

УДК 62–50

© 1997 г. Н.В. Мельникова, А.М. Тарасьев

ГРАДИЕНТЫ ЛОКАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК В КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ

Предлагается конечно-разностный оператор (КРО) для уравнения Гамильтона – Якоби, в котором несуществующие градиенты решений заменяются градиентами линейных оболочек. Доказывается, что соответствующие этому КРО аппроксимационная схема (АС) минорируется и мажорируется АС с КРО, основанными на конструкциях суб- и супердифференциалов локальных выпуклых и вогнутых оболочек. Это позволяет обосновать сходимость АС с линейными конструкциями. Рассматриваются модификации КРО, которые учитывают расположение локальных областей достижимости. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача построения конечно-разностного оператора (КРО), основанного на линейных конструкциях, для аппроксимационных схем (АС) решения уравнения Гамильтона – Якоби. Используются результаты теории оптимального гарантированного управления [1, 2], выпуклого и негладкого анализа [3, 4], общей теории обобщенного (минимаксного, вязкостного) решения для уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона – Якоби [5, 6].

Ранее были разработаны КРО разных типов [7–12]. В частности [11, 12], рассматривались КРО с суб- и супердифференциалами локальных выпуклых и вогнутых оболочек, доказана сходимость соответствующих АС. Такие АС обладают рядом достоинств. Вместе с тем построение локальных выпуклых и вогнутых оболочек – трудоемкая вычислительная процедура, требующая сложных программ и значительных ресурсов ЭВМ. Поэтому актуально применение линейных конструкций в КРО и обоснование сходимости соответствующих АС.

Предлагается использовать локальные линейные оболочки решений, которые строятся по методу наименьших квадратов. Доказательство сходимости АС с КРО такого типа основано на обосновании отношений порядка, связывающих локальные линейные оболочки с локальными выпуклыми (вогнутыми) оболочками. Отметим простоту реализации формул метода наименьших квадратов для построения градиентов локальных линейных оболочек по сравнению с алгоритмами вычисления суб- и супердифференциалов локальных выпуклых и вогнутых оболочек [11, 12].

Рассматриваются модификации КРО с суб- и супердифференциалами выпуклых и вогнутых оболочек и градиентами линейных оболочек, в которых локальные построения выполняются в окрестностях, максимально приближенных к областям достижимости. Такие КРО значительно сокращают вычислительные затраты по сравнению с КРО в окрестностях, симметричных относительно центра области достижимости.

Предлагаемая АС была применена для решения ряда задач гарантированного управления, в которых использовались постановки из работ [13 – 16]. Приводится решение эволюционной игры [15, 16], демонстрирующее эффективность АС с градиентами локальных линейных оболочек.

2. Задача гарантированного управления и краевая задача для уравнения Гамильтона – Якоби. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(t, x, \frac{\partial w}{\partial x}) = 0, (t, x) = (t_0, \theta) \times R^n \quad (2.1)$$

$$w(\theta, x) = \sigma(x), x \in R^n \quad (2.2)$$

Будем полагать, что этой краевой задаче отвечает задача гарантированного управления для динамической системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) = h(t, x) + b(t, x)u + c(t, x)v \quad (2.3)$$

$$t \in T = [t_0, \theta], x \in R^n, u \in P \subset R^p, v \in Q \subset R^q$$

с терминальным функционалом платы

$$\gamma(x(\cdot)) = \sigma(x(\theta)) \quad (2.4)$$

Здесь x – n -мерный вектор системы, u – управляющее воздействие, v – вектор помехи. Множества P, Q – выпуклые компакты.

Функция $H(t, x, s) : T \times R^n \times R^n \rightarrow R$ из уравнения (2.1) является гамильтонианом для системы (2.3), т.е. связана с динамикой $f(t, x, u, v)$ соотношением

$$H(t, x, s) = \langle s, h(t, x) \rangle + \min_{u \in P} \langle s, b(t, x)u \rangle + \max_{v \in Q} \langle s, c(t, x)v \rangle \quad (2.5)$$

Пусть для правой части $f(t, x, u, v)$ системы (2.3) выполнены общепринятые условия: непрерывность по Липшицу относительно переменных t, x и условие продолжимости решений.

Определим компактную область $G_r \in T \times R^n$, $r > 0$, в которой будем рассматривать уравнение (2.1) и систему (2.3), условием инвариантности: если $(t_*, x_*) \in G_r$, то $(t, x_* + (t - t_*)B_r) \in G_r$ при всех $t \in [t_*, \theta]$, $B_r = \{b \in R^n : \|b\| \leq r\}$, где $r > K$, причем

$$K = \max_{(t, x, u, v) \in G \times P \times Q} \|f(t, x, u, v)\| \quad (2.6)$$

– скорость системы, определяемая на замкнутом множестве G , удовлетворяющем условию сильной инвариантности относительно дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), t \in [t_*, \theta], x(t_*) = x_*$$

$$F(\tau, y) = \{f \in R^n : f = f(\tau, y, u, v), u \in P, v \in Q\}, (\tau, y) \in T \times R^n$$

Ясно, что $G_r \subset G$.

В силу приведенных выше условий для правой части системы (2.3) гамильтониан $H(t, x, s) : G_r \times R^n \rightarrow R$ удовлетворяет условиям непрерывности по Липшицу и положительной однородности по переменной s .

Основная роль в решении задачи (2.3), (2.4) принадлежит функции цены $(t, x) \rightarrow w(t, x) : G_r \rightarrow R$, определяемой для начальной позиции (t_*, x_*) , позиционных стратегий $U = U(t, x)$ и соответствующих траекторий $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U)$ формулой

$$w(t_*, x_*) = \min_U \max_{x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U)} \sigma(x(\theta)) \quad (2.7)$$

Оптимальные стратегии могут быть построены, например, методом экстремального сдвига на сопутствующие точки локальных экстремумов функции w [1]. Известно [5], что функция цены w является обобщенным минимаксным решением краевой задачи (2.1), (2.2). Поэтому для построения функции цены можно использовать АС для уравнения Гамильтона – Якоби.

3. Выпуклые, вогнутые и линейные оболочки кусочно-линейных функций. Здесь решается вспомогательная задача об отношениях, связывающих локальные выпуклые (вогнутые) и линейные оболочки.

Рассмотрим в метрике

$$\rho_1(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x^i - y^i| \quad (3.1)$$

n -мерную окрестность $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1) = \{y, \rho_1(x, y) \leq r_1, x, y \in R^n\}$.

Окрестность $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$ представляет собой n -мерный куб, на который накладывается равномерная сетка с шагом $\delta = r_1/N$. Число точек разбиения по каждой оси равно $2N + 1$. Общее число узлов сетки обозначим $M, M = (2N + 1)^n$.

Заметим, что в этом случае радиус окрестности связан с шагом разбиения следующим равенством:

$$r_1 = N\delta \quad (3.2)$$

Пусть в узлах равномерной сетки y_k задана некоторая табличная функция

$$\bar{U} = \{(y_k, u(y_k)) : k = 1, \dots, M\} \quad (3.3)$$

Определим для этой функции следующие конструкции:

$L(y) : \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1) \rightarrow R$ – гиперплоскость, наиболее близкая в смысле квадратичного отклонения к функции \bar{U} ,

$f(y) : \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1) \rightarrow R$ – выпуклая оболочка для функции \bar{U} ,

$g(y) : \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1) \rightarrow R$ – вогнутая оболочка для функции \bar{U} .

Отметим, что в некоторой окрестности меньшего радиуса, обозначим ее $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_2), r_2 < r_1$, гиперплоскость $L(y)$ лежит между выпуклой и вогнутой оболочками. На вопрос, каким должно быть точное соотношение радиусов рассматриваемых окрестностей $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1), \bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$, отвечает следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть радиусы r_1, r_2 окрестностей $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1), \bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$ выбраны таким образом, что

$$\frac{r_1}{r_2} = 3n \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \quad (3.4)$$

Тогда

$$f(y) \leq L(y) \leq g(y), \quad y \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_2) \quad (3.5)$$

Доказательство. Локальные выпуклые (вогнутые) оболочки функции $u(y)$ в замкнутой окрестности $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$ точки x радиуса r определяются [3] как нижняя и верхняя грани:

$$f(y) = \inf \left\{ \sum_k \beta_k u(y_k) : \sum_k \beta_k y_k = y, \sum_k \beta_k = 1, \beta_k \geq 0 \right\} \quad (3.6)$$

$$y_k \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1), \quad y \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$$

$$g(y) = \sup \left\{ \sum_k \gamma_k u(y_k) : \sum_k \gamma_k y_k = y, \sum_k \gamma_k = 1, \gamma_k \geq 0 \right\} \quad (3.7)$$

$$y_k \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1), \quad y \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$$

Здесь и всюду далее $k = 1, \dots, M$.

Рассмотрим также линейную оболочку функции \bar{U} в $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$

$$L(y) = \langle A, y \rangle + B \quad (3.8)$$

Параметры $A \in R^n$, $B \in R$ определяются из условия минимума квадратичного отклонения функции $L(y)$ от табличных значений \bar{U} :

$$\min_{A, B} \sum_k [u(y_k) - (\langle A, y_k \rangle + B)]^2$$

Это условие приводит к системе линейных уравнений относительно A, B

$$\sum_k \langle A, y_k - x \rangle (y_k - x) = \sum_k u(y_k)(y_k - x) \quad (3.9)$$

$$B = -\langle A, x \rangle + \frac{1}{M} \sum_k u(y_k) \quad (3.10)$$

Функция $L(y)$ представляется соотношением

$$L(y) = \frac{1}{M} \sum_k u(y_k) + \frac{1}{\delta^2 a} \sum_{i=1}^n (y^i - x^i) \sum_k (y_k^i - x^i) u(y_k)$$

$$a = (2N+1)^n (N+1)N / 3$$

Используя равномерность сетки в окрестности $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$, преобразуем $L(y)$ к виду

$$L(y) = \frac{1}{M} \sum_k u(y_k) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{3\delta(y^i - x^i)}{M(N+1)N} \sum_{j=-N}^N j \sum_{s=1}^S u(y_s) \right] \quad (3.11)$$

$$y_s = y_s(i, j) = (y_s^1, \dots, x^i + j\delta, \dots, y_s^n)$$

$$y_s^l = x^l + m\delta, \quad m = -N, \dots, N, \quad l \neq i, \quad S = (2N+1)^{n-1}$$

Заметим, что формула (3.11) имеет структуру, аналогичную (3.6), (3.7), и может быть представлена как линейная комбинация:

$$L(y) = \sum_k \alpha_k u(y_k), \quad y_k \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1) \quad (3.12)$$

$$\alpha_k = \alpha_k(y) = \frac{1}{M} + \sum_{i=1}^n \frac{y^i - x^i}{\delta a} j_k^i, \quad j_k^i = \frac{y_k^i - x^i}{\delta}$$

Можно доказать, что коэффициенты α_k в (3.12) удовлетворяют двум условиям из определения выпуклых и вогнутых оболочек (3.6), (3.7)

$$\sum_k \alpha_k y_k = y, \quad \sum_k \alpha_k = 1, \quad y \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$$

Однако не во всей окрестности $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$ выполняется третье условие в (3.6), (3.7) – условие неотрицательности коэффициентов α_k .

Определим более узкую окрестность $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$, внутри которой все функции $\alpha_k(y)$ (3.12) будут неотрицательными. Пользуясь симметрией окрестности $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$ относительно центра, преобразуем систему неравенств $\alpha_k \geq 0$ к виду

$$\left| \sum_{i=1}^n j_l^i (y^i - x^i) \right| < (N+1)N\delta / 3, \quad l = 1..M/2$$

Полученная система редуцируется к эквивалентному неравенству

$$\sum_{i=1}^n |y^i - x^i| \leq \frac{(N+1)\delta}{3} = r_3$$

которое определяет окрестность $\bar{O}_{\rho_2}(x, r_3)$ радиуса r_3 с центром x в метрике ρ_2 , причем

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i| \quad (3.13)$$

При переходе к исходной метрике ρ_1 радиус окрестности уменьшается в n раз:

$$r_2 = r_3/n \quad (3.14)$$

Итак, в окрестности $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$ – коэффициенты α_k удовлетворяют всем трем условиям из (3.6), (3.7). Из (3.6), (3.7), (3.12) следует, что линейная комбинация $L(y)$ лежит между нижней гранью $f(y)$ и верхней гранью $g(y)$. Используя (3.2), (3.14), устанавливаем, что радиусы окрестностей $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_1)$, $\bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$ связаны соотношением

$$\frac{r_1}{r_2} = 3n \left(1 - \frac{1}{N+1} \right)$$

Замечание 3.1. Более эффективно для вычислительного процесса выполнять построение гиперплоскости $L(y)$ в окрестности

$$\bar{O}_{\rho_2}(x, r_1) = \{y, \rho_2(x, y) \leq r_1, x, y \in R^n\}$$

заданной в двойственной норме ρ_2 . В этом случае построения выполняются по узлам существенно меньшего множества (например, при $n = 2$ количество узлов уменьшается в 2 раза); соотношение (3.4) между радиусами r_1, r_2 окрестностей $\bar{O}_{\rho_2}(x, r_1), \bar{O}_{\rho_1}(x, r_2)$ сохраняется.

4. Линейный конечно-разностный оператор для уравнения Гамильтона – Якоби. Перейдем к решению поставленной задачи о построении функции цены $w(t, x)$ – являющейся решением краевой задачи (2.3), (2.4). Определим КРО для уравнения Гамильтона – Якоби. Пусть задан шаг дискретизации Δ интервала T и моменты времени $t, t + \Delta \in T$. Предположим, что в момент времени $t + \Delta$ определена непрерывная по Липшицу (с постоянной Липшица L) функция $x \rightarrow u(t + \Delta, x) = u(x)$, аппроксимирующая обобщенное решение $x \rightarrow w(t + \Delta, x)$. Значения функции $x \rightarrow u(t, x) = v(x)$, аппроксимирующей решение $x \rightarrow w(t, x)$ в момент времени t , определяются как значения КРО LA следующим образом:

$$v(x) = LA(t, \Delta, u)(x) = u_0 + \Delta H(t, x, A), \quad u_0 = \frac{1}{M} \sum_k u(y_k) \quad (4.1)$$

$u(y_k)$ – значения табличной функции \bar{U} (3.3) в узлах $y_k \in \bar{O}_{\rho_1}(x, r\Delta)$; A – градиент линейной функции $L(y)$, определяемой системой (3.9), (3.10) при $r_1 = r\Delta$.

Теорема 4.1. Пусть r и K связаны соотношением

$$\frac{r}{K} = 3n \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \quad (4.2)$$

Тогда АС с КРО $u \rightarrow LA(t, \Delta, u)$ сходится с оценкой сходимости $\Delta^{1/2}$.

Доказательство. При доказательстве сходимости будем опираться на отношение упорядоченности между гиперплоскостью, выпуклой и вогнутой оболочками (3.5) при $r_1 = K\Delta$, $r_2 = r\Delta$. С этой целью приведем формулы КРО локальных выпуклых (вогнутых) оболочек

$$v_*(x) = F_1(t, \Delta, u)(x) = f(x) + \max_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \max_{s \in D_* f(y)} (\Delta H(t, x, s) + f(y) - f(x) - \langle s, y - x \rangle) \quad (4.3)$$

$$v^*(x) = F_2(t, \Delta, u)(x) = g(x) + \min_{y \in \bar{O}(x, K\Delta)} \min_{s \in D^* g(y)} \{(\Delta H(t, x, s) + g(y) - g(x) - \langle s, y - x \rangle)\} \quad (4.4)$$

Здесь $f(y) : \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ – локальная выпуклая оболочка функции $u(y) = u(t + \Delta, y)$ в замкнутой окрестности $\bar{O}(x, r\Delta)$ точки x радиуса $r\Delta$, $r > K$. Множество $D_* f(y)$ – субдифференциал функции $f(y)$ в точке y

$$D_* f(y) = \{s \in R^n : f(z) - f(y) \geq \langle s, z - y \rangle, z \in \bar{O}(x, r\Delta)\}, y \in \bar{O}(x, K\Delta)$$

Функция $g(y) : \bar{O}(x, r\Delta) \rightarrow R$ – локально вогнутая оболочка функции $u(y)$. Множество $D^* g(y)$ – супердифференциал функции $g(y)$ в точке y

$$D^* g(y) = \{s \in R^n : g(z) - g(y) \leq \langle s, z - y \rangle, z \in \bar{O}(x, r\Delta)\}, y \in \bar{O}(x, K\Delta)$$

Отметим, что для приведенных выше операторов выполнены соотношения

$$LA(t, \Delta, u)(x) = F_1(t, \Delta, L)(x) = F_2(t, \Delta, L)(x) \quad (4.5)$$

Было доказано [11, 12], что F_1, F_2 обладают свойством монотонности:

$$F_i(t, \Delta, u_1)(y) \leq F_i(t, \Delta, u_2)(y)$$

$$\text{если } u_1(y) \leq u_2(y), y \in \bar{O}(x, K\Delta), i = 1, 2 \quad (4.6)$$

Из (3.4), (4.5), (4.6) следуют оценки

$$F_1(t, \Delta, u)(x) \leq LA(t, \Delta, u)(x) \leq F_2(t, \Delta, u)(x) \quad (4.7)$$

Было доказано также [11, 12], что АС с операторами F_1, F_2 сходятся с оценкой сходимости $\Delta^{1/2}$. Тогда неравенство (4.7) обеспечивает сходимость АС с КРО (4.1), основанном на градиентах локальных линейных оболочек.

Замечание 4.1. Полученный КРО может быть интерпретирован на элементарном n -мерном ромбе $R(x, \delta) = \{y \in R^n : \rho_2(x, y) < \delta\}$ фазового пространства в метрике ρ_2 (3.13) как оператор Лакса – Фридрикса [7]

$$LF(t, \Delta, u) = w(x) + \Delta H(t, x, a)$$

$$a = (a_1, \dots, a_n), a_i = \frac{u(x + \delta e_i) - u(x - \delta e_i)}{2\delta}, nK\Delta < \delta$$

e_i – единичные орты, $i = 1, \dots, n$.

5. Операторы с суб- и супердифференциалами локальных выпуклых и вогнутых оболочек и градиентами локальных линейных оболочек в несимметричных окрестностях. Отметим, что КРО LA, F_1, F_2 (4.1), (4.3), (4.4) определяются в симметричных окрестностях, размеры которых задаются максимальной скоростью системы (2.6), и могут быть довольно большими. При этом КРО не учитывают расположение в симметричной окрестности области достижимости $D(t, x, \Delta) = \{y \in R^n : y = x + \Delta f(t, x, u, v), u \in P, v \in Q\}$.

Замечание 5.1. КРО F_1, F_2 (4.3), (4.4) не зависят от симметрии окрестности и могут быть использованы для вычислений на любой окрестности, содержащей область достижимости $D(t, x, \Delta)$. В самой области достижимости операторы имеют вид

$$FD_1(t, \Delta, u)(x) = \max_{y \in D(t, x, \Delta)} \max_{s \in D_* f(y)} (\Delta H(t, x, s) + f(y) - \langle s, y - x \rangle)$$

$$FD_2(t, \Delta, u)(x) = \min_{y \in D(t, x, \Delta)} \min_{s \in D_* g(y)} (\Delta H(t, x, s) + g(y) - \langle s, y - x \rangle)$$

Здесь $y \rightarrow f(y) : \bar{O}(x, \eta\delta) \rightarrow R$ – выпуклая оболочка функции $y \rightarrow u(y)$ в окрестности $\bar{O}(x, \eta\delta)$, $D(t, x, \delta) \subset \bar{O}(x, \eta\delta)$, а $y \rightarrow g(y) : \bar{O}(x, \eta\delta) \rightarrow R$ – вогнутая оболочка этой функции.

КРО LA (4.1) может быть также обобщен на случай окрестности, максимально приближенной к области достижимости $D(t, x, \Delta)$ системы (2.3), (2.4), что может существенно уменьшить вычислительные затраты. Введем в рассмотрение n -мерный прямоугольник, содержащий область достижимости $D(t, x, \Delta)$:

$$P(t, x, \Delta) = \{y \in R^n : s^i \leq y^i \leq S^i, i = 1, \dots, n$$

$$s^i < \min_{d \in D(t, x, \Delta)} d^i, S^i > \max_{d \in D(t, x, \Delta)} d^i\}$$

Окрестность $P(t, x, \Delta)$ может быть определена эквивалентным образом

$$P(t, x, \Delta) = P(\bar{x}, q) = \{y \in R^n : |\bar{x}^i - y^i| \leq q^i, i = 1, \dots, n\}$$

Здесь $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ – центр, $q = (q^1, \dots, q^n)$ – размер окрестности $P(\bar{x}, q)$.

Предложение 5.1. Пусть $L(y) = \langle A, y \rangle + B$ – локальная линейная оболочка, построенная по методу наименьших квадратов в окрестности $P(\bar{x}, r)$, где вектор $r = (r^1, \dots, r^n)$ определяется соотношением

$$\frac{r^i}{q^i} = 3n \left(1 - \frac{1}{N^i + 1} \right), N^i = \frac{r^i}{\delta} \quad (5.1)$$

Тогда КРО LA (4.1) может быть модифицирован в АС следующим образом:

$$LAD(t, \Delta, u)(x) = u_0 + \Delta H(t, x, A) + \langle A, x - \bar{x} \rangle \quad (5.2)$$

6. Вычислительные эксперименты. Рассмотрим в качестве примера почти антогонистическую игру двух коалиций, которая условно моделирует борьбу за рынки сбыта. Пусть x – относительная часть капиталовложений первой коалиции в первый рынок, $0 \leq x \leq 1$, $(1-x)$ – относительная часть капиталовложений первой коалиции во второй рынок, y – относительная часть капиталовложений второй коалиции в первый рынок, $0 \leq y \leq 1$, $(1-y)$ – относительная часть капиталовложений второй коалиции во второй рынок. Считаем, что интересы коалиций задаются матрицами выигрышей

$$A = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Средние выигрыши коалиций определяются функциями

$$g_1 = C_a xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, g_2 = C_b xy - \beta_1 x - \beta_2 y + b_{22}$$

$$C_a = 12, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 3, C_b = -6, \beta_1 = -3, \beta_2 = -4$$

Система, описывающая динамику капиталовложений, моделируется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= px(1-x)(C_a y - \alpha_1) + (1-p)(-x+u), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq p \leq 1 \\ \dot{y} &= qy(1-y)(C_b x - \beta_2) + (1-q)(-y+v), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Скорость изменения капиталовложений первой коалиции \dot{x} формируется по двум причинам. Предположим, что имеется группа фирм в коалиции (их относительный вес $p = 0,8$), действующих из критерия получения наибольшей текущей прибыли $g_a(x, y)$. Поведение этой группы определяется частной производной $\partial g_a / \partial x = C_a y - \alpha_1$. Скорость вложения капитала этой группы задается первым слагаемым в первом уравнении (6.1) [17]. Второе слагаемое $(1-p) \cdot (-x+u)$ описывает скорость вложения той части фирм, которые придерживаются управляющего сигнала $u(t)$ от координирующего центра. Во втором уравнении скорость капиталовложения второй коалиции интерпретируется аналогично ($q = 0,8$).

Следуя подходу, описанному ранее [14, 16], определим выигрыш каждой коалиции интегральным функционалом с коэффициентом дисконтирования λ . Этот функционал можно рассматривать как глобальный выигрыш на бесконечном промежутке времени $[0, +\infty]$

$$J_i = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) g_i(x, y) dt, \quad i = 1, 2 \quad (6.2)$$

Для построения оптимальных управлений вышеизложенной игры необходимо рассмотреть две однотипные задачи гарантированного управления относительно функционалов J_1, J_2 [13]. Рассмотрим, например, первую из них. Функция цены $(x, y) \rightarrow w_1(x, y)$ является решением уравнения Гамильтона – Якоби

$$-\lambda w_1(x, y) - \frac{\partial w_1}{\partial x} x - \frac{\partial w_1}{\partial y} y + g_a(x, y) + \max \left\{ 0, \frac{\partial w_1}{\partial x} \right\} + \min \left\{ 0, \frac{\partial w_1}{\partial y} \right\} = 0 \quad (6.3)$$

АС для решения уравнения Гамильтона – Якоби при использовании КРО (5.1) определяется следующим образом.

Рассмотрим отрезок $[0, T]$ и разбиение $\Gamma = [t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = T]$ с шагом Δ . Зададим аппроксимационную функцию W следующей итерационной процедурой. Полагаем $W(T, x, y) = 0$. Пусть в некоторый момент времени $t + \Delta$ функция $W(t + \Delta, x, y)$ известна. В момент t функция $W(t, x, y)$ определяется соотношением

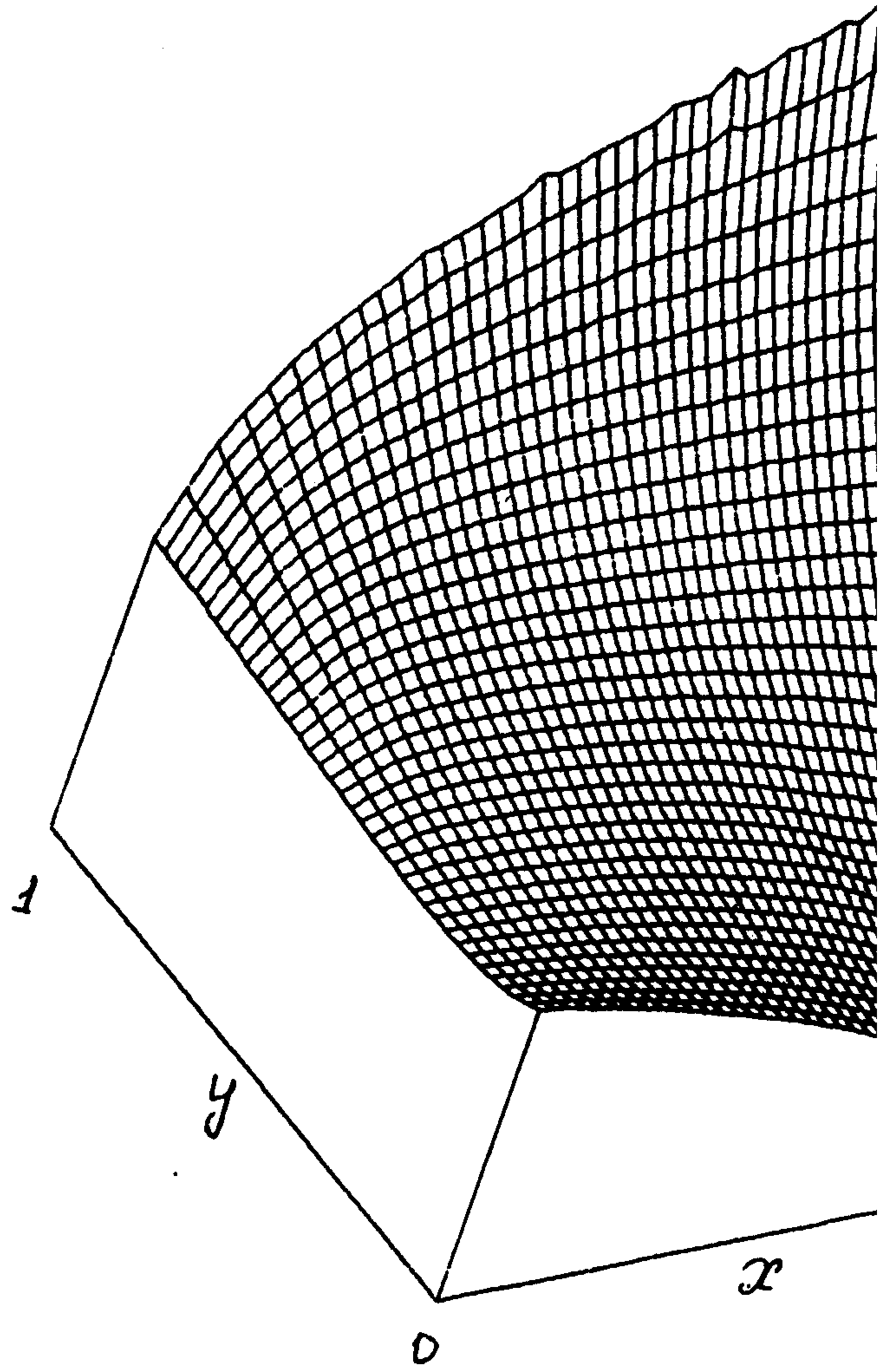
$$\begin{aligned} W(t + \Delta, x, y) &= \Delta g_1(x, y) + (1 - \lambda \Delta)(u_0 + \langle a_1, x - \bar{x} \rangle + \langle a_2, y - \bar{y} \rangle + \\ &+ \Delta(a_1(px(1-x)(C_a y - \alpha_1) - (1-p)x) - a_2(qy(1-y)(C_b x - \beta_2) - (1-q)y) + \\ &+ (1-p)\max\{a_1, 0\} + (1-q)\min\{a_2, 0\})) \end{aligned}$$

(a_1, a_2) – градиент локальной аппроксимации функции $W(t + \Delta, x, y)$ в окрестности псевдоцентра (\bar{x}, \bar{y}) . При $t = 0$ получим аппроксимацию $W(0, x, y)$ для решения $w_1(x, y)$.

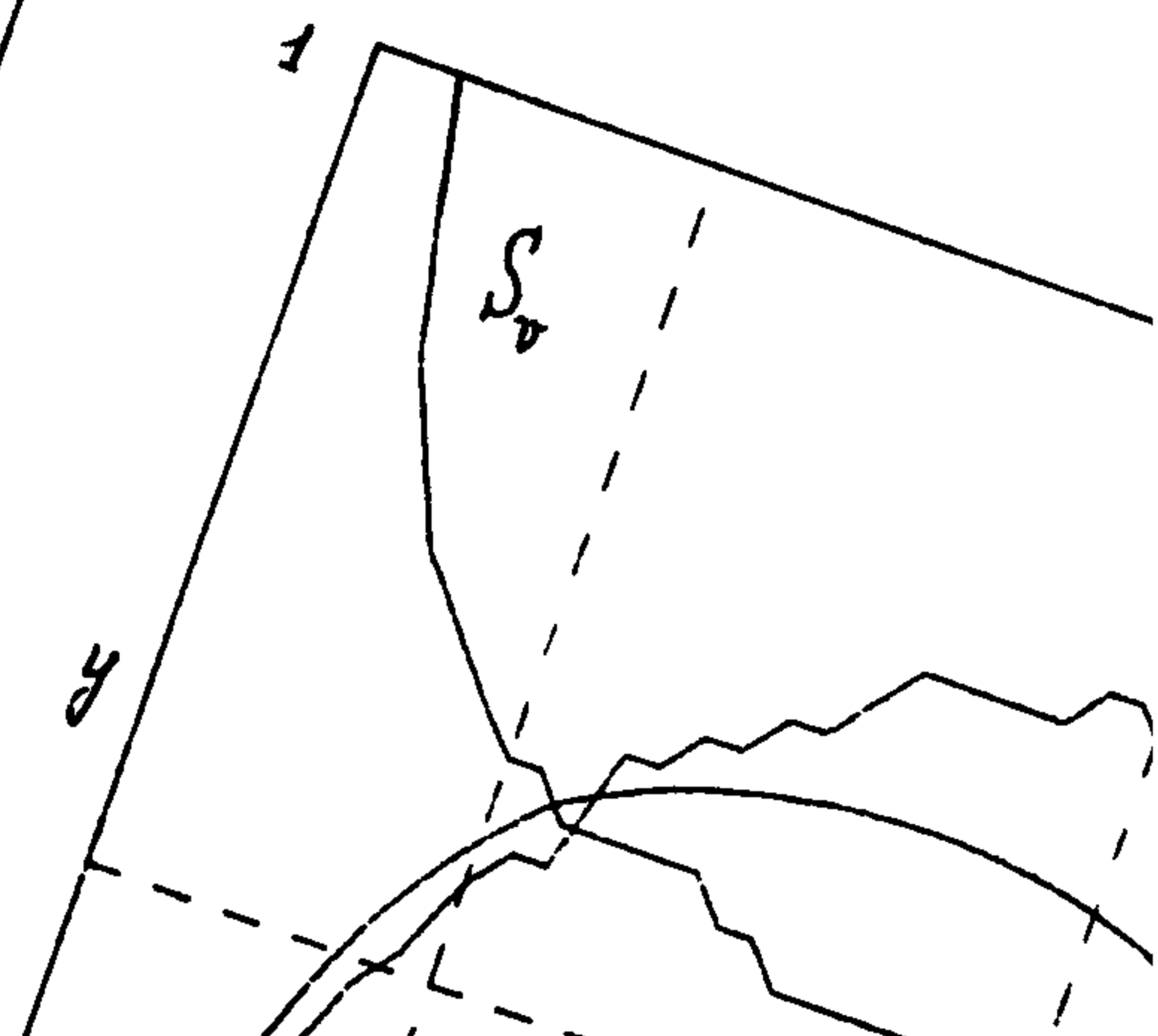
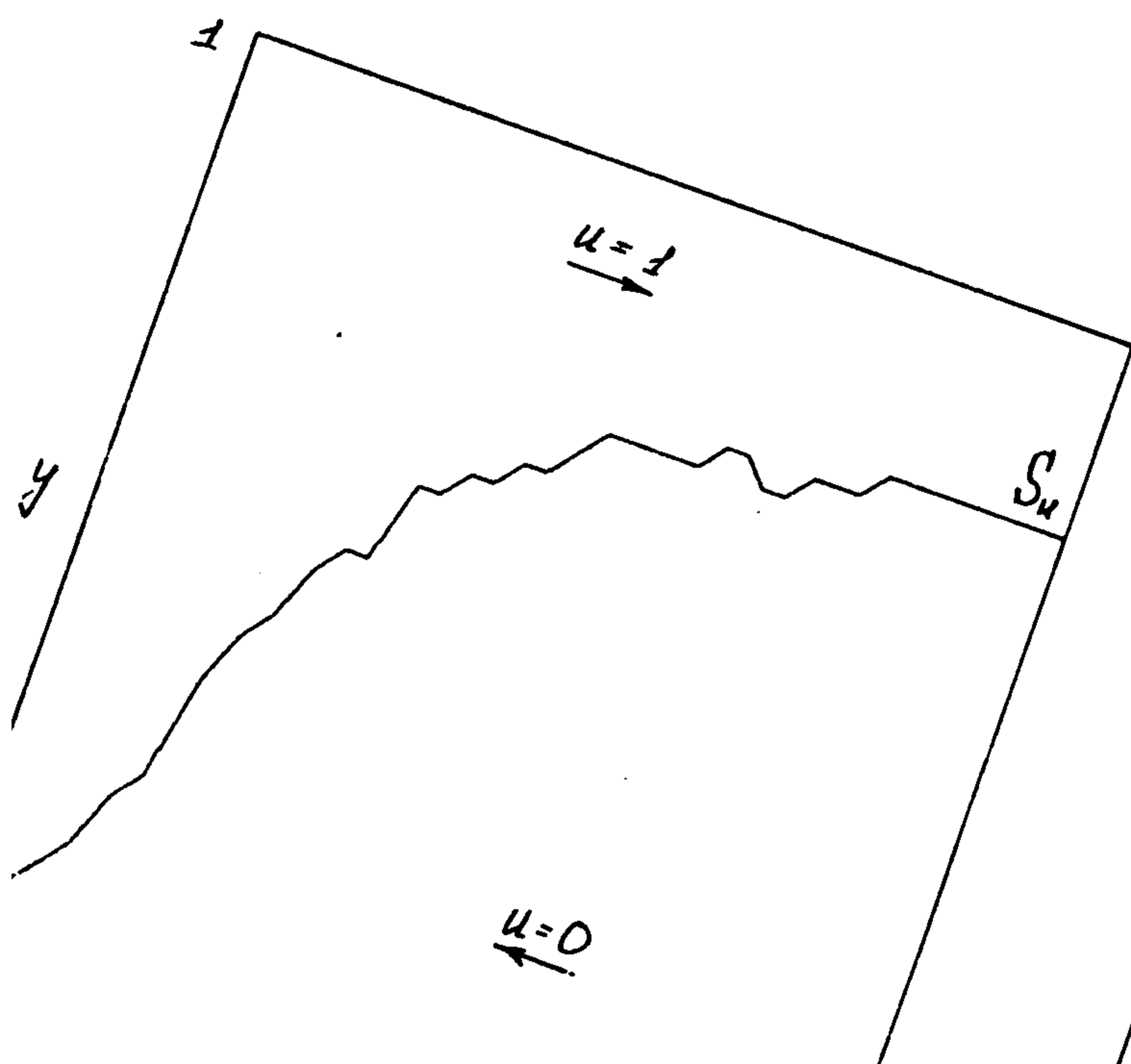
На фиг. 1 изображен график аппроксимирующей функции $(x, y) \rightarrow W(0, x, y)$. Параллельно с вычислением функции цены строилась максимизирующая стратегия первой коалиции u^0 . Структура этой стратегии изображена на фиг. 2. Квадрат фазового состояния разбивается на две части. В одной из которых стратегия $u^0 = 1$ – вложение капитала в первый рынок, а в другой $u^0 = 2$ – вложение капитала во второй рынок.

Аналогично были построены аппроксимация функции цены $w_2(x, y)$ и максимизирующая стратегия второй коалиции v^0 в игре с матрицей выигрыша B .

На фиг. 3 показаны линии переключения S_u для стратегии u^0 , S_v – для стратегии v^0 и изображена траектория TR, порожденная стратегиями u^0, v^0 . Эта траектория составляет основу для динамического равновесия по Нэшу в смысле работы [13]. Можно проверить, что эта траектория сходится в точке динамического равновесия $DE = (0,76, 0,42)$, которая определяется из системы уравнений, соответствующей равенству нулю правых частей системы (6.1).



Фиг. 1



Отметим, что траектории классических моделей с репликаторной динамикой [17] сходятся к точке статического равновесия по Нэшу $NE = (0,67; 0,33)$ или циркулируют в ее окрестности. Значение функций выигрыша $g_i(x, y)$, $i = 1, 2$ в точке DE лучше (строго больше), чем в точке статического равновесия NE . Следовательно, значения функционалов выигрыша J_i ($i = 1, 2$) на траекториях, сходящихся к точке динамического равновесия, лучше, чем на траекториях, сходящихся к точке статического равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032) и Международного научного фонда (NME000, NME300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
5. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. М.: Наука, 1991. 215 с.
6. Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. N 1. P. 1–42.
7. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V. 7. N 7. P. 159–193.
8. Souganidis P.E. Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // J. Different. Equat. 1985. V. 59. N 1. P. 1–43.
9. Bardi M., Osher S. The nonconvex multi-dimensional Riemann problem for Hamilton – Jacobi equations // SIAM Journal Math. Anal. 1991. V. 22 N 2. P. 344–351.
10. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
11. Тарасьев А.М. Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона – Якоби // ПММ, 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
12. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона – Якоби // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
13. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
14. Dolcheta I.C. On a discrete approximation of the Hamilton – Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. V. 10. N 4. P. 367–377.
15. Kryazhimskii A.V. Behavioral equilibria for a 2×2 – "Seller–Buyer" game evolutionary model // Working paper. WP-94-131. Laxenburg: Intern. Inst. for Applied Systems Analysis. 1994. 25 p.
16. Tarasyev A.M. A Differential model for a 2×2 -evolutionary games dynamics // Working paper. WP-94-63. Laxenburg: Intern. Inst. for Applied Systems Analysis. 1994. 32 p.
17. Hofbauer J., Sigmund K., The theory of Evolution and Dynamic Systems, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 321 p.