УДК 62-50

© 1997 г. В.Н. Ушаков, А.П. Хрипунов

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача управления по принципу обратной связи, в которой при любых неизвестных заранее помехах, действующих на систему, требуется обеспечить попадание фазовой точки на терминальное множество не позже заданного момента времени [1]. Предлагается метод приближенного построения множества позиционного поглощения – множества всех начальных точек, из которых разрешима эта задача. Выписаны соотношения, определяющие приближенно множество позиционного поглощения. Эти соотношения отличаются по существу от соотношений, предложенных ранее [2] для задачи сближения с терминальным множеством в заданный момент времени. Приводятся результаты приближенного вычисления множества позиционного поглощения в задаче управления маятником в вязкой среде. Работа примыкает к [1–16].

1. Постановка задачи. Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \theta]$ ($t_0 < \theta < \infty$) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь x – m-мерный фазовый вектор системы, u – управление, v – помеха, P и Q компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что (1.1) удовлетворяет стандартным в теории дифференциальных игр условиям (см. [1]). Рассматривается построение множества позиционного поглощения W^0, которое представляет собой совокупность всех начальных позиций $(t_*, x_*) \in \in [t_0, \theta] \times \mathbb{R}^m$, для каждой из которых существует позиционная стратегия $U(t, x)$, обеспечивающая при любых помехах $v(t)$ выполнение условия $x(\tau) \in M$ при $\tau \in [t_*, \theta]$ (точная постановка этой задачи приведена в [1]). Построение множества W^0 в рассматриваемой задаче представляется более трудоемким, чем построение множества позиционного поглощения в задаче, где требуется обеспечить условие $x(\theta) \in M$.

Задача сближения с целью к фиксированному моменту времени изучалась в [1, 4–8], где, в частности, рассмотрен ряд конструкций, удобных для исследования общих свойств множества W^0. К исследованиям, ориентированным на вычисления, относится обоснование аппроксимации дифференциального уравнения разностным[1]. Рассматривались [9–11] конструкции приближенного вычисления множества W^0.

Ниже исследуются вопросы, связанные с вычислительными аспектами построения множества W^0. В разд. 2 определен оператор стабильного поглощения. Конструкция

[1] *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.* О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Свердловск, 1983. 61 с. – Деп. в ВИНИТИ 19.04.83, № 2454-83.

оператора стабильного поглощения представляет собой достаточно общую схему и лежит в основе определения множества позиционного поглощения W^0. В разд. 3 приводятся условия, при которых дискретная аппроксимация множества W^0 сходится к нему, когда шаг дискретизации стремится к нулю. Выписаны соотношения, на основе которых разработан алгоритм приближенного вычисления W^0 для некоторых классов управляемых систем на плоскости. В разд. 4 приведены примеры.

2. Оператор стабильного поглощения. Полагаем, что все рассматриваемые ниже конструкции (стабильных мостов, движений, окрестностей цели M) содержатся в некоторой достаточно большой компактной области $D \subset [t_0, \theta] \times \mathbf{R}^m$.

Рассмотрим определение u-стабильного моста – множества позиций, на котором можно сохранить движение выбором походящего управления u. Важную роль в этом определении играет функция (гамильтониан) системы (1.1)

$$H(t,x,l) = \max_{u\in P} \min_{v\in Q} \langle l, f(t,x,u,v) \rangle, \quad l \in \mathbf{R}^m$$

где $\langle l, f \rangle$ – скалярное произведение векторов l и f.

Пусть $G = \{f \in \mathbf{R}^m: \|f\| \leqslant K < \infty\}$ – шар, такой, что $F(t, x) \subset G$ при любых $(t, x) \in D$; здесь $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

Пусть задано некоторое множество Ψ элементов ψ, а также семейство отображений $\{F_\psi: D \to 2^{\mathbf{R}^m}\}$, отвечающее множеству Ψ и удовлетворяющее следующим условиям:

А.1. Для любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто и удовлетворяет включению $F_\psi(t, x) \subset G$.

А.2. Для любых $(t, x, l) \in D \times S$ выполняется равенство

$$\min_{\psi\in\Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t,x,l).$$

А.3. Существует функция $\omega^*(\delta)(\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0)$, такая, что

$$d(F_\psi(t^*,x^*), F_\psi(t_*,x_*)) \leqslant \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|),$$

(t_*, x_*) и (t^*, x^*) из D, $\psi \in \Psi$. Здесь $h_F(l) = \sup\limits_{f\in F} \langle l, f \rangle$ при $F \subset \mathbf{R}^m$; $S = \{l \in \mathbf{R}^m: \|l\| = 1\}$; $d(F^*, F_*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F^* и F_* в пространстве $\mathbf{R}^m$.

В качестве примеров семейств отображений, удовлетворяющих условиям А.1–А.3, укажем семейства $\{F_{v(\cdot)}: v(\cdot) \in V\}$ и $\{G_l: l \in S\}$ [12–15]; здесь

$$G_l(t,x) = \{f \in G: \langle l,f \rangle \leqslant H(t,x,l)\}, \quad F_{v(\cdot)} = \overline{\mathrm{co}}\{f(t,x,u,v(u)): u \in P\},$$

$\overline{\mathrm{co}}\{f\}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{f\}$, V – совокупность всех отображений, $v(\cdot)$: $P \to Q$.

Отметим, что для некоторых классов управляемых систем, в частности, для систем с правой частью вида

$$f(t,x,u,v) = \varphi(t,x) + B(t,x)u + C(t,x)v \tag{2.1}$$

и ограничениями P и Q – многогранниками с конечным числом вершин можно ввести семейство отображений, удовлетворяющее условиям А.1–А.3, у которого множество Ψ конечно. Это позволяет эффективно осуществлять, по крайней мере для систем второго порядка, приближенные построения множества W^0.

Полагая $H \subset \mathbf{R}^m$, введем обозначения: $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ – множество всех точек в

$x^* \in \mathbf{R}^m$, в которые в момент $t \in [t_*, t^*]$ приходят решения $x(\cdot) = (x(\tau): t_* \leqslant \tau \leqslant t^*)$, $x(t_*) = x_*$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$;

$$M_t(H) = \begin{cases} M, & t \in (t_*, t^*) \\ M \cup H, & t = t^* \end{cases}$$

$$X_\psi^{-1}(t_*; t, M_t(H)) = (x_* \in \mathbf{R}^m : X_\psi(t^*, t_*, x_*) \cap M_t(H) \neq \emptyset\}$$

Приведем определение оператора стабильного поглощения в задаче сближения с целью M к фиксированному моменту θ.

Определение 2.1. Оператором стабильного поглощения $\pi(t_*; t^*, H)(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \theta)$, $(H \subset \mathbf{R}^m)$ в задаче сближения с целью M к моменту θ назовем отображение $\pi\ (t_*, t^*, \cdot): 2^{\mathbf{R}^m} \to 2^{\mathbf{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, H) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, M_t(H))$$

Определение 2.2. Замкнутое множество $W \subset D$ назовем минимаксно u-стабильным мостом в задаче сближения с M к моменту θ, если

$$W_\theta \subset M, \quad W_{t_*} \subset \pi(t_*; t^*, W_{t^*})$$

для любых $t_*, t^* (t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \theta)$.

Здесь $W_t = \{x \in \mathbf{R}^m : (t, x) \in W\}$.

Пусть $\{F_\psi^{(i)}: D \to 2^{\mathbf{R}^m}\}$ $(i = 1, 2)$ – два семейства отображений, отвечающие множествам $\Psi^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ и удовлетворяющие условиям А.1–А.3. Каждое из этих семейств индуцирует свой оператор $\pi^{(i)}(t_*; t^*, H)$ стабильного поглощения. Можно показать, что операторы эквивалентны в том смысле, что множество $W \subset D$, являющееся минимаксно u-стабильным мостом в смысле одного оператора, будет минимаксно u-стабильным мостом в смысле другого оператора.

3. Аппроксимирующая система множеств и ее свойства. Предполагаем, что семейство отображений $\{F_\psi: D \to 2^{\mathbf{R}^m}\}$, отвечающее множеству Ψ, дополнительно к условиям А.1–А.3 удовлетворяет условию

А.4. Существует число $\lambda = \lambda(L) \in [0, \infty)$, такое, что

$$d(F_\psi(t, x^*),\ F_\psi(t, x_*)) \leqslant \lambda \| x^* - x_* \|, \quad \psi \in \Psi$$

для любых (t, x_*) и (t, x^*) из D.

Символом W^0 обозначим максимальный из минимаксно u-стабильных мостов. Известно, что W^0 – множество позиционного поглощения в рассматриваемой задаче.

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств (АСМ), ориентированное на приближенное вычисление множества W^0. Понятие АСМ возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы u-стабильности дискретной схемой, а именно, – при введении разбиения $\Gamma = (t_0, t_1, ..., t_N = \theta\}$ и замене областей $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, из определения 2.2 множествами $x_* + (t^* - t_*) F_\psi(t_*, x_*)$.

Определение 3.1. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения

$$a^\varepsilon(t_*; t^*, H)\,(\varepsilon \geqslant 0,\ t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \theta,\ H \subset \mathbf{R}^m)$$

в задаче сближения с M к моменту θ назовем отображение $a^\varepsilon(t_*; t^*, \cdot): 2^{\mathbf{R}^m} \to 2^{\mathbf{R}^m}$, заданное соотношением

$$a^{\varepsilon}(t_*;t^*,H)=\bigcap_{\psi\in\Psi}\ \bigcup_{t\in[t_*,t^*]}\tilde{X}_{\psi}^{-1}(t_*;t^*,M_t^{\varepsilon}(H))\ .$$

Здесь

$$\tilde{X}_{\psi}^{-1}(t_*;t^*,M_t^{\varepsilon}(H))=\{x_*\in\mathbf{R}^m: M_t^{\varepsilon}(H)\cap\tilde{X}_{\psi}(t;t_*,x_*)\neq\emptyset\}$$

$$\tilde{X}_{\psi}(t;t_*,x_*)=x_*+(t-t_*)F_{\psi}(t_*,x_*)\quad\text{при}\quad t\in[t_*,t^*].$$

$$M_t^{\varepsilon}(H)=\begin{cases}M_{\varepsilon}, & t\in[t_*,t^*)\\ M_{\varepsilon}\cup H, & t=t^*\end{cases}$$

M_{ε} – ε-окрестность множества M в пространстве $\mathbf{R}^m$.

Будем говорить, что вещественная функция $\eta(\Delta)(\Delta\geqslant 0)$ удовлетворяет условию B, если она неотрицательна, монотонно убывает к нулю при $\Delta\downarrow 0$ и $\lim\limits_{\Delta\downarrow 0}\eta(\Delta)/\Delta=0$.

Пусть заданы разбиение $\Gamma_n=\{t_0,t_1,\ldots,t_{N(n)}=\theta\}$ отрезка $[t_0,\theta]$ и функция $\eta(\Delta)$, удовлетворяющая условию B.

Полагаем

$$\eta^0(\Delta)\equiv 0,\ \ \omega(\Delta)=\Delta\omega^*((1+K)\Delta)(\Delta\geqslant 0),\quad \Delta_i=t_{i+1}-t_i$$

$$\Delta^{(n)}=\max_{0\leqslant i\leqslant N(n)-1}\Delta_i$$

$$\varepsilon_i=\varepsilon_i(\eta(\cdot))=\omega(\Delta_{i-1})+\eta(\Delta_{i-1})+(1+\lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$$

$$\varepsilon_i^0=\varepsilon_i(\eta^0(\cdot))=\omega(\Delta_{i-1})+(1+\lambda\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}^0\quad(i=0,1,\ldots,N(n)-1)$$

$$\varepsilon_0=\varepsilon_0^0=0$$

Определение 3.2. η-АСМ $\{{}_{\eta}\tilde{W}_{t_i}^{(n)}: t_i\in\Gamma_n\}$ назовем систему, заданную рекуррентными соотношениями

$${}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}=M_{\varepsilon_{N(n)}},\quad {}_{\eta}\tilde{W}_{t_i}^{(n)}=a^{\varepsilon_{i+1}}(t_i;t_{i+1},{}_{\eta}\tilde{W}_{t_{i+1}}^{(n)})$$

$(i=N(n)-1,N(n)-2,\ldots,0)$

Пусть $\{\Gamma_n\}$ – произвольная последовательность разбиений Γ_n отрезка $[t_0,\theta\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta^{(n)}=0$.

Определение 3.3. Символом ${}_{\eta}W^0$ обозначим множество всех точек (t_*,x_*) из D, для которых существует последовательность

$$\{(t_n,x_n): t_n=t_n(t_*)\in[t_0,\theta],\ x_n\in{}_{\eta}\tilde{W}_{t_n}^{(n)},\ \lim_{n\to\infty}x_n=x_*\}$$

Здесь

$$t_n(t_*)=\begin{cases}\min\limits_{(t_i\in\Gamma_n,\ t_i>t_*)}t_i, & t<\theta\\ t_*, & t=\theta\end{cases}$$

Было показано[1], что при выполнении условий, близких к условиям A.1–A.4, множества W^0 и ${}_{\eta}W^0$ совпадают, какова бы ни была функция $\eta=\eta(\cdot)$, удовлетворяющая условию B. Аналогично показывается, что при выполнении условий A.1–A.4 множества W^0 и ${}_{\eta}W^0$ совпадают, какова бы ни была функция $\eta=\eta(\cdot)$, удовлетворяющая условию B.

АСМ $\{{}_{\eta^0}\tilde{W}^{n}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$ и $\{{}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$, отвечающие разбиению Γ_n и функциям $\eta^0 = \eta^0(\cdot)$ и $\eta = \eta(\cdot)$, удовлетворяют включениям

$$ {}_{\eta^0}\tilde{W}^{(n)}_{t_i} \subset {}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}, \quad t_i \in \Gamma_n $$

Однако, введенная выше η-АСМ $\{{}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$ неудобна для вычислений, поскольку для выделения множества ${}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}$ в пространстве $\mathbf{R}^m$ необходимо вычислить несчетное число множеств

$$ \tilde{X}^{-1}_{\psi}(t_i; t, M^{\varepsilon_i+1}_t({}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_{i+1}})), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] $$

Рассмотрим вопрос о конструировании таких систем множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$, которые достаточно эффективно вычисляются и аппроксимируют мост W^0, т.е. в пределе при $n \to \infty$ ($\Delta^{(n)} \to 0$) дают множество W^0.

Было показано[1], что, при определенных ограничениях на структуру цели M, можно ввести систему множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$ {}_{\eta^0}\tilde{W}^{(n)}_{t_i} \subset \hat{W}^{(n)}_{t_i} \subset {}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i} \quad (i = 0, 1, \dots, N(n)) \tag{3.1} $$

и достаточно просто вычисляемых, по крайней мере, для задач на плоскости. А именно, рассматривается случай, когда множество M представимо в виде объединения шаров, радиусы которых ограничены снизу некоторым числом $R^* \in (0, \infty)$. Система множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$ задается рекуррентными соотношениями

$$ \hat{W}^{(n)}_{t_{N(n)}} = M_{\varepsilon_{N(n)}}, \quad \hat{W}^{(n)}_{t_i} = \bigcap_{\psi \in \Psi} \tilde{X}^{-1}_{\psi}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}} \cup M_{\varepsilon_{i+1}}) $$

$(i = N(n) - 1, \dots, 1, 0)$

Здесь $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(\eta(\cdot))$, $\eta(\Delta) = \dfrac{K^2}{R^*}\Delta^2$, $\Delta \geqslant 0$.

Из соотношений (3.1) и равенства

$$ W^0 = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta^{(n)} \to 0}} \{{}_{\eta^0}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta^{(n)} \to 0}} \{{}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\} $$

следует равенство

$$ W^0 = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta^{(n)} \to 0}} \{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\} $$

где предел понимается в том же смысле, что и предел

$$ {}_{\eta}W^0 = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta^{(n)} \to \infty}} \{{}_{\eta}\tilde{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\} $$

т.е. в смысле определения 3.3.

В случае, рассмотренном ранее[1], $\hat{W}^{(n)}_{t_i}$ представляет собой множество программного поглощения цели $\hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}} \cup M_{\varepsilon_{i+1}}$ в момент t_{i+1} в локальной (по времени) аппроксимационной задаче сближения на отрезке времени $[t_i, t_{i+1}]$. Элемент аппроксимации состоит в том, что рассматриваются не области достижимости $X_{\psi}(t_{i+1};$

$t_i, x[t_i]$), а их линейные (по времени) аппроксимации $\tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i])$. Аналогичный подход к построению системы множеств, аппроксимирующих разрешающее множество, применялся [6] при рассмотрении игры преследования. Однако в случае, когда M – произвольный компакт, такая методика аппроксимации разрешающего множества W^0 непригодна.

Рассмотрим случай, когда M – произвольный компакт в $\mathbf{R}^m$. В этом случае для определения системы множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$ зафиксируем некоторое разбиение Γ_n и некоторый отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ_n.

Считая, что множество $\hat{W}^{(n)}_{t_i}$ уже построено, осуществим разбиение $\Gamma^{(i)}_n$ отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ моментами $t_i^0 = t_i, t_i^1, ..., t_i^{N(n)} = t_{i+1}$ таким образом, чтобы диаметр $\Delta^{(n)}_i$ разбиения $\Gamma^{(i)}_n$ удовлетворял равенствам

$$\Delta^{(n)}_i = t_i^{k+1} - t_i^k = \frac{t_{i+1} - t_i}{N(n)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N(n) - 1 \tag{3.2}$$

$N(n)$ – число отрезков разбиения Γ_n.

Из (3.2) следуют неравенства

$$\Delta^{(n)}_i \leqslant \frac{(t_{i+1} - t_i)\Delta^{(n)}}{\theta - t_0}, \quad i = 0, 1, \ldots, N(n) - 1$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\eta = \eta(\Delta) = \frac{K\Delta^{(n)}}{(\theta - t_0)}\Delta, \quad \Delta \geqslant 0 \tag{3.3}$$

а также множество $\Psi \times \Gamma^{(i)}_n = \{(\psi, t_i^{(k)}): \psi \in \Psi, k = 0, 1, ..., N(n) - 1\}$.

Полагаем

$$W^{\psi, k}_{t_i} = \begin{cases} \tilde{X}^{-1}_\psi(t_i, t_i^k, M_{\varepsilon_{i+1}}) & \text{при} \quad \psi \in \Psi, \quad k = 0, 1, \ldots, N(n) - 1 \\ \tilde{X}^{-1}_\psi(t_i, t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}} \cup M_{\varepsilon_{i+1}}) & \text{при} \quad \psi \in \Psi, \quad k = N(n) \end{cases}$$

Зададим систему множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$ рекуррентными соотношениями

$$\hat{W}^{(n)}_{t_{N(n)}} = M_{\varepsilon_{N(n)}}, \quad \hat{W}^{(n)}_{t_i} = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant N(n)-1} W^{\psi, k}_{t_i} \tag{3.4}$$

$i = N(n) - 1, ..., 1, 0.$

Теорема 3.1. Система множеств $\{\hat{W}^{(n)}_{t_i}: t_i \in \Gamma_n\}$, заданная соотношениями (3.4), удовлетворяет включениям (3.1), в которых функция $\eta(\cdot)$ задана соотношениями (3.3).

Доказательство. Считая, что множества $\hat{W}^{(n)}_{t_i}$ заданы соотношениями (3.4), докажем, что выполняются включения

$$a^{\varepsilon^0_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}}) \subset \hat{W}^{(n)}_{t_i} \subset a^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}}) \tag{3.5}$$

Допустим, что $x[t_i] \in a^{\varepsilon^0_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}})$. Тогда, согласно определения множества $a^{\varepsilon^0_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}})$, получаем, что для любого $\psi \in \Psi$ выполняется хотя бы одно из двух соотношений

$$\tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x[t_i]) \cap \hat{W}^{(n)}_{t_{i+1}} \neq \emptyset, \quad \tilde{X}_\psi(\hat{t}; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon^0_{i+1}} \neq \emptyset \tag{3.6}$$

при некотором $\hat{t} \in [t_i, t_{i+1}]$.

Рассмотрим случай, когда для точки $x[t_i]$ выполняется второе условие (3.6). Полагаем, что $[t_i^{\bar{k}}, t_i^{\bar{k}+1}]$ – тот отрезок разбиения $\Gamma_n^{(i)}$, которому принадлежит момент $\hat{t}$. В силу второго условия (3.6) существует вектор $f_\psi \in F_\psi(t_i, x[t_i])$, такой, что

$$x[t_i]+(\hat{t}-t_i)f_\psi \in M_{\varepsilon_{i+1}^0} \tag{3.7}$$

Поскольку $x[t_i] + (\hat{t} - t_i)f_\psi$ удовлетворяет включению (3.7), то

$$x[t_i]+(t_i^{\bar{k}+1}-t_i)f_\psi=(x[t_i]+(\hat{t}-t_i)f_\psi)+(t_i^{\bar{k}+1}-\hat{t})f_\psi \in M_{(\varepsilon_{i+1}^0+K(t_i^{\bar{k}+1}-\hat{t}))} \subset$$

$$\subset M_{(\varepsilon_{i+1}^0+K(t_i^{\bar{k}+1}-t_i^{\bar{k}}))} \subset M_{(\varepsilon_{i+1}^0+\eta(\Delta_i))} \tag{3.8}$$

Видно, что при любом i $(0 \leqslant i \leqslant N(n)-1)$ выполняется неравенство $\varepsilon_{i+1}^0 + \eta(\Delta_i) \leqslant$ $\leqslant \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}(\eta(\cdot))$. Из (3.8) и последнего неравенства следует $x[t_i] + (t_i^{\bar{k}+1} - t_i)f_\psi \in$ $\in M_{\varepsilon_{i+1}}$, т.е. $\tilde{X}_\psi(\hat{t}_i^k; t_i, x[t_i]) \cap M_{\varepsilon_{i+1}} \neq \emptyset$ $(k=\bar{k}+1)$.

Таким образом, если $x[t_i] \in a^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}_{t_{i+1}}^{(n)})$, то для любого $\psi \in \Psi$ выполняется хотя бы одно из двух соотношений

$$x[t_i] \in \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}_{t_{i+1}}^{(n)}), \quad x[t_i] \in \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_i^k, M_{\varepsilon_{i+1}})$$

при некотором k $(0 \leqslant k \leqslant N(n))$.

Отсюда следует, что если $x[t_i] \in a^{\varepsilon_{i+1}^0}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}_{t_{i+1}}^{(n)})$, то $x[t_i] \in \hat{W}_{t_i}^{(n)}$.

С другой стороны, согласно определению множества $\hat{W}_{t_i}^{(n)}$, справедливо включение $\hat{W}_{t_i}^{(n)} \subset a^{\varepsilon_{i+1}}(t_i; t_{i+1}, \hat{W}_{t_{i+1}}^{(n)})$. Тем самым включения (3.5) доказаны.

Докажем теперь справедливость включений

$$_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)} \subset \hat{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)} \subset {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)} \tag{3.9}$$

Действительно, учитывая соотношения

$$_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)} = \tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)} \subset {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}$$

и (3.5), получаем

$$_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)} = a^{\varepsilon_{N(n)}^0}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, {}_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}) \subset a^{\varepsilon_{N(n)}^0}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \hat{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}) \subset \hat{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)} \subset$$

$$\subset a^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, \hat{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}) \subset a^{\varepsilon_{N(n)}}(t_{N(n)-1}; t_{N(n)}, {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)}}^{(n)}) = {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)}.$$

Итак, включения (3.9) установлены.

Докажем теперь, что справедливы включения

$$_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n-2)}}^{(n)} \subset \hat{W}_{t_{N(n)-2}}^{(n)} \subset {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)-2}}^{(n)}. \tag{3.10}$$

Действительно, учитывая соотношения (3.5) и (3.9) получаем

$$_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)-2}}^{(n)} = a^{\varepsilon_{N(n)-1}^0}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_{\eta^0}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)}) \subset a^{\varepsilon_{N(n)-1}^0}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \hat{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)}) \subset$$

$$\subset \hat{W}_{t_{N(n)-2}}^{(n)} \subset a^{\varepsilon_{N(n)-1}}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, \hat{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)}) \subset a^{\varepsilon_{N(n)-1}}(t_{N(n)-2}; t_{N(n)-1}, {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)-1}}^{(n)}) =$$

$$= {}_{\eta}\tilde{W}_{t_{N(n)-2}}^{(n)}.$$

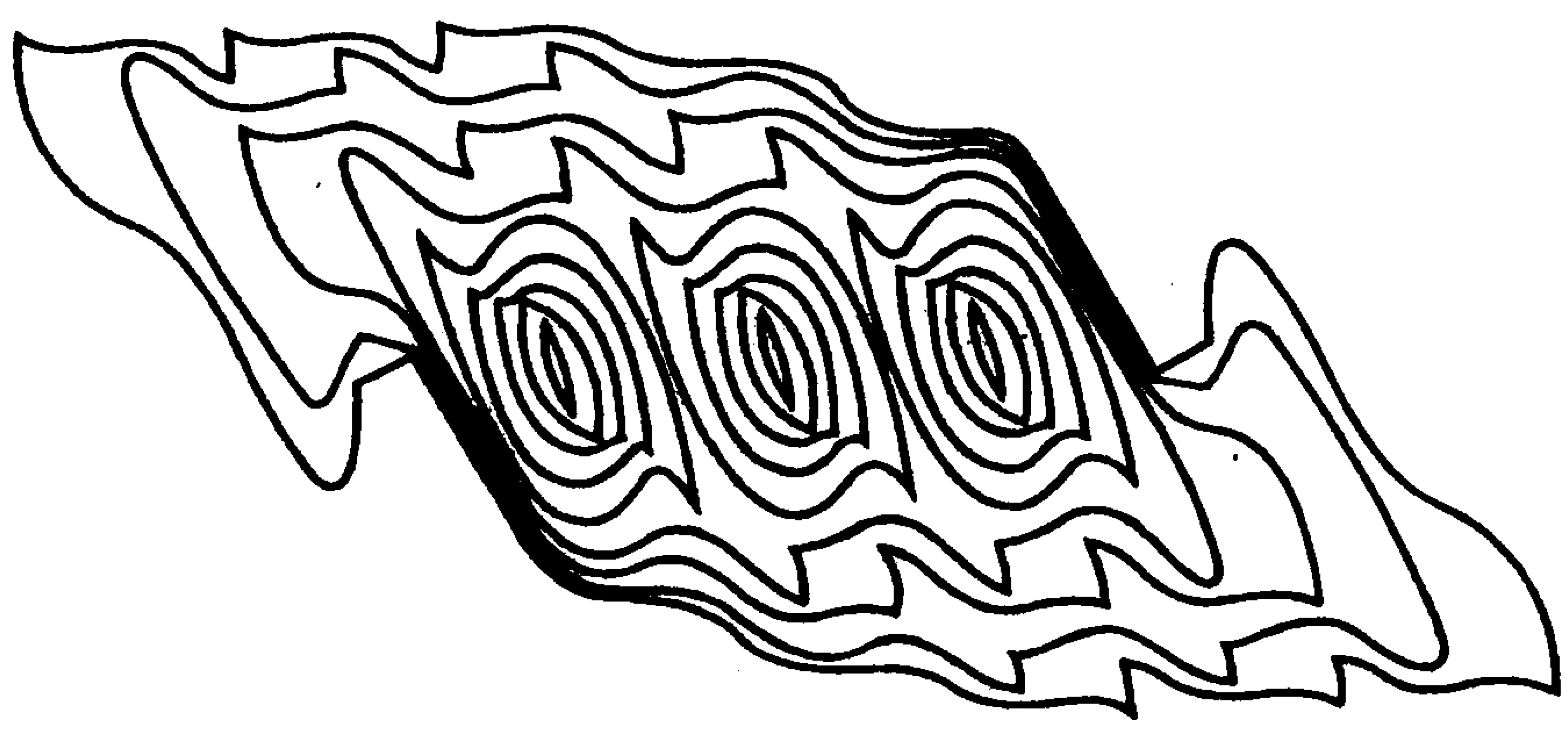
Включения (3.10) установлены.

Аналогично рекуррентным путем доказываются в рассматриваемом случае (произвольного компакта M) и соотношения (3.1) при $i = N(n) - 3, ..., 1, 0$.

Отметим, что в случае, когда множество Ψ конечно, т.е. имеет вид $\Psi = \{\psi^{\alpha}: \alpha = 1, 2, ..., \rho\}$, множества $\hat{W}_{t_i}^{(n)}$ определяются соотношениями

$$\hat{W}_{t_i}^{(n)} = \bigcap_{1 \leq \alpha \leq \rho} \; \bigcup_{0 \leq k \leq N(n)-1} W_{t_i}^{\alpha, k}, \quad W_{t_i}^{\alpha, k} = W_{t_i}^{\psi_{\alpha}, k} \tag{3.11}$$

Из (3.11) видно, что в этом случае для вычисления множества $\hat{W}_{t_i}^{(n)}$ необходимо вычислить $\rho \cdot N(n)$ множества $W_{t_i}^{\alpha, k}$.



4. Приближенное вычисление множества W^0 в задаче управления плоским маятником, движущимся в вязкой среде. Вычислительным аспектам решения задачи сближения в различных постановках посвящен ряд исследований[1] [2, 16]. При этом наиболее детально в плане вычислений продвинуто решение задач сближения в случае линейных управляемых систем (1.1)[1] [11, 16]. Был представлен[2] [2] алгоритм приближенного вычисления множества позиционного поглощения W^0 в задаче сближения с целью в фиксированный момент времени для случая, когда система (1.1) имеет вид (2.1). Основные элементы этого алгоритма используются в решении рассматриваемой здесь задачи.

Пусть задан плоский маятник, подвешенный к точке опоры при помощи гибкой нерастяжимой нити. Управление маятником осуществляется посредством приложения к нему дополнительной силы, ограниченной по величине. Известно, что маятник движется в вязкой среде, и параметры вязкости могут меняться с течением времени. Однако в каждый момент времени коэффициент вязкости среды не известен точно, а известны лишь пределы, в которых он может изменяться.

Полагаем, что уравнение движения управляемого плоского маятника имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -0{,}15 x_2 v - 10{,}15 \sin x_1 + u \tag{4.1}$$

Здесь промежуток времени, на котором рассматривается движение маятника, равен $[0, 2{,}25]$, $x = (x_1, x_2)$ – фазовый вектор системы (4.1), u – управляющий момент, удовлетворяющий включению $u \in [-10, 10]$, v – коэффициент демпфирования среды, удовлетворяющий включению $v \in [0, 1]$.

Для системы (4.1) ставится следующая задача: требуется успокоить колебательное движение маятника за время, не превосходящее величину $\theta = 2{,}25$, или, что то же самое, привести фазовый вектор системы $x = (x_1, x_2)$ на целевое множество M – точку (0, 0) – не позднее фиксированного момента времени $\theta = 2{,}25$.

Заметим, что кроме положения равновесия (0, 0) система (4.1) (в силу своей периодичности) имеет бесконечное число положений равновесия $(2k\pi, 0)$, где k – натуральное число. Поэтому в

---

[2] *Бабалыев Т.Х., Хрипунов А.П.* Об одном методе приближенного вычисления множеств позиционного поглощения в дифференциальных играх сближения. Екатеринбург. 1994. 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.06.94, № 1590–94.

качестве целевого множества M следует брать набор точек $(2k\pi, 0)$, (k – натуральное число). Однако очевидно, что для цели состоящей из бесконечного числа точек, построение множества позиционного поглощения на ЭВМ невозможно. В связи с этим реализуем построение множества W^0 для цели M, состоящей из конечного числа точек, например из трех точек. На фигуре для множества M, состоящего из трех точек $(-2\pi, 0)$ $(0, 0)$, $(2\pi, 0)$, представлены множества $\tilde{W}(t_i)$ на отрезке [0, 2,25], отстоящие друг от друга по времени на величину 0,25.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-16032) и Международного научного фонда (NME 000, NME 300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 216–222.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 275–287.
5. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Федоренко Р.П.* О задаче Коши в теории преследования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1969. № 9. № 5. С. 1036–1045.
7. *Петров Н.Н.* Существование значения игры преследования // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. Вып. 5. С. 827–839.
8. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. Думка, 1992. 260 с.
9. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
10. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307–330.
11. *Пацко В.С., Турова В.Л.* Численное решение дифференциальных игр на плоскости // Препринт. УрО РАН. Екатеринбург, 1995. 80 с.
12. *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 5. С. 1260–1263.
13. *Красовский Н.И.* Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления: Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24. С. 32–45.
14. *Алексейчик М.И.* Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Мат. анализ и его приложения. Ростов-на-Дону; Рост. ун-т, 1975. Т. 7. С. 191–199.
15. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
16. *Турова В.Л.* Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре второго порядка с нефиксированным временем окончания // Управление с гарантированным результатом. Свердловск; УНЦ АН СССР, 1987. С. 92–112.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
4.X.1995