{ слабо в } L^2(T; R)$$

где $\varphi^*\left(\cdot, l_j\right)$ – некоторая функция из $L^2(T; R)$. Из свойств нижних опорных функций можно усмотреть, что для каждого $j \in \{1, ..., n\}$

$$\varphi^*(t,l_j) \geq \varphi(t,l_j|Q), \text{ при п.в. } t \in T$$

Из определения управляемого процесса следует, что для любых $u \in \Sigma(y)$ и номера k имеют место включения

$$[u]_i \in Q_k(\tau_{hi}), \quad i = 1,\dots,m(h)-1, \quad h = h_k$$

Здесь $[\psi]_i$ – значение интеграла от функции ψ по отрезку $[\tau_{hi-1},\tau_{hi}]$, $h = h_k$, деленное на длину этого отрезка.

Из включений следуют неравенства

$$\varphi(\tau_{hi},l_j|Q_k) \leq \left[\langle u(\cdot),l_j\rangle_U\right]_i, \quad h = h_k$$

Существует единственная функция $v_j \in \Sigma(y)$, такая, что

$$\langle v_j(\tau),l_j\rangle_U = \varphi(\tau,l_j|Q) \text{ при п.в. } \tau \in T$$

При $u = v_j$ получим

$$\varphi(\tau_{hi},l_j|Q_k) \leq \left[\varphi(\cdot,l_j|Q)\right]_i, \quad \varphi(\tau_{hi},l_j|Q_k) \leq \left[\varphi^*(\cdot,l_j)\right]_i, \quad h = h_k$$

Из слабой сходимости и полученных неравенств следует, что

$$\varphi(\cdot,l_j|Q_k) \to \varphi^*(\cdot,l_j) \text{ сильно в } L^2(T;R) \tag{2.4}$$

Справедливо соотношение $\varphi^*(\cdot,l_j) = \varphi(\cdot,l_j|Q)$.

Действительно, допустив противное, получили бы, что (всюду далее интегрирование ведется по отрезку T)

$$\int \varphi(t,l_j|Q)dt < \int \varphi^*(t,l_j)dt$$

С другой стороны,

$$\int \varphi(t,l_j|Q_k)dt \leq \int \varphi(t,l_j|Q)dt, \quad \int \varphi(t,l_j|Q_k)dt \to \int \varphi^*(t,l_j)dt$$

Поэтому

$$\int \varphi(t,l_j|Q)dt = \int \varphi^*(t,l_j)dt$$

что противоречит допущению.

Воспользовавшись (2.3), получим неравенство

$$\left\|\varphi(t,\cdot|Q_k) - \varphi(t,\cdot|Q)\right\|_{C(E)} \leq \max_{1\leq j\leq n}\left|\varphi(t,l_j|Q_k) - \varphi(t,l_j|Q)\right| + \varepsilon \cdot L$$

где L – некоторая положительная постоянная, не зависящая от k, t и j. В силу (2.4) и произвольности ε имеем

$$\int \left\|\varphi(t,\cdot|Q) - \varphi(t,\cdot|Q_k)\right\|_{C(E)} dt \to 0$$

что противоречит исходному предположению. Итак, $\sigma(Q_k(\cdot),Q(\cdot|y)) \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Замечания. 1°. О классах уравнений с частными производными, в функционально-аналитической формулировке допускающих представление (1.1), см., например, [14, 15].

2°. Условие 1 выполняется для задач, в которых семейство операторов $\{A(t) : t \in T\}$ удовлетворяет дополнительному условию равностепенной непрерывности в некоторой окрестности множества всех состояний системы (1.1).

3°. Если U – бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, то U можно наделить новым скалярным произведением, в норме которого шар E будет компактом [16], с. 53–55). Тогда схема проведенных выше рассуждений (с новым скалярным произведением и нормой на U) полностью переносится на данный бесконечномерный случай.

4°. Если найдено все множество порождающих наблюдаемое движение управлений, то часто в качестве подходящего решения задачи восстановления принимается чебышевский центр этого множества или элемент минимальной нормы. Можно показать, что в условиях рассматриваемой задачи из сходимости найденных множеств в метрике Хаусдорфа вытекает сходимость их чебышевских центров и элементов минимальной нормы [17].

5°. В [3] был описан другой способ динамического восстановления множества управлений, порождающих наблюдаемое движение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00846) и Международного научно-технического центра (94-008).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ким А.В., Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Обратные задачи динамики параболических систем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 754–759.
2. *Короткий А.И., Осипов Ю.С.* Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С. 154–164.
3. *Короткий А.И., Цепелев И.А.* Динамическое решение обратной задачи определения параметров в системе Гурса – Дарбу // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 88–103.
4. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами. Свердловск: Ин-т матем. и мех. УрО РАН, 1991. 104 с.
5. *Вдовин А.Ю., Кряжимский А.В.* О восстановлении множества возмущений по измерениям траектории // Исследования по системному анализу и приложениям. Свердловск: Изд-во Урал. Ун-та, 1990. С. 15–35.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* О динамическом решении операторных уравнений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 3. С. 552–556.
8. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
9. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
10. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
11. *Гусев М.И., Куржанский А.Б.* Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
13. *Овсеевич А.И., Трущенков В.Л., Черноусько Ф.Л.* Уравнения непрерывного гарантированного оценивания состояния динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 94–101.
14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
15. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
16. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
17. *Царьков И.Г.* Сглаживание равномерно непрерывных отображений в пространствах L_p // Мат. заметки. 1993. Т. 54. Вып. 3. С. 123–140.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
1.VIII.1995