

УДК 62–50

© 1997 г. К.А. Земсков, А.Г. Пашков¹

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ С ОДНИМ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕМ И ДВУМЯ УБЕГАЮЩИМИ

Рассматривается игровая задача сближения–уклонения одного преследующего объекта с двумя убегающими. Предполагается, что один из убегающих в некоторый момент времени должен выйти из игры (исчезнуть), однако заранее неизвестны ни этот момент времени, ни выходящий из игры убегающий. Динамика всех объектов описывается уравнениями из известной задачи Айзекса "игра двух автомобилей" [1] при условии, что маневренность объектов ограничена. Платой игры является минимум по времени расстояния между преследователем и оставшимся в игре убегающим. При определенных предположениях, связывающих параметры объектов и их начальные позиции, строятся оптимальные позиционные стратегии как преследователя, так и обоих убегающих.

Формализация задачи принимается согласно [2]. Развивается подход, предложенный в [3–9]. Близкие вопросы рассмотрены в [10–16].

1. Уравнения движения и функционал платы. Пусть объект P (преследователь) и E , E_1 (убегающие) движутся с постоянными скоростями на плоскости XOY (фиг. 1). Уравнения движения объектов и ограничения на их управляющие воздействия аналогичны соответствующим соотношениям в известной задаче "игра двух автомобилей" [1] и имеют вид

$$\dot{x}_i = V_i \sin \theta_i, \quad \dot{y}_i = V_i \cos \theta_i, \quad \dot{\theta}_i = (V_i / R_i) \varphi_i, \quad |\varphi_i| \leq 1 \quad (1.1)$$

Здесь V_i – постоянная скорость, R_i – минимальный радиус кривизны траектории, θ_i – угол между осью OY и вектором V_i , φ_i – скалярное управление, C_i – центр кривизны траектории, $i = 1$ соответствует объекту P , $i = 2$ – объекту E , $i = 3$ – объекту E_1 .

Предполагается, что справедливы равенства

$$V_2 = V_3, \quad R_2 = R_3 \quad (1.2)$$

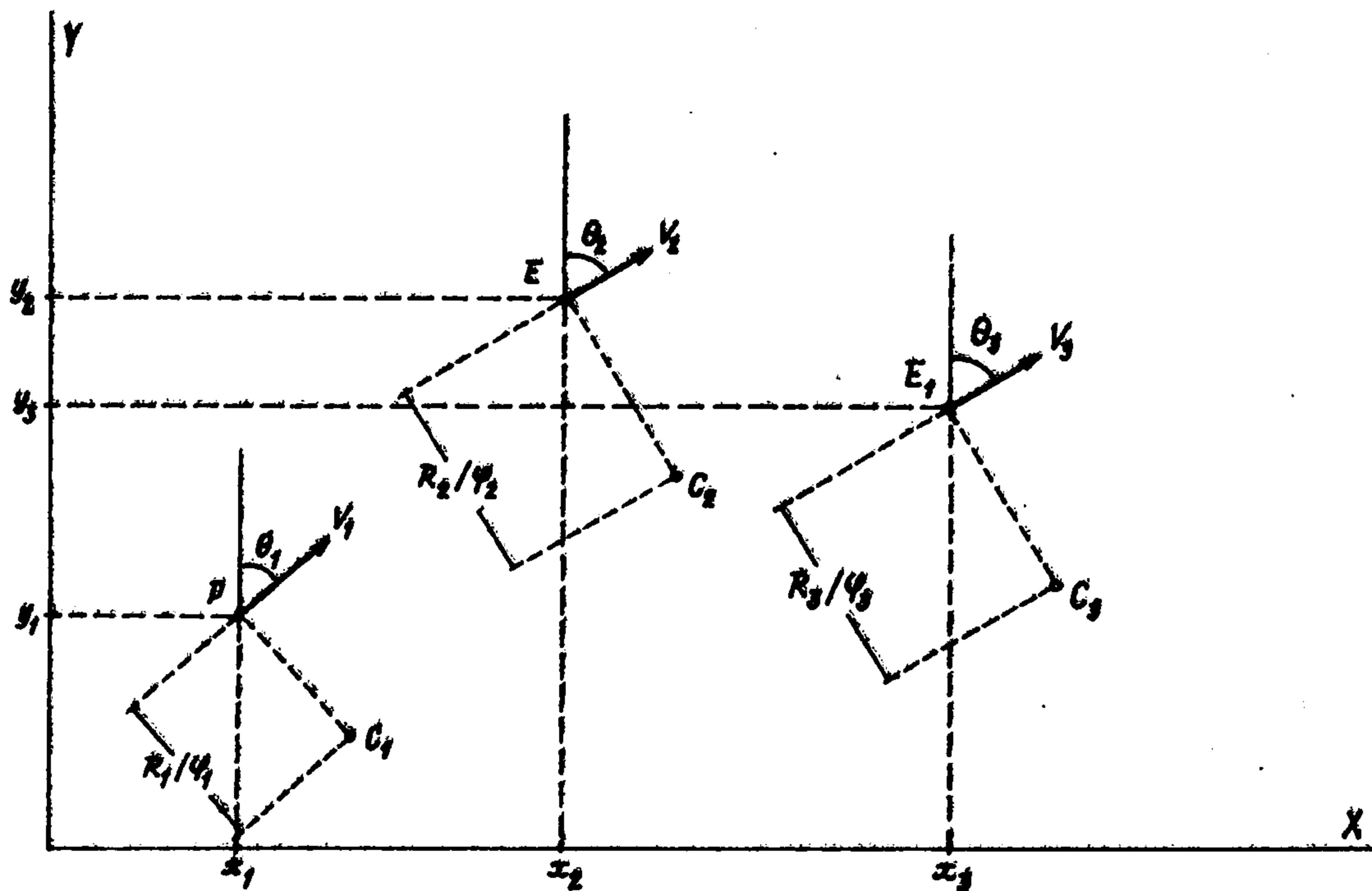
Будем полагать, что для системы (1.1) выполняется условие ограниченной маневренности ($\delta\theta_i$ – достаточно малая величина)

$$\theta_i = \theta_i^0 + \delta\theta_i \quad (1.3)$$

где θ_i^0 – значение θ_i в начальный момент игры $t = t_0$.

При этом предположении движение объектов P , E и E_1 будет происходить

¹ Пашков Алексей Георгиевич (1937–1996), доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем механики РАН, автор более пятидесяти работ по теории оптимального управления и дифференциальных игр.



Фиг. 1

согласно системе линейных уравнений

$$\dot{x}_i = V_i(\sin \theta_i^0 + z_i \cos \theta_i^0), \quad \dot{y}_i = V_i(\cos \theta_i^0 - z_i \sin \theta_i^0) \quad (1.4)$$

$$\dot{z}_i = (V_i / R_i)\varphi_i, \quad |\varphi_i| \leq 1 \quad (z_i = \delta\theta_i)$$

Игра рассматривается на отрезке времени $[t_0, T]$, где момент T не фиксирован и, в частности, может равняться бесконечности. Начальные положения объектов P , E и E_1 задаются векторами $\{x_i^0, y_i^0, z_i^0\}$ ($i = 1, 2, 3$). Будем полагать, что при $t = t_0$ имеют место равенства

$$x_2^0 = x_3^0, \quad y_2^0 = y_3^0, \quad \theta_2^0 = \theta_3^0 \quad (1.5)$$

Предполагается, что в некоторый, заранее неизвестный момент времени $t = t^*$, где $t_0 \leq t^* < T$, один из убегающих (заранее неизвестно, какой именно) внезапно выходит из игры (исчезает). Начиная с этого момента, имеет место игра сближения–уклонения между преследователем и оставшимся убегающим. Момент t^* является параметром рассматриваемой задачи. Решение задачи содержит явную зависимость от t^* , которая отражена в формулах (7.1), (7.2), (7.3).

Основной функционал платы исходной игры задается соотношением

$$\gamma_1 = \min_{t^* \leq t < T} \{[x_i(t) - x_1(t)]^2 + [y_i(t) - y_1(t)]^2\}^{1/2} \quad (1.6)$$

Промежуточный функционал в исходной игре имеет вид

$$\gamma_2 = \max\{|x_k(T_1) - x_l(T_1)|, |x_k(T_2) - x_l(T_2)|\} \quad (1.7)$$

$$y_k(T_1) = y_l(T_1), \quad y_l(T_2) = y_l(T_2)$$

где индексы k и l в зависимости от начальной позиции объектов E и E_1 и величины угла θ_i^0 могут принимать только следующие две пары значений: либо $k = 2, l = 3$, либо $k = 3, l = 2$.

В выражении (1.6) индекс i равен либо 2, либо 3 в зависимости от того, какой именно из убегающих выходит из игры при $t = t^*$ (он равен либо 2, если в игре остается E , либо 3, если остается E_1). В (1.7) моменты $T = T_j$ ($j = 1, 2$) определяются, согласно [3], как моменты касания крайними точками $x_i(T_j)$ ($i = 2, j = 1; i = 3, j = 2$ или $i = 2, j = 2; i = 3, j = 1$) областей достижимости объектов E и E_1 прямых $y = y_1(T_1)$ и $y = y_1(T_2)$

соответственно. При этом предполагается, что области достижимости убегающих E и E_1 соответствуют $T = T_j$ ($j = 1, 2$).

Также предполагается, что соотношения между параметрами V_i , R_i , θ_i^0 ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям покрытия из [3] следующего вида:

$$V_1 \geq V_2 \left(\cos \theta_i^0 + \sqrt{2y_2^0 |\sin \theta_i^0| / R_2} \right) \quad (1.8)$$

$$V_1^2 (V_2 \cos \theta_i^0 - V_1) / R_1 + V_2^2 (V_1 \cos \theta_i^0 - V_2) / R_2 \leq 0 \quad (1.9)$$

если $0 \leq \theta_i^0 < \pi / 2$ или $3\pi / 2 < \theta_i^0 \leq 2\pi$

$$V_1^2 (V_2 \cos \theta_i^0 - V_1) / R_1 + V_2^2 (V_2 - V_1 \cos \theta_i^0) / R_2 \leq 0 \quad (1.10)$$

если $\pi / 2 \leq \theta_i^0 \leq 3\pi / 2$

Преследователь P стремится минимизировать значение основного γ_1 и вспомогательного γ_2 функционалов, а убегающие E и E_1 , наоборот, максимизировать их.

2. Постановка задачи. Для дифференциальной игры (1.1)–(1.7), параметры объектов P , E и E_1 в которой удовлетворяют условиям покрытия (УП) (1.8)–(1.10), требуется построить оптимальные позиционные стратегии $U = U(t, X_*, Y_*, Z_*) : [t_0, T] \times R^3 \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_i\}$ преследуемого объекта P и $V_i = V_i(t, X_*, Y_*, Z_*) : [t_0, T] \times R^3 \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_i\}$ ($i = 2, 3$) убегающих объектов E и E_1 , доставляющих седловую точку игре в смысле функционала (1.6).

Здесь $X_* = \{x_1, y_1, z_1\}$, $Y_* = \{x_2, y_2, z_2\}$, $Z_* = \{x_3, y_3, z_3\}$, $\{\varphi_i\} = \{\varphi_i \in R^1 : |\varphi_i| \leq 1\}$ ($i = 1, 2, 3$).

Замечание 1. Стратегия одного из убегающих будет определена в связи с особенностью задачи только на интервале $[t_0, t^*]$. Однако, как будет показано ниже, выбор стратегий обоими убегающими на интервале $[t_0, t^*]$ будет оказывать существенное влияние на значение функционала γ_1 .

Замечание 2. В игре (1.1)–(1.7) выполняется условие существования седловой точки в "маленькой игре" [2].

3. Вспомогательные построения. Замена системы координат. Области достижимости. Для упрощения дальнейших построений, как и в [3], заменим систему координат, поместив ее начало в точку начального положения объекта P и направив ось OY вдоль его вектора скорости, а ось OX направо от V_1 . Позиции объектов E и E_1 (совпадающие в момент $t = t_0$) определяются в новой системе координат вектором $(x_i^*, y_i^*, \theta_i^*)$, значения координат которого вычисляются по формулам (4.1) из [3]. В дальнейшем для упрощения изложения опустим звездочки в обозначениях текущих позиций объектов, а обозначения управлений объектов φ_i ($i = 1, 2, 3$) заменим на u для объекта P и на v и v_1 для объектов E и E_1 соответственно.

Уравнения движения (1.4) объектов P , E и E_1 в новой системе координат принимают вид

$$\dot{x}_1 = V_1 z_1, \quad \dot{y}_1 = V_1, \quad \dot{z}_1 = (V_1 / R_1) u, \quad |u| \leq 1 \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_i = V_2 (\sin \theta_i^0 + z_i \cos \theta_i^0), \quad \dot{y}_i = V_2 (\cos \theta_i^0 - z_i \sin \theta_i^0) \quad (3.2)$$

$$\dot{z}_i = (V_2 / R_2) v_i, \quad |v_i| \leq 1$$

Выражения для функционала платы (1.6), (1.7) сохраняют свой прежний вид.

Было показано [3, 4], что областями достижимости $G^{(i)}(t, T)$ для объектов P , E и E_1

выполняется неравенство

$$x_2(T_1) - x_1(T_1) \leq 0 \quad (4.1)$$

где $x_2(T_1)$ – абсцисса точки $A_2(T_1)$ области достижимости E_1 , а $x_1(T_1)$ – абсцисса точки $A_1(T_1)$ области достижимости P , ближайшей к $A_2(T_1)$.

Пусть, далее, при $T = T_2$ на прямую $y = y_1(T_2)$ попадает крайняя точка $B_3(T_2) = \{x_3(T_2), y_3(T_2)\}$ области достижимости E (фиг. 3) и при этом справедливо неравенство

$$x_3(T_2) - x_1(T_2) \geq 0 \quad (4.2)$$

где $x_3(T_2)$ – абсцисса точки $B_3(T_2)$ области достижимости E , а $x_1(T_2)$ – абсцисса точки $B_1(T_2)$ области достижимости P , ближайшей к $B_3(T_2)$.

Будем полагать, что хотя бы одно из неравенств (4.1), (4.2) является строгим.

Подобное взаиморасположение областей достижимости объектов P , E и E_1 при $T = T_1$ и $T = T_2$, находящихся в момент $t = t_1$ в указанных выше позициях, будем называть ситуацией покрытия областью достижимости объекта P областей достижимости объектов E и E_1 в игре "один против двоих". Условия, связывающие параметры объектов P , E и E_1 , для областей достижимости которых реализуется "ситуация покрытия", будем называть условиями покрытия (УП) в игре "один против двоих". Эти условия аналогичны УП из работы [3] и имеют вид (1.8)–(1.10).

5. Вспомогательная задача 1. Рассмотрим сначала задачу о построении оптимальных позиционных стратегий (ОПС) объектов P , E и E_1 на интервале $[t_0, t^*)$, функционал платы в которой задается выражением (1.6).

Постановка вспомогательной задачи 1. Для дифференциальной игры (1.1)–(1.6), параметры и начальные положения объектов P , E и E_1 в которой удовлетворяют УП в игре "один против двоих", требуется на интервале времени $[t_0, t^*)$, где момент $t = t^*$ заранее неизвестен, построить ОПС

$$U^1 = U^1(t, X_*, Y_*, Z_*): [t_0, t^*) \times R^3 \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_1\}$$

преследующего объекта P и ОПС

$$V_i^1 = V_i^1(t, X_*, Y_*, Z_*): [t_0, t^*) \times R^3 \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_1\} \quad (i = 2, 3)$$

для убегающих E и E_1 , доставляющие седловую точку игре (1.1)–(1.5), (1.7).

Из определения ситуации покрытия для P , E и E_1 следует, что для некоторой позиции $\{t, X_*, Y_*, Z_*\}$ игры (1.1)–(1.6), для которой выполняются УП, справедливы равенства, связывающие ординаты точек областей достижимости

$$y_l(T_1) = y_k(T_1), \quad y_l(T_2) = y_l(T_2) \quad (5.1)$$

где либо $k = 2, l = 3$, либо $k = 3, l = 2$, а значит T_j ($j = 1, 2$) вычисляются согласно [3].

Можно показать, что для построения стратегий U^1 и V_i^1 ($i = 2, 3$) существенны лишь абсциссы $x_i(T_j)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) крайних точек областей достижимости P , E и E_1 в моменты $T = T_j$ ($j = 1, 2$) их нахождения на прямых $y = y_1(T_j)$ ($j = 1, 2$).

Введем обозначения

$$s_i^j = s_i(t, T_j) = x_i(T_j) - x_1(T_j), \quad i = 2, 3; \quad j = 1, 2 \quad (5.2)$$

Рассмотрим стратегии $U^1 = U^1(t, X_*, Y_*, Z_*)$ и $V_i^1 = V_i^1(t, X_*, Y_*, Z_*) \equiv V_i^1(t)$, имеющие вид

$$U^1(t, X_*, Y_*, Z_*) = \begin{cases} \text{sign}(s_k^1 + s_l^2), & \text{если } |s_k^1| \neq |s_l^2| \\ [-1, +1], & \text{если } |s_k^1| = |s_l^2| \end{cases} \quad (5.3)$$

$$V_i^1 \equiv V_i^1(t) = (-1)^i, \quad i = 2, 3, \quad t \in [t_0, t^*) \quad (5.4)$$

где индексы k и l в зависимости от начальной позиции объектов E и E_1 и величины угла θ_i^0 могут принимать только следующие две пары значений: либо $k = 2, l = 3$, либо $k = 3, l = 2$.

Пусть теперь объекты P, E и E_1 во вспомогательной игре (1.1)–(1.5), (1.7) движутся под действием стратегий (5.3), (5.4). Позиции рассматриваемой игры при $t_0 \leq t \leq t^*$, для которых

$$s_k^1 = -s_l^2 \quad (5.5)$$

образуют фокальную поверхность S_1 , аналогичную рассмотренной в [10, 11]. При движении объекта P по S_1 может происходить рост значений функционала γ_2 . Можно показать, однако, что стратегия $U^1(t, X_*, Y_*, Z_*)$, задаваемая выражением (5.3), гарантирует, что этот рост будет минимально возможным. Позиции игры (1.1)–(1.5), (1.7), для которых условие (5.5) не выполняется, принадлежат регулярной области рассматриваемой игры. Можно показать, что искомыми оптимальными стратегиями объектов E и E_1 на интервале $[t_0, t^*)$ будут именно программные стратегии, задаваемые выражением (5.4). Это следует из того, что стратегии (5.4) при любых допустимых стратегиях объекта P приводят к наискорейшему нарушению ситуации покрытия в игре "один против двух" и доставляют максимум по V_i ($i = 2, 3$) значений функционала γ_2 .

Учитывая приведенные рассуждения и опираясь на анализ изменения с течением времени областей достижимости объектов P, E и E_1 под действием стратегий U^1 и V_i^1 ($i = 2, 3$), можно показать, что стратегии объектов (5.3) и (5.4) доставляют решение вспомогательной задачи 1 и удовлетворяют равенству

$$\max_{V_2^1, V_3^1} \min_{U^1} \gamma_2 = \min_{U^1} \max_{V_2^1, V_3^1} \gamma_2 = \gamma_2^* \quad (5.6)$$

6. Вспомогательная задача 2. В момент $t = t^*$ игра (1.1)–(1.5), (1.7) переходит в игру сближения–уклонения (1.1)–(1.6) между преследователем и оставшимся в игре убегающим (E или E_1).

Введем обозначения

$$\varepsilon_1(t, x) = s_k(t, T_1), \quad \varepsilon_2(t, x) = s_l(t, T_2) \quad (6.1)$$

где $x = \{X_*, Y_*, Z_*\}$, индексы k и l , как и в (5.3), в зависимости от начальной позиции объектов E и E_1 и величины угла θ_i^0 , могут принимать только две пары значений: либо $k = 2, l = 3$, либо $k = 3, l = 2$.

Пусть $x^* = \{X_*^*, Y_*^*, Z_*^*\}$ – координаты объектов P, E и E_1 в момент $t = t^*$ окончания вспомогательной игры 1, а значения $T = T_j$ ($j = 1, 2$) в (6.1) вычисляются для позиции $\{t^*, x^*\}$ согласно [3]. Можно показать, что стратегии (5.3), (5.4) в игре (1.1)–(1.6) гарантируют равенство

$$\varepsilon_1(t^*, x^*) = \varepsilon_2(t^*, x^*) = \gamma_2^* \quad (6.2)$$

Постановка вспомогательной задачи 2. Для дифференциальной игры (1.1)–(1.6), начальные позиции объектов P, E (или E_1) в которой совпадают с заключительными позициями объектов P, E и E_1 в момент $t = t^*$, требуется на интервале времени $[t^*, T)$ построить ОПС

$$U^2 = U^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i): [t^*, T) \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_1\}$$

преследующего объекта P и позиционную стратегию

$$V_i^2 = V_i^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i): [t^*, T) \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_i\}$$

оставшегося в игре убегающего ($i = 2$, если в игре остается E и $i = 3$, если остается E_1), доставляющие седловую точку игре (1.1)–(1.6).

При $t = t^*$ игра (1.1)–(1.5), (1.7) переходит в задачу (1.1)–(1.6) с одним преследователем P и одним убегающим E или E_1 , рассмотренную в [3]. В этой игре стратегия оставшегося убегающего (E или E_1) обязательно должна быть позиционной, так как позиционная стратегия гарантирует убегающему наилучший для него результат и позволяет ему "наказывать" преследователя за отклонения от своей оптимальной стратегии.

Аналогично построению ОПС (5.3) и (5.4) объектов P , E и E_1 во вспомогательной задаче 1 можно показать, что искомые позиционные стратегии объектов P и E (E_1) в задаче 2 имеют вид

$$U^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} \text{sign}(s_i^1 + s_i^2), & \text{если } |s_i^1| \neq |s_i^2| \\ [-1, +1], & \text{если } |s_i^1| = |s_i^2| \end{cases} \quad (6.3)$$

$$V_i^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i) = \begin{cases} (-1)^q \text{sign}(s_i^1 + s_i^2), & \text{если } |s_i^1| \neq |s_i^2| \\ [-1, +1], & \text{если } |s_i^1| = |s_i^2| \end{cases} \quad (6.4)$$

В выражениях (6.3) и (6.4) $i = 2$, если в игре остается E и $i = 3$, если остается E_1 . В (6.4) $q = 2$, если $0 \leq \theta_i^0 < \pi/2$ или $3\pi/2 < \theta_i^0 \leq 2\pi$ и $q = 1$, если $\pi/2 < \theta_i^0 \leq 3\pi/2$.

Полагаем, что на интервале $[t^*, T)$ объекты P , E (E_1) движутся под действием стратегий U^2 и V_i^2 соответственно. Позиции игры (1.1)–(1.6), для которых $t^* \leq t < T$ выполняется равенство

$$|s_i^2| = |s_i^3| \quad (6.5)$$

образуют сингулярное множество S_2 , являющееся дисперсной поверхностью.

Решение вспомогательной задачи 2 получено в [3]. Можно показать, что для вспомогательной игры 2 справедливо равенство

$$\max_{V_i^2} \min_{U^2} \gamma_1 = \min_{U^2} \max_{V_i^2} \gamma_1 = \gamma_1^* \quad (6.6)$$

Из решения этой задачи следует, что стратегия U^2 и V_i^2 гарантируют результат γ_1^* этой игры, равный

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma^* \quad (6.7)$$

7. Оптимальные стратегии объектов P и E (E_1) в исходной игре. Позиционные стратегии $U(t, X_*, Y_*, Z_*)$ и $V_i(t, X_*, Y_*, Z_*)$ ($i = 2$ или 3), представляющие решение исходной задачи (1.1)–(1.7), строятся на основе решений вспомогательных задач 1 и 2 и имеют вид

$$U(t, X_*, Y_*, Z_*) = \begin{cases} U^1(t, X_*, Y_*, Z_*) & \text{при } t_0 \leq t < t^* \\ U^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i) & \text{при } t^* \leq t < T \end{cases} \quad (7.1)$$

$$V_i(t, X_*, Y_*, Z_*) = \begin{cases} V_i^1(t) & \text{при } t_0 \leq t < t^*, \quad i = 2, 3 \\ V_i^2(t, X_*, x_i, y_i, z_i) & \text{при } t^* \leq t < T, \quad i = 2 \text{ или } 3 \end{cases} \quad (7.2)$$

где выражения U^m и V_i^m ($m = 1, 2; i = 2, 3$) задаются соотношениями (5.3), (6.3) и (5.4), (6.4) соответственно.

Итак, пусть для некоторой позиции $\{t, X_*, Y_*, Z_*\} = \{t, x\}$ игры (1.1)–(1.7) выполняются УП в игре "один против двоих". Полагаем, что объекты P, E и E_1 движутся под действием стратегий (7.1) и (7.2). Пусть в заранее неизвестный момент $t = t^*$ ($t_0 \leq t^* < T$) выхода из игры одного из убегающих (E или E_1) объекты P, E и E_1 находятся в некоторой позиции $\{t^*, X_*, Y_*, Z_*\} = \{t^*, x^*\}$. Тогда из (6.2) и (6.7) следует, что оптимальное решение $\varepsilon(t, x)$ исходной игры (1.1)–(1.7) имеет вид

$$\varepsilon(t, x) = \varepsilon(t^*, x^*) = \gamma^* \quad (7.3)$$

Это решение гарантирует пара стратегий (7.1), (7.2).

Замечание 3. Как и в [3], в случаях когда θ_i^0 или $\theta_i^0 = \pi$, мы имеем тождество $T_2 \equiv T_2$. Это означает, что задача (1.1)–(1.7) переходит в игру с фиксированным моментом окончания $T = T_1 = T_2$ и терминальным функционалом. В этих случаях, как и выше, а также в [10, 11] на интервале $[t_0, t^*)$ будут возникать сингулярные многообразия типа S_1 (фокальная поверхность) и типа S_2 (дисперсная поверхность). Можно показать, что и в этих случаях стратегии (7.1), (7.2) также будут оптимальными, гарантирующими результат игры (1.1)–(1.7), равный (7.3).

8. Построение множества позиций объекта E (E_1), из которых он не может избежать поимки объектом P , при фиксированных значениях параметров обоих объектов. Пусть заданы значения параметров V_1, R_1 объекта P ; V_i, R_i, θ_i^0 ($i = 2, 3$) объектов E и E_1 . Напомним, что согласно (1.2), (1.5) эти значения параметров для E и E_1 совпадают. Полагаем, что в игре реализуется ситуация покрытия и, следовательно, для заданных значений параметров объектов выполняются УП. Фиксируем некоторое произвольное значение $t = T_1$.

Требуется определить позиции (x_i^0, y_i^0) ($i = 1, 2$) объектов E и E_1 в момент $t_0 = 0$, принадлежащие множеству позиций K , из которых объект E (или E_1) не может избежать поимки объектом P в игре (1.1)–(1.7).

Обозначим

$$y^* = R_i [(V_1 - V_i \cos \theta_i^0) / V_i]^2 / (2|\sin \theta_i^0|) \quad (8.1)$$

Из (1.8) следует, что начальная координата y_i^0 объекта E (E_1) удовлетворяет неравенству

$$y_i^0 \leq y^* \quad (8.2)$$

Как показано выше, областями достижимости объектов P, E и E_1 к моменту $t = T_1$ являются отрезки прямых $A_i B_i$, ортогональные векторам $\mathbf{n}_i = \mathbf{V}_i T_1$ ($i = 1, 2, 3$) соответственно. Согласно ситуации покрытия в момент $t = T_1$ координаты крайних точек областей достижимости объектов P и E (или E_1) совпадают

$$x_1(T_1) = x_i(T_1), \quad y_1(T_1) = y_i(T_1) \quad (8.3)$$

где $i = 2$ или 3 в зависимости от заданного значения угла θ_i^0 .

Для произвольного y_i^0 , удовлетворяющего (8.2), используя УП, можем определить (x_i^0, y_i^0) в момент $t_0 = 0$ так, как это описано в [3].

Меняя начальное значение y_i^0 в пределах от 0 до y^* , можно построить кривую K (фиг. 4), представляющую собой множество начальных позиций объекта E (E_1), из которой объект E (или E_1) не сможет избежать поимки объектом P в игре (1.1)–(1.7).

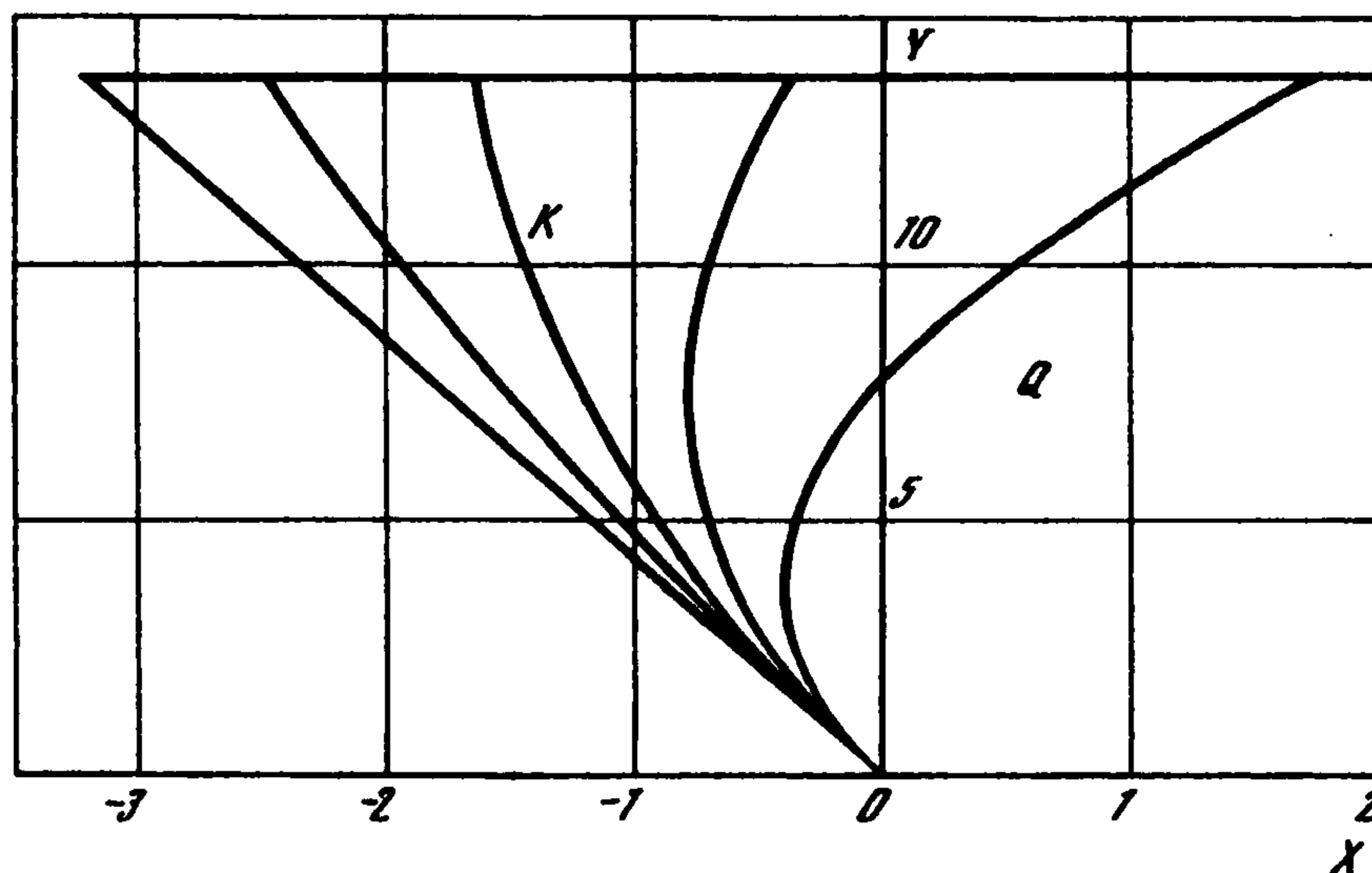
Введем обозначения

$$a = (V_i^2 \cos \theta_i^0) / (2R_i) - V_i^2 / (2R_1), \quad b = V_i \sin \theta_i^0$$

Можно показать, что искомая кривая K , в зависимости от заданного значения угла θ_i^0 , описывается уравнениями

$$x(y) = -aT_1^2 - bT_1 \quad (\text{или } x(y) = aT_2^2 - bT_2) \quad (8.4)$$

где $0 \leq y \leq y^*$, а T_j ($j = 1, 2$) вычисляются согласно [3] для каждого отдельного значения y .



Фиг. 4

9. Построение области начальных положений объектов E (E_1), из которой объект E (или E_1) не может избежать поимки объектом P . Пусть заданы параметры объектов E и E_1 – скорости V_i , радиус кривизны траектории R_i и угол наклона θ_i^0 вектора скорости V_i к оси OY ($i = 2, 3$), например, $0 \leq \theta_i^0 < \pi/2$. Напомним, что согласно (1.2)–(1.5) параметры и начальные позиции E и E_1 , а также значения θ_i^0 ($i = 1, 2$) совпадают.

Для произвольной начальной координаты $y_i^0 \geq 0$ объектов E и E_1 , используя (1.8) из УП, зададим значение скорости V_1 . В зависимости от величины угла θ_i^0 из неравенств (1.9) или (1.10) определяем максимально возможное значение радиуса кривизны траектории R_1 объекта P . Обозначим это значение через R_1^{\max} . Введем обозначения

$$a^* = (V_i^2 \cos \theta_i^0) / (2R_i) - V_1^2 / (2R_1^{\max}), \quad b^* = V_i \sin \theta_i^0$$

где $i = 2$ или 3 в зависимости от того, какой из объектов E или E_1 остается в игре при $t > t^*$.

Опираясь на процедуру построения кривой K из разд. 8, можем сделать следующее заключение. Если начальное положение объектов E и E_1 в игре "один против двоих" принадлежит области, ограниченной прямыми $y = y^*$, $y = 0$ и лежащей слева от кривой $x(y) = -a^*T_1^2 - b^*T_1$ (или кривой $x(y) = a^*T_2^2 - b^*T_2$), где $0 \leq y \leq y^*$, то игра сближения–уклонения "один против одного" оканчивается поимкой E (или E_1). В противном случае в игре "один против одного" объект E (или E_1) избегает поимки. Указанная область является искомой областью начальных позиций E и E_1 , из которой E (или E_1) не сможет избежать поимки объектом P . На фиг. 4 изображена такая область для значений параметров объектов $V_i = 2$, $R_i = 3$, $V_1 = 6$ и угла $\theta_i^0 = \pi/6$.

Можно показать, что эта область – пучок кривых K , построенных для различных значений R_1 из диапазона $0 \leq R_1 \leq R_1^{\max}$. Кривая K , соответствующая $R_1 = R_1^{\max}$, является левой границей искомой области начальных положений E и E_1 (фиг. 4).

Аналогичные области начальных положений объектов E и E_1 можно построить для других значений θ_i^0 .

Замечание 4. Опираясь на результаты данной работы, можно решить задачу о построении позиционной стратегии оставшегося в игре сближения–уклонения "один против двоих" убегающего, гарантирующей ему уклонение от преследователя на указываемое расстояние и обеспечивающей попадание на заданное множество окончания игры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-01089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Земсков К.А., Пашков А.Г. Об игре сближения–уклонения двух управляемых объектов с ограниченной маневренностью // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 3. С. 23–33.
4. Пашков А.Г. О сравнении решений линейных и нелинейных дифференциальных игр сближения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 551–560.
5. Пашков А.Г. Об оценке гарантированного результата в нелинейной дифференциальной игре сближения // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 760–766.
6. Пашков А.Г. О методах оценивания функций оптимального результата в некоторых задачах сближения // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 164–168.
7. Pashkov A.G., Zemskov K.A. Construction of optimal positional strategies in a pursuit–evasion differential game with one pursuer and two evaders // Prepr. 6th Intern. Sympos. on Dynamic Games and Applications. St.-Jovite. Quebec, Canada, 1994. P. 93–98.
8. Pashkov A.G., Synitsyn A.V., Zemskov K.A. The solution of game problems in dynamics // Abstrs. 3rd Intern. Congr. of Industr. and Appl. Mathematics. Hamburg, Germany, 1995. P. 393.
9. Pashkov A.G., Synitsyn A.V., Zemskov K.A. Construction of optimal solution in some pursuit–evasion differential games of several players // Abstrs. 17th IFIP TC7 Conf. on System Modelling and Optimization. Prague, Czech. Rep. 1995. V. 1. P. 129–131.
10. Levchenkov A.Y., Pashkov A.G. Differential game of optimal approach of two inertial pursuers to noninertial evader // J. Optimiz. Theory and Appl. 1990. V. 65. N 3. P. 501–518.
11. Breakwell J.V., Hagedorn P. Point capture of two evaders in succession // J. Optimiz. Theory and Appl. 1979. V. 27. N 1. P. 89–97.
12. Olsder G.J., Breakwell J.V. Role determination in an aerial dogfight // Intern.J. Game Theory. 1974. V. 3. N 1. P. 47–66.
13. Cockayne E. Plane pursuit with curvature constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. V. 15. N 6. P. 1511–1516.
14. Greenfeld I. A differential game of surveillance evasion of two identical cars // J. Optimiz. Theory and Appl. 1987. V. 52. N 1. P. 53–79.
15. Borowko P., Rzymowski W. On the game of two cars // J. Optimiz. Theory and Appl. 1984. V. 44. N 3. P. 381–396.
16. Marec J.P., Nguyen Van Nhan. Two-dimensional pursuit evasion game with penalty on turning rates // J. Optimiz. Theory and Appl. 1977. V. 23. N 2. P. 305–345.