УДК 531/539

© 1997 г. П.А. Мазуров

О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

Для отдельного класса задач механики приводится метод построения вариационных принципов (ВП). ВП выводятся из вариационных задач, эквивалентных выполнению определяющих соотношений. Физическая сторона подобной схемы вывода заключается в составлении вариационных задач из соображений минимума скорости накопления и диссипации энергии. При этом выделяются механизмы накопления и диссипации энергии, определяющие количество переменных в ВП. ВП построены для системы уравнений переноса в стационарном случае и для задачи фильтрации несжимаемой жидкости в деформируемой среде сложной реологии. Предлагаемый подход упрощает процедуру построения двойственных ВП и может быть использован при построении других ВП для сред сложной реологии. Схема вывода ВП сохраняется для задач, решение которых определяется минимумом потенциальной энергии.

1. Построение вариационных принципов (ВП). Для многих задач механики сплошных сред ВП записываются в виде

$$\inf_{\mathbf{c}\in M} I_1(\mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{c}\in M}\left[\int_{\Omega} (\varphi(\mathbf{Y}) + f(\mathbf{c}))d\Omega + \int_{\Gamma} F(\mathbf{c})d\Gamma\right] \tag{1.1}$$

где $\varphi(\mathbf{Y})$ – выпуклый гладкий функционал, $f(\mathbf{c})$, $F(\mathbf{c})$ – линейные функционалы относительно компонент вектора $\mathbf{c}$; $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{c})$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\Omega)$ (например, $\mathbf{c}$ – вектор перемещений, $\mathbf{Y}(\mathbf{c})$ – тензор деформаций, c – давление, $\mathbf{Y}(\mathbf{c})$ – градиент давления), в частном случае $\mathbf{Y} = \mathbf{c}(\Omega)$; Ω – область решения, Γ – граница области Ω. Далее пусть для определенной краевой задачи существуют решение и ВП (1.1). Условия, при которых существует решение задачи, и вопросы единственности в работе не обсуждаются. В ВП (1.1) требуется установить вид функционалов $\varphi(\mathbf{Y})$, $f(\mathbf{c})$, $F(\mathbf{c})$, а также множество ограничений M, накладываемых на $\mathbf{c}$.

Введем следующие обозначения для переменных на решении $(\cdot) = (\cdot)^\circ$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}^\circ$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{c}^\circ) = \mathbf{Y}^\circ$. Задаче (1.1) поставим в соответствие вариационную задачу

$$\inf_{\mathbf{Y}} B_1^\circ(\mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{Y}} \int_{\Omega} [\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}^\circ \mathbf{Y}]d\Omega \tag{1.2}$$

эквивалентную соотношению $\mathbf{X}^\circ = \operatorname{grad}\varphi(\mathbf{Y}^\circ)$ [1, 2], где $\mathbf{XY} = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k$. Вектор $\mathbf{Y}^\circ$ – решение задачи (1.2), вектор $\mathbf{c}^\circ$ – решение задач (1.1) и (1.2). Задача (1.2) тривиальна, так как для определения $\mathbf{Y}^\circ$ необходимо знать величину $\mathbf{X}^\circ$ во всей области решения задачи Ω.

Для построения полноценного ВП необходимо преобразовать задачу (1.2) к виду (1.1). Преобразования задачи (1.2) являются допустимыми, если решения вариационных задач, связанных преобразованиями, достигаются на одном и том же поле переменных **c**°. Подобная вариационная задача

$$\inf_{\mathbf{X}} B_2^\circ(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{X}} \int_{\Omega} [\varphi^*(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}\mathbf{Y}^\circ] d\Omega \tag{1.3}$$

записывается для построения ВП

$$\inf_{\mathbf{b}\in M^*} I_2(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{b}\in M^*} \left[\int_{\Omega} (\varphi^*(\mathbf{X}) + f^*(\mathbf{b})) d\Omega + \int_{\Gamma} F^*(\mathbf{b}) d\Gamma \right] \tag{1.4}$$

двойственного к (1.1), где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{b})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\Omega)$, $\varphi^*(\mathbf{X})$ – сопряженный функционал, связанный с $\varphi(\mathbf{Y})$ преобразованием Юнга–Фенхеля [3]

$$\varphi^*(\mathbf{X}) = \sup_{\mathbf{Y}} [\mathbf{X}\mathbf{Y} - \varphi(\mathbf{Y})]$$

В зависимости от характера задачи функционал $\varphi(\mathbf{Y})$ в (1.1) выбирается из соображений минимума потенциальной энергии или минимума скорости накопления и диссипации энергии. Из функционала $\varphi(\mathbf{Y})$ преобразованием Юнга – Фенхеля по части переменных $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_k)$ определяются частично сопряженные функционалы

$$\varphi(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) = \sup_{\mathbf{Y}_{mk}} [\mathbf{X}_{mk}\mathbf{Y}_{mk} - \varphi(\mathbf{Y})]$$

где $\mathbf{Y}_{0m} = (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_m)$, $\mathbf{Y}_{mk} = (\mathbf{Y}_{m+1}, \ldots, \mathbf{Y}_k)$. Вариационная задача для построения ВП, двойственного по части переменных, будет иметь тогда вид

$$\inf_{\mathbf{Y}_{0m}} \sup_{\mathbf{X}_{mk}} B_3^\circ(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) = \inf_{\mathbf{Y}_{0m}} \sup_{\mathbf{X}_{mk}} \int_{\Omega} [-\varphi(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) - \mathbf{X}_{0m}^\circ \mathbf{Y}_{0m} + \mathbf{X}_{mk} \mathbf{Y}_{mk}^\circ] d\Omega \tag{1.5}$$

Вместо задач (1.2), (1.3), (1.5) при построении ВП можно исходить из вариаций

$$\delta B_1^\circ(\mathbf{Y}) = \int_{\Omega} [\delta\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}^\circ \delta\mathbf{Y}] d\Omega, \quad \delta B_2^\circ(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} [\delta\varphi^*(\mathbf{X}) - \mathbf{Y}^\circ \delta\mathbf{X}] d\Omega$$

$$\delta B_3^\circ(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) = \int_{\Omega} [-\delta\varphi(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) - \mathbf{X}_{0m}^\circ \delta\mathbf{Y}_{0m} + \mathbf{Y}_{mk}^\circ \delta\mathbf{X}_{mk}] d\Omega$$

равенство нулю которых

$$\delta B_1^\circ(\mathbf{Y}) = 0, \quad \delta B_2^\circ(\mathbf{X}) = 0, \quad \delta B_3^\circ(\mathbf{Y}_{0m}, \mathbf{X}_{mk}) = 0 \tag{1.6}$$

эквивалентно выполнению определяющих соотношений между **X** и **Y**.

Вариационные задачи, подобные (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), можно записать для любых выпуклых гладких функционалов, связывающих произвольные двойственные переменные **X**, **Y** соотношением $\mathbf{X} = \mathrm{grad}\varphi(\mathbf{Y})$ или $\mathbf{Y} = \mathrm{grad}\varphi^*(\mathbf{X})$, и использовать при построении ВП.

Изложенные выше утверждения справедливы для субградиентных отношений между **Y** и **X** [2]

$$\mathbf{X} \in \partial\varphi(\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} \in \partial\varphi^*(\mathbf{X})$$

где $\varphi(\mathbf{Y})$ – выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, **X** – субградиент функционала $\varphi(\mathbf{Y})$ в точке **Y**, $\partial\varphi(\mathbf{Y})$ – множество всех субградиентов функционала $\varphi(\mathbf{Y})$ в точке **Y**, состоящее в случае гладкого $\varphi(\mathbf{Y})$ из одного элемента $\mathrm{grad}\varphi(\mathbf{Y})$. Результаты обобщаются на задачи с определяющими соотношениями непотенциального вида, при этом строятся вариационные уравнения.

2. Вариационные принципы для уравнений переноса. Построим ВП для системы уравнений переноса в стационарном случае

$$\mathrm{div}\,\mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^{k} Q_{ji} + \sigma_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots k \tag{2.1}$$

$$\partial\Psi(\mathbf{I}) / \partial\mathbf{J}_i = -\nabla p_i, \quad \partial\Psi(\mathbf{I}) / \partial Q_{ji} = p_j - p_i \tag{2.2}$$

или

$$\partial\Phi(\mathbf{P})/\partial\nabla p_i = -\mathbf{J}_i, \quad \partial\Phi(\mathbf{P})/\partial(p_j - p_i) = Q_{ji}$$

где $\Psi(\mathbf{I})$ – диссипативный потенциал, $\mathbf{I} = (\mathbf{J}_1,\ldots, \mathbf{J}_k, Q_{21},\ldots, Q_{k1}, Q_{32},\ldots, Q_{k2},\ldots, Q_{k,k-1})$ – термодинамические потоки, Q_{ij} – плотности внутренних источников ($Q_{ij} = Q_{ji}$, $Q_{ii} = 0$), $\overset{*}{\sigma}_i$ – заданные плотности внешних источников, $\Phi(\mathbf{P}) = \sup_{\mathbf{I}}[-\mathbf{J}_i\nabla p_i + \frac{1}{2}Q_{ji}(p_j - p_i) - -\Psi(\mathbf{I})]$ – сопряженный диссипативный потенциал, $\mathbf{P} = (-\nabla p_1,\ldots,-\nabla p_k, p_2 - p_1,\ldots \ldots, p_k - p_1, p_3 - p_2,\ldots, p_k - p_2,\ldots, p_k - p_{k-1})$ – термодинамические силы. В случае несвязанных механизмов диссипации [4]

$$\Psi(\mathbf{I}) = \sum_{i=1}^{k} \Psi_i + \sum_{j>i}^{k} \Psi_{ji}, \quad \Psi_i = \Psi_i(\mathbf{J}_i), \quad \Psi_{ji} = \Psi_{ji}(Q_{ji})$$

$$\Phi(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{k} \Phi_i + \sum_{j>i}^{k} \Phi_{ji}, \quad \Phi_i = \Phi_i(\nabla p_i), \quad \Phi_{ji} = \Phi_{ji}(p_j - p_i)$$

имеем

$$\partial\Psi_i/\partial\mathbf{J}_i = -\nabla p_i, \quad \partial\Psi_{ji}/\partial Q_{ji} = p_j - p_i \tag{2.3}$$

Здесь и далее при построении конкретных ВП потенциалы будем считать гладкими и выпуклыми.

Из соображений минимума скорости диссипации энергии для построения ВП в переменных $\mathbf{I}$ будем исходить из вариационной задачи (1.2), где $\varphi(\mathbf{Y}) = \Psi(\mathbf{I})$, $\mathbf{Y} = \mathbf{c} = \mathbf{I}$. Преобразуем задачу (1.2), используя (2.1), (2.2), к ВП, в котором не требовалось бы знание $\mathbf{P}°$ во всей области Ω

$$\inf_{\mathbf{I}} \int_{\Omega} (\Psi(\mathbf{I}) - \mathbf{P}°\mathbf{I})d\Omega = \inf_{\mathbf{I}} \int_{\Omega} (\Psi(\mathbf{I}) + \mathbf{J}_i\nabla p_i^\circ - \sum_{j>i}^{k} Q_{ji}(p_j^\circ - p_i^\circ))d\Omega =$$

$$= \inf_{\mathbf{I}}\left[\int_{\Omega} (\Psi(\mathbf{I}) - p_i^\circ \operatorname{div}\mathbf{J}_i - \sum_{j>i}^{k} Q_{ji}(p_j^\circ - p_i^\circ))d\Omega + \int_{\Gamma} J_{in}p_i^\circ d\Gamma\right] =$$

$$= \inf_{\mathbf{I}}\left[\int_{\Omega} \left(\Psi(\mathbf{I}) - p_i^\circ\left(\operatorname{div}\mathbf{J}_i - \sum_{j=i}^{k} Q_{ji}\right)\right)d\Omega + \int_{\Gamma} J_{in}p_i^\circ d\Gamma\right] =$$

$$= \inf_{\mathbf{I}\in(2.1)}\left[\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{I})d\Omega + \int_{\Gamma} J_{in}p_i^\circ d\Gamma\right] - \int_{\Omega} p_i^\circ\sigma_i^* d\Omega$$

Задав граничные условия

$$J_{in} = J_{in}^\circ \quad \text{на} \quad \Gamma_{iq}, \quad \Gamma_{iq} + \Gamma_{ip} = \Gamma, \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{2.4}$$

и отбросив слагаемые постоянной величины получим ВП

$$\inf_{\mathbf{I}\in(2.1),(2.4)} I_1(\mathbf{I}) = \inf_{\mathbf{I}\in(2.1),(2.4)}\left[\int_{\Omega} \Psi(\mathbf{I})d\Omega + \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_{ip}} J_{in}p_i^\circ d\Gamma\right] \tag{2.5}$$

Построим несколько ВП, двойственных к (2.5) по части переменных, считая для наглядности диссипативные механизмы несвязанными. Для построения ВП в переменных $\mathbf{I}_m$, $\mathbf{P}_{mk}$, $\mathbf{I}_q$ будем исходить из вариации $\delta\overset{\circ}{B}_3(\mathbf{I}_m, \mathbf{P}_{mk}, \mathbf{I}_q)$, где

$$\mathbf{I}_m = (\mathbf{J}_1,\ldots,\mathbf{J}_m), \quad \mathbf{P}_{mk} = (-\nabla p_{m+1},\ldots,-\nabla p_k), \quad \mathbf{I}_q = (Q_{21},\ldots,Q_{k1},Q_{32},\ldots,Q_{k2},\ldots,Q_{k,k-1})$$

Введя обозначения

$$\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)=\Psi_m(\mathbf{I}_m)-\Phi_{mk}(\mathbf{P}_{mk})+\Psi_q(\mathbf{I}_q)$$

$$\Psi_m(\mathbf{I}_m)=\sum_{i=1}^{m}\Psi_i,\quad \Phi_{mk}(\mathbf{P}_{mk})=\sum_{i=m+1}^{k}\Phi_i,\quad \Psi_q(\mathbf{I}_q)=\sum_{j>i}^{k}\Psi_{ji}$$

после преобразований получим

$$\delta B_3^\circ(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)=\int_\Omega\left(\delta\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)+\sum_{i=1}^{m}\nabla p_i^\circ\delta\mathbf{J}_i-\sum_{i=m+1}^{k}\mathbf{J}_i^\circ\delta\nabla p_i-\right.$$

$$\left.-\sum_{j>i}^{k}(p_j^\circ-p_i^\circ)\delta Q_{ji}\right)d\Omega=\int_\Omega\left(\delta\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)+\sum_{i=1}^{m}\operatorname{div}(p_i^\circ\delta\mathbf{J}_i)-\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{m}p_i^\circ\operatorname{div}\delta\mathbf{J}_i-\sum_{i=m+1}^{k}\operatorname{div}(\mathbf{J}_i^\circ\delta p_i)+\sum_{i=m+1}^{k}\operatorname{div}\mathbf{J}_i^\circ\delta p_i+\sum_{i=1}^{m}p_i^\circ\sum_{j=1}^{k}\delta Q_{ji}+$$

$$\left.+\sum_{i=m+1}^{k}p_i^\circ\sum_{j=1}^{k}\delta Q_{ji}\right)d\Omega=\int_\Omega\left(\delta\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)-\sum_{i=1}^{m}p_i^\circ\delta\left(\operatorname{div}\mathbf{J}_i-\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=m+1}^{k}\left(\operatorname{div}\mathbf{J}_i^\circ-\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}^\circ\right)\delta p_i+\sum_{i=m+1}^{k}\left(\delta p_i\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}^\circ+p_i^\circ\sum_{j=1}^{k}\delta Q_{ji}\right)\right)d\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_\Gamma p_i^\circ\delta J_{in}d\Gamma-\sum_{i=m+1}^{k}\int_\Gamma J_{in}^\circ\delta p_i d\Gamma$$

Используя равенства

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_i^\circ-\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}^\circ=\sigma_i^*,\quad \delta p_i\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}^\circ+p_i^\circ\sum_{j=1}^{k}\delta Q_{ji}=\delta\left(p_i\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}\right)$$

сохраняющие решение задачи, получим вариационное уравнение

$$\int_\Omega\left(\delta\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)-\sum_{i=1}^{m}p_i^\circ\delta\left(\operatorname{div}\mathbf{J}_i-\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}\right)+\sum_{i=m+1}^{k}\sigma_i^*\delta p_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=m+1}^{k}\delta\left(p_i\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}\right)\right)d\Omega+\sum_{i=1}^{m}\int_\Gamma p_i^\circ\delta J_{in}d\Gamma-\sum_{i=m+1}^{k}\int_\Gamma J_{in}^\circ\delta p_i d\Gamma=0 \tag{2.6}$$

При ограничениях на переменные

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_i=\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}+\sigma_i^*,\quad i=1,2,\ldots,m \tag{2.7}$$

$$J_{in}=J_{in}^\circ\quad\text{на}\quad\Gamma_{iq},\quad i=1,2,\ldots,m \tag{2.8}$$

$$p_i=p_i^\circ\quad\text{на}\quad\Gamma_{ip},\quad i=m+1,m+2,\ldots,k \tag{2.9}$$

из вариационного уравнения (2.6) следует ВП

$$\inf_{\mathbf{I}_m,\mathbf{I}_q\in(2.7),(2.8)}\ \sup_{\mathbf{p}_{mk}\in(2.9)} I_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{p}_{mk},\mathbf{I}_q) \tag{2.10}$$

где

$$I_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{p}_{mk},\mathbf{I}_q)=\int\limits_{\Omega}\left(\Psi_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{P}_{mk},\mathbf{I}_q)+\sum_{i=m+1}^{k}p_i\left(\sigma_i^*+\sum_{j=1}^{k}Q_{ji}\right)\right)d\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_{ip}}p_i^{\circ}J_{in}d\Gamma-\sum_{i=m+1}^{k}\int\limits_{\Gamma_{iq}}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma,\quad \mathbf{p}_{mk}=(p_{m+1},\ldots,p_k)$$

Подобным образом строятся и другие ВП. Например, ВП в переменных ($\mathbf{J}_1,\ldots,\mathbf{J}_m$, $p_1,\ldots,p_k$) и ($p_1,\ldots,p_k$) при условии

$$p_i=p_i^{\circ}\quad \text{на}\quad \Gamma_{ip},\quad i=1,2,\ldots,k \tag{2.11}$$

имеют вид

$$\inf_{\mathbf{I}_m\in(2.8)}\sup_{\mathbf{p}\in(2.9)}I_4(\mathbf{I}_m,\mathbf{p}),\qquad \inf_{\mathbf{p}\in(2.11)}I_2(\mathbf{p}) \tag{2.12}$$

где

$$I_4(\mathbf{I}_m,\mathbf{p})=\int\limits_{\Omega}\left(\Psi_m(\mathbf{I}_m)-\Phi_{mk}(\mathbf{P}_{mk})-\Phi_q(\mathbf{P}_q)-\sum_{i=1}^{m}p_i\operatorname{div}\mathbf{J}_i+p_i\sigma_i^*\right)d\Omega+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_{ip}}p_i^{\circ}J_{in}d\Gamma-\sum_{i=m+1}^{k}\int\limits_{\Gamma_{iq}}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma$$

$$I_2(\mathbf{p})=\int\limits_{\Omega}(\Phi(\mathbf{P})-p_i\sigma_i^*)d\Omega+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma_{iq}}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma$$

$$\Phi_q(\mathbf{P}_q)=\sum_{j>i}^{k}\Phi_{ji},\quad \mathbf{P}_q=(p_2-p_1,\ldots,p_k-p_1,p_3-p_2,\ldots,p_k-p_{k-1}),\quad \mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_k)$$

ВП в переменных $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_k)$ хорошо известен [5], здесь $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{b})$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}$. Непосредственной проверкой показывается, что ВП (2.5), (2.10), (2.12) эквивалентны решению системы уравнений (2.1), (2.2) при граничных условиях (2.4), (2.11), а также имеют место равенства

$$\inf_{\mathbf{I}\in(2.1),(2.4)}I_1(\mathbf{I})=\sup_{\mathbf{p}\in(2.11)}[-I_2(\mathbf{p})]=\inf_{\mathbf{I}_m\in(2.8)}\sup_{\mathbf{p}\in(2.9)}I_4(\mathbf{I}_m,\mathbf{p})=$$

$$=\inf_{\mathbf{I}_m,\mathbf{I}_q\in(2.7),(2.8)}\sup_{\mathbf{p}_{mk}\in(2.9)}I_3(\mathbf{I}_m,\mathbf{p}_{mk},\mathbf{I}_q)$$

При выводе ВП не требовалось знания граничных условий. Задаваемые на границе комбинации искомых переменных, при которых существует решение задачи, легко выявляются из анализа граничных интегралов. Так, при получении функционала $I_2(\mathbf{p})$ без учета граничных условий, граничные интегралы должны браться по всей границе Г:

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma$$

что соответствует выполнению граничных условий $J_{in}=\overset{\circ}{J}_{in}$ на Γ_q ($i=1,2,\ldots,k$).

Для учета граничных условий (2.4), (2.11) варьируемые переменные p_i должны удовлетворять условию (2.11). Тогда

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma_{iq}}J_{in}^{\circ}p_i d\Gamma+\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\Gamma_{ip}}J_{in}^{\circ}p_i^{\circ}d\Gamma$$

и интегралы по Γ_{ip} можно опустить как постоянные величины. При равенстве $p_i = p_c$ на Γ_{iq}, $\Gamma_{iq} = \Gamma_q$ ($i = 1, 2,\dots, k$) для определения решения достаточно задания нормальной составляющей $J_n^\circ = J_{1n}^\circ + \dots + J_{kn}^\circ$:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_{iq}} J_{in}^\circ p_i d\Gamma = \int_{\Gamma_q} J_n^\circ p_c d\Gamma$$

При $p_c = \text{const}$ на Γ_q для определения решения достаточно задания на Γ_q суммарного расхода G°:

$$\int_{\Gamma_q} J_n^\circ p_c d\Gamma = G^\circ p_c \quad \left(G^\circ = \int_{\Gamma_q} J_n^\circ d\Gamma \right)$$

где p_c – величина, хотя и постоянная на Γ_q, но не известная.

3. Вариационные принципы фильтрационной консолидации для деформируемой среды сложной реологии. Систему уравнений фильтрационной консолидации [6] запишем в виде

$$\sigma_{ij,j}^f - p_{,i} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{q} + \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = 0 \tag{3.1}$$

$$-\mathbf{q} = \partial\Phi_p(\nabla p)/\partial\nabla p \quad \text{или} \quad -\nabla p = \partial\Psi_q(\mathbf{p})/\partial\mathbf{q} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}^f = F_{ij}(\varepsilon_{ij}, e_{ij}) \tag{3.3}$$

где (3.1) – балансовые уравнения, (3.2), (3.3) – определяющие соотношения для жидкой и твердой фаз, $\Psi_q(\mathbf{q})$, $\Phi_p(\nabla p)$ – диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы для жидкой фазы, $\mathbf{q}$ – скорость фильтрации, p – давление, σ_{ij}^f – компоненты тензора эффективных напряжений, u_i – компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$, $\varepsilon_{ij} = {}^1\!/\!{}_2(u_{i,j} + u_{j,i})$ – компоненты тензора деформаций $\boldsymbol{\epsilon}, e_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$. Твердая фаза моделируется вязким элементом, последовательно соединенным с элементом Кельвина – Фойхта [4]. В вязком элементе диссипативный механизм определяется потенциалом $\Psi_1(\mathbf{e}_1)$, в элементе Кельвина – Фойхта диссипативный механизм определяется потенциалом $\Psi_2(\mathbf{e}_2)$, механизм накопления потенциалом $W_3(\boldsymbol{\epsilon}_3)$. Определяющие соотношения (3.3), таким образом, имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{1ij} = \partial\Psi(\mathbf{e}_1)/\partial e_{1ij}, \quad \sigma_{2ij} = \partial\Psi_2(\mathbf{e}_2)/\partial e_{2ij}, \quad \sigma_{3ij} = \partial W_3(\boldsymbol{\epsilon}_3)/\partial\varepsilon_{3ij} \\ \sigma_{ij}^f = \sigma_{1ij} = \sigma_{2ij} + \sigma_{3ij}, \quad e_{ij} = e_{1ij} + e_{2ij}, \quad e_{2ij} = e_{3ij}\end{gathered} \tag{3.4}$$

Построим ВП в переменных $\mathbf{u}$ и p, обычно используемых при численном решении задач консолидации. Из соображений минимума скорости диссипации и накопления энергии вариационное уравнение, соответствующее задаче (1.2), следующее:

$$\delta\int_{\Omega} \left(\Psi_1(\mathbf{e}_1) + \Psi_2(\mathbf{e}_2) + \dot{W}_3(\boldsymbol{\epsilon}_3) + \Psi_q(\mathbf{q}) - \sum_{k=1}^{3} \sigma_{kij}^\circ e_{kij} + \nabla p^\circ \mathbf{q}\right) d\Omega = 0 \tag{3.5}$$

где $\dot{\mathbf{u}}^1$, $\dot{\mathbf{u}}^2$, $\dot{\mathbf{u}}^3$, $\mathbf{q}$ – варьируемые переменные, $\dot{W}_3(\boldsymbol{\epsilon}_3) = (\partial W_3(\boldsymbol{\epsilon}_3)/\partial\varepsilon_{3ij})\dot{\varepsilon}_{3ij}$, $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$, $\mathbf{u}^3$ – векторы перемещений для элементов 1–3 соответственно. Отсюда заключаем, что вариационное уравнение для построения ВП в переменных $\dot{\mathbf{u}}^1$, $\dot{\mathbf{u}}^2$, $\dot{\mathbf{u}}^3$, p при учете равенства $\dot{\mathbf{u}}^2 = \dot{\mathbf{u}}^3$ имеет вид

$$\delta I(\dot{\mathbf{u}}^1, \dot{\mathbf{u}}^2, p) = \delta\int_{\Omega} \left(\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1, \dot{\mathbf{u}}^2, p) - \sum_{k=1}^{3} \sigma_{kij}^\circ e_{kij} - \mathbf{q}^\circ \nabla \mathbf{p} \right) d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

где

$$\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)=\Psi_1(\mathbf{e}_1)+\Psi_2(\mathbf{e}_2)+\dot{W}_3(\boldsymbol{\epsilon}_2)-\Phi_p(\nabla p)$$

Видно, что уравнения (3.5), (3.6) эквивалентны выполнению определяющих соотношений (3.2), (3.3). Из (3.6) после преобразований получим

$$\delta I(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)=\int\limits_{\Omega}(\delta\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-\sigma_{ij}^{f\circ}\delta e_{1ij}-(\overset{\circ}{\sigma}_{2ij}+\overset{\circ}{\sigma}_{3ij})\delta e_{2ij}-q_i^\circ\delta p_{,i})d\Omega=$$

$$=\int\limits_{\Omega}(\delta\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-\sigma_{ij}^{f\circ}\delta e_{ij}-q_i^\circ\delta p_{,i})d\Omega=$$

$$=\int\limits_{\Omega}(\delta\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-\sigma_{ij}^{f\circ}\delta\dot{u}_{i,j}+p^\circ\delta\dot{u}_{i,i}-p^\circ\delta\dot{u}_{i,i}-\dot{u}_{i,i}^\circ\delta p+\dot{u}_{i,i}^\circ\delta p+q_{i,i}^\circ\delta p)d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}q_n^\circ\delta p d\Gamma=\int\limits_{\Gamma}(\delta\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-(\sigma_{ij}^{f\circ}-p^\circ\delta_{ij})\delta\dot{u}_{i,j}-(p^\circ\delta\dot{u}_{i,i}+\delta p\dot{u}_{i,i}^\circ)+$$

$$+(u_{i,i}^\circ+q_{i,i}^\circ)\delta p)d\Omega-\int\limits_{\Gamma}q_n^\circ\delta p d\Gamma=\int\limits_{\Omega}(\delta\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)+(\sigma_{ij}^{f\circ}-p^\circ\delta_{ij})_{,j}\delta\dot{u}_i-$$

$$-(p^\circ\delta\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}+\delta p\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}^\circ)+(\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}^\circ+\operatorname{div}\mathbf{q}^\circ)\delta p)d\Omega-\int\limits_{\Gamma}\Pi_i^\circ\delta\dot{u}_i d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}q_n^\circ\delta p d\Gamma,$$

$$\Pi_i=(\sigma_{ij}^f-p\delta_{ij})n_j$$

Используя следующие замены в вариации функционала

$$(\sigma_{ij}^{f\circ}-p^\circ\delta_{ij})_{,j}=0,\quad \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}^\circ+\operatorname{div}\mathbf{q}^\circ=0$$

$$p^\circ\delta\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}+\delta p\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}^\circ=\delta(p\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}})$$

сохраняющие решение задачи $\dot{u}^\circ$, p° в (3.6), получим вариационное уравнение

$$\delta\int\limits_{\Omega}(\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-p\operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}^1+\dot{\mathbf{u}}^2))d\Omega-\int\limits_{\Gamma}\Pi_i^\circ\delta(\dot{u}_i^1+\dot{u}_i^2)d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}q_n^\circ\delta p d\Gamma=0 \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.7) следует ВП

$$\inf_{\dot{\mathbf{u}}^1,\,\dot{\mathbf{u}}^2,}\ \sup_{p} I(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p) \tag{3.8}$$

эквивалентный решению системы уравнений (3.1), (3.2), (3.4) при граничных условиях $\Pi_i=\Pi_i^\circ$, $q_n=q_n^\circ$ на Г, где

$$I(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)=\int\limits_{\Omega}(\Psi(\dot{\mathbf{u}}^1,\dot{\mathbf{u}}^2,p)-p\operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}^1+\dot{\mathbf{u}}^2))d\Omega-\int\limits_{\Gamma}\Pi_i^\circ(\dot{u}_i^1+\dot{u}_i^2)d\Gamma-\int\limits_{\Gamma}q_n^\circ p d\Gamma$$

Поле деформаций $\boldsymbol{\epsilon}_2=\boldsymbol{\epsilon}_2(t)$ в ВП (3.8) определяет накопление упругой энергии на момент времени t. ВП (3.8) справедлив в случае, когда потенциалы $\Psi_1(\mathbf{e}_1)$, $\Psi_2(\mathbf{e}_2)$ недифференцируемые и характеризуют движение вязкопластических и жесткопластических сред [7]. По аналогии с предыдущим разделом строятся ВП в других наборах переменных и определяются различные комбинации допустимых краевых условий. Отметим, что отдельные ВП [8–12][1], полученные различными методами, выводятся по предложенной схеме. Подобная схема использовалась для построения ВП в теориях фильтрации и консолидации [13–15][2].

---

[1] См. также: *Костерин А.В.* Вариационный принцип фильтрационной консолидации. Казанский ун-т, Казань, 1986. 7с. – Деп. в ВИНИТИ 16.12.86, N 8598-В.

[2] См. также: *Мазуров П.А.* Вариационный подход в теориях фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации. Казан. физ.-техн. ин-т КФ АН СССР, Казань, 1989. 24с. – Деп. в ВИНИТИ 20.04.89, N 2586-В.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
2. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 492 с.
3. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
4. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
5. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика: Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
6. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
7. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
8. *Sandhu R.S., Wilson E.L.* Finite element analysis of seepage in elastic media // J. Eng. Mech. Div., ASCE. 1969. V. 95. № 3. P. 641–652.
9. *Sandhu R.S., Liu H.* Analysis of consolidation of viscoelastic soils // Numer. Meth. Geomech.: Proc. 3rd. Intern. Conf. Aachen, 1979; Rotterdam, 1980. V. 4. P. 1255–1263.
10. *Niiseki S., Satake M.* Variational principles for nonlinear consolidation problem // Numer. Meth. Geomech.: Proc. 3rd. Intern. Conf. Aachen, 1979; Rotterdam, 1979. V. 1. P. 175–180.
11. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
12. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 244 с.
13. *Мазуров П.А.* Вариационный подход в теориях фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 77–86.
14. *Мазуров П.А.* Построение вариационных принципов двухфазной фильтрации в деформируемой среде // ПМТФ. 1992. № 5. С. 76–82.
15. *Мазуров П.А.* Вариационные принципы фильтрации несжимаемой жидкости в средах с двойной пористостью // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 65–70.

Поступила в редакцию 5.V.1995

Казань