УДК 531.36

© 1997 г. И.В. Бойков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается система с последействием, состояние которой в какой-либо момент времени t зависит не только от ее фазовых координат в момент t, но и от фазовых координат в предшествующие моменты времени $[\gamma_i(t), t]$, где $\gamma_i(t) \le t$, $i = 1, 2,\ldots, n$ (в частном случае $\gamma_i(t) \equiv t_0$ при $i = 1, 2,\ldots, n$). Вторым методом Ляпунова исследуется устойчивость таких систем.

Будем исследовать устойчивость движения, отвечающего нулевому решению уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \int\limits_{\Gamma(t)}^{t} \mathbf{K}(t,s,\mathbf{x}(s))ds + \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \quad \mathbf{u} \in R^n \tag{1}$$

где $\gamma_i(t) \le t$, $\gamma_i(0) = \beta_0$; матрица $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$ и вектор-функции $\mathbf{\Gamma}(t) = (\gamma_1(t),\ldots, \gamma_n(t))$, $\mathbf{K}(t, s, \mathbf{x}(s)) = (K_1(t, s, \mathbf{x}(s)),\ldots, K_n(t, s, \mathbf{x}(s)))$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),\ldots,f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t))$ непрерывны в области $\Omega_1 \times \Omega_2 \times [0, \infty)$; $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots, u_n)$; $F(0, \mathbf{u}, t) \equiv 0$.

Здесь Ω_1 – некоторая окрестность точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; Ω_2 – область определения вектора $\mathbf{u}(t) = (u_1(t),\ldots, u_n(t))$; индексы i, j принимают значения $1, 2,\ldots, n$.

Отметим, что случай [1], когда вектор управления $\mathbf{u}(t)$ задается аналитическими функционалами, представимыми абсолютно сходящимися рядами Вольтерры–Фреше

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1\ldots j_k=1}^{n} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t K_i^{j(k)}(t,s_1,\ldots,s_k)x_{j_1}(s_1)\ldots x_{j_k}(s_k)ds_1,\ldots,dx_k$$

где $K_i^{j(k)}(t,s_1,\ldots,s_k)$ – непрерывные функции, заданные на множестве $J_k' = \{(t, s_1,\ldots$ $\ldots, s_k) \in R^{k+1}, 0 \le s_r \le t \le \infty, r = 1, 2,\ldots, k\}$, также укладывается в описанную выше формулу задания вектора управления.

Уравнения вида (1) находят применение в задачах вязкоупругости [2, 3], аэроупругости [4], а также при исследовании экономических моделей [5].

При $\gamma_i(t) \equiv t_0$, аналитической вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и линейном интегральном операторе устойчивость уравнения (1) была исследована [1] первым методом Ляпунова.

Устойчивость уравнений с последействием рассматривалась многими авторами [6–8]. Был предложен [9, 10] метод исследования устойчивости систем дифференциальных уравнений в критическом случае одного нулевого корня, основанный на исследовании спектра якобиана правой части уравнения в окрестности возмущенного решения. Этот метод был распространен [11, 12] на дифференциальные и разностные уравнения и на всевозможные критические случаи.

Ниже он распространяется на системы, описываемые уравнениями вида (1).

Уравнение (1) будем исследовать в n-мерном пространстве R_n. В качестве нормы в R_n можно взять одну из следующих:

$$\|\mathbf{x}\|_1=\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{1/2},\ \|\mathbf{x}\|_2=\max|x_i|,\ \|\mathbf{x}\|_3=\sum_{k=1}^{N}|x_k|$$

Ниже используются обозначения: $R(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r\}$, $S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in R_n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$, $\operatorname{Re} A = A_R = (A + A^*)/2$, ΛA – логарифмическая норма линейного оператора A, определяемая [13] выражением $\Lambda(A) = \lim_{h\downarrow 0}(\|I + hA\| - 1)/h$.

Пусть $r > 0$. Обозначим через $\phi(t)$ произвольную непрерывно-дифференцируемую кривую $\phi(t) = (\phi_1(t),\dots, \phi_n(t))$, принадлежащую шару $R(\mathbf{0}, r)$. Зафиксируем произвольный момент времени T.

Введем вектор $C = \operatorname{col}(c_1,\dots, c_n)$, где $c_i = \phi_i(T)$. Введем обозначения

$$B(\mathbf{C},T)=\{b_{ij}(\mathbf{C},T)\},\quad H(\mathbf{C},T)=\{h_{ij}(\mathbf{C},T)\}$$

$$b_{ij}(\mathbf{C},T)=\begin{cases}x_i(T)/(mc_j), & c_j\neq 0\\ 0, & c_j=0\end{cases},\quad \chi_i(T)=\int_{\gamma_i(T)}^{T}K_i(T,\tau,\phi(\tau))d\tau$$

$$h_{ij}(\mathbf{C},T)=\begin{cases}[F_i(0,\dots,0,c_j,c_{j+1},\dots,c_n,u(T),T)-\\ -F_i(0,\dots,0,0,c_{j+1},\dots,c_n,u(T),T)]/c_j, & c_j\neq 0\\ 0, & c_j=0\end{cases}$$

где m – число ненулевых координат вектора $\mathbf{C}$.

Теорема 1. Пусть при любом фиксированном значении t, $0 \le t \le \infty$, при любом ненулевом векторе $\mathbf{C} \in R(\mathbf{0}, r)$, где $r > 0$, при любой непрерывно-дифференцируемой кривой $\phi(t) = (\phi_1(t),\dots, \phi_n(t))$, принадлежащей шару $R(\mathbf{0}, r)$, и такой, что $\phi_i(t) = c_i$, выполнено условие

$$\Lambda(A(t) + B(\mathbf{C}, t) + H(\mathbf{C}, T)) < 0,\qquad (\Lambda(A(t) + B(\mathbf{C}, t) + H(\mathbf{C}, T)) < -\alpha,\ \alpha = \mathrm{const} > 0)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $r_1 < r$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение уравнения (1), у которого значения функции $\mathbf{x}(t)$ при $\beta_0 \le t \le 0$ расположены в шаре $R(\mathbf{0}, r_1)$, не покинет этого шара. Предположим противное: пусть в момент времени $t = T$ траектория $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1) покидает шар $R(\mathbf{0}, r_1)$.

Введем обозначения

$$d_{il}=a_{il}(T)+\chi_i(T)/mx_l(T)+[F_i(0,\dots,0,x_l(T),\dots,x_n(T),\mathbf{u}(T),T)-$$
$$-F_i(0,\dots,0,0,x_{l+1}(T),\dots,x_n(T),\mathbf{u}(T),T)]/x_l(T)$$

$$g_i(t,\mathbf{x}(t))=\sum_{l=1}^{n}(a_{il}(t)-a_{il}(T))x_l(t)-\sum_{l=1}^{n}\chi_i(T)\frac{(x_l(t)-x_l(T))}{mx_l(T)}-$$
$$-\frac{F_i(x_1(T),\dots,x_n(T),\mathbf{u}(T),T)-F_i(0,x_2(T),\dots,x_n(T),\mathbf{u}(T),T)}{x_1(T)}(x_1(t)-x_1(T))-$$
$$-\dots-\frac{F_i(0,\dots,0,x_n(T),\mathbf{u}(T),T)-F_i(0,\dots,0,u(T),T)}{x_n(T)}(x_n(t)-x_n(T))+$$
$$+F_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)-F_i(\mathbf{x}(T),\mathbf{u}(T),T)$$

где m – число отличных от нуля чисел среди $x_1(T),\dots, x_n(T)$.

Отметим, что если при некотором l $(1 \le l \le n)$ $x_l(T) = 0$, то в обозначениях d_{il} и g_i слагаемые, у которых знаменатель равен $x_l(T)$, опускаются.

Тогда при $t \geq T$ систему уравнений (1) можно представить в виде

$$dx/dt = Dx + G(t, x(t)), \quad D = \{d_{ij}\}, \quad G(t, x(t)) = \mathrm{col}\,(g_1(t, x(t)), \ldots, g_n(t, x(t))) \tag{2}$$

Решение уравнения (2) при $t \geq T$ имеет вид

$$x(t) = e^{D(t-T)}x(T) + \int_T^t e^{D(t-s)}G(s, x(s))ds \tag{3}$$

Из структуры оператора $G(t, x(t))$ следует, что при любом как угодно малом $\varepsilon(\varepsilon > 0)$ можно выбрать такое значение Δt, что при $T \leq t \leq T + \Delta t$ $\|G(t, x(t))\| \leq \varepsilon\|x(t)\|$.

Переходя в уравнении (3) к нормам, имеем при $T \leq t \leq T + \Delta t$

$$\|x(t)\| \leq e^{\Lambda(D)(t-T)}x(T) + \varepsilon\int_T^t e^{\Lambda(D)(t-s)}\|x(s)\|ds \tag{4}$$

Введем новую переменную $\psi(t) = e^{-\Lambda(D)t}\|x(t)\|$. Тогда неравенство (4) принимает вид

$$\psi(t) \leq \psi(T) + \varepsilon\int_T^t \psi(s)ds \tag{5}$$

Применяя к (5) неравенство Гронуолла–Беллмана и возвращаясь к норме $\|x(t)\|$, убеждаемся, что при $T \leq t \leq T + \Delta t$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq \exp\,((\Lambda(D) + \varepsilon)(t - T))\|x(T)\|$$

Так как по условиям теоремы логарифмическая норма меньше 0, то взяв ε таким, что $\Lambda(D) + \varepsilon \leq 0$, и подобрав по нему соответствующее значение Δt^*, убеждаемся в том, что в промежутке времени $[T, T + \Delta t^*]$ траектория решения уравнения (1) не покидает сферы $S(\mathbf{0}, r_1)$. Из полученного противоречия следует устойчивость решения уравнения (1).

Аналогичным образом доказывается асимптотическая устойчивость. Теорема доказана.

Замечание. Если система уравнения (1) исследуется в евклидовом пространстве E_n, то в формулировке теоремы условие

$$\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < 0(\Lambda(A(t) + B(C, t) + H(C, T)) < -\alpha)$$

можно заменить на следующее:

$$\sigma\,(\mathrm{Re}\,(A(t) + B(C, t) + H(C, t))) < 0 \quad \sigma\,((\mathrm{Re}\,(A(t) + B(C, t) + H(C, t))) < -\alpha)$$

Рассмотрим несколько классов задач, для которых легко проверяются условия теоремы 1. В качестве одного из таких классов рассмотрим уравнения вида (1), у которых

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \max_{i=1,\ldots,n} |t - \gamma_i(t)| \leq H \tag{6}$$

Пусть $r > 0$. Зафиксируем произвольное значение T. Пусть $\boldsymbol{\zeta}(T) = (\zeta_1(T), \ldots, \zeta_n(T))$, $\zeta_i(T) \in (\gamma_i(T), T)$. Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ – произвольная точка, расположенная внутри сферы $S(\mathbf{0}, r)$, а $s(r) = (s_1(r), \ldots, s_n(r))$ – произвольная точка, расположенная на сфере $S(\mathbf{0}, r)$. Введем обозначения

$$D = \{d_{il}\}, \quad d_{il} = d_{il}(T, \zeta_i(T), \boldsymbol{\eta}, s(r)) = a_{il}(T) + K_i(T, \zeta_i(T), \boldsymbol{\eta})(T - \gamma_i(T))/(ms_l(r)) +$$
$$+[F_i(0, \ldots, 0, s_l(r), \ldots, s_n(r), \mathbf{u}(T), T) - F_i(0, \ldots, 0, s_{l+1}(r), \ldots, s_n(r), \mathbf{u}(T), T)]/s_l(r)$$

где m – число ненулевых координат вектора $s(r) = (s_1(r), \ldots, s_n(r))$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (6). Если при достаточно малых $0 < r \leq r^*$, произвольных $T(t_0 \leq T < \infty)$, $\boldsymbol{\zeta}(T)$, $\boldsymbol{\eta} \in R(0, r)$, $s(r) \in S(\mathbf{0}, r)$ логарифмическая норма матрицы D отрицательна (меньше $-\alpha$, $\alpha > 0$), то решение уравнения (1) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Зафиксируем произвольное достаточно малое значение $r(0 < r \le \le r^*)$ и покажем, что при выполнении условий теоремы каждое решение уравнения (1), у которого значения функции $\mathbf{x}(t)$ при $\beta_0 \le t \le 0$ расположены в шаре $R(\mathbf{0}, r)$, не покинет этого шара. Предположим противное: в момент времени $t = T$ траектория $x(t)$ уравнения (1) покидает шар $R(\mathbf{0}, r)$. Обозначим точку пересечения траектории $\mathbf{x}(t)$ со сферой $S(\mathbf{0}, r)$ через $\mathbf{s}(r) = (s_1(r),\ldots, s_n(r))$.

Воспользовавшись теоремой о среднем, имеем $\chi_i(T) = K_i(T, \zeta_i(T), \eta)(T - \gamma_i(T))$.

Тогда i-е уравнение системы уравнений (1) можно представить в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^{n} d_{il}x_l(t) + g_i(t, x(t))$$

$$g_i(t,\mathbf{x}(t)) = \sum_{l=1}^{n}(a_{il}(t) - a_{il}(T))x_l(t) -$$

$$-\textstyle\sum_{l=1}^{n} K_i(T,\zeta_i(T),\eta)(T-\gamma_i(T))(x_l(t)-s_l(r))/(ms_l(r)) +$$

$$+(\chi_i(t) - K_i(T,\zeta_i(T),\eta)(T-\gamma_i(T))) - [F_i(s_1(r),\ldots,s_n(r),\mathbf{u}(T),T) -$$

$$-F_i(0,s_2(r),\ldots,s_n(r),\mathbf{u}(T),T)](x_1(t)-s_1(r))/s_1(r) - \ldots -[F_i(0,\ldots,0,s_n(r),\mathbf{u}(T),T) -$$

$$-F_i(0,\ldots,0,0,\mathbf{u}(T),T)](x_n(t)-s_n(r))/s_n(r) + [F_i(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) - F_i(\mathbf{s}(r),\mathbf{u}(T),T)]$$

При $t \ge T$ систему уравнений (1) можно представить в виде

$$d\mathbf{x} / dt = D\mathbf{x} + \mathbf{G}(t,\mathbf{x}(t)),\quad \mathbf{G}(t,\mathbf{x}(t)) = \mathrm{col}(g_1(t,\mathbf{x}(t)),\ldots,g_n(t,\mathbf{x}(t)))$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, завершаем доказательство теоремы 2.

Рассмотрим следующий модельный пример:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + \int_{t-H}^{t} x^{1+\varepsilon}(\tau)\mathrm{sgn}(x(\tau))d\tau,\ \varepsilon > 0 \tag{7}$$

Видно, что $d(T)$ может принимать одно из следующих значений: $-1+\eta^{1+\varepsilon}Hr^{-1}$, $-1-\eta^{1+\varepsilon}Hr^{-1}$. В обоих случаях $\Lambda(d(T)) < -1 + |\eta^{1+\varepsilon}Hr^{-1}|$. Так как по построению $\eta < r$, то $\Lambda(d(T)) < -1 + |\eta^{\varepsilon}H|$ и остается меньше $-\alpha(\alpha = \mathrm{const} > 0)$ при любом конечном H и достаточно малых значениях r. Следовательно, решение уравнения (7) асимптотически устойчиво.

В качестве другого класса рассмотрим уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t) + F(x(t), \int_0^t K(t,s,x(s))ds) \tag{8}$$

где $F(x, y)$ – непрерывная функция по обеим переменным.

Для простоты обозначений уравнение (8) предполагается скалярным. Из дальнейших выкладок видно, что приводимые ниже условия устойчивости решения уравнения (8) распространяются на подобные системы интегро-дифференциальных уравнений.

Наложим на функцию $F(x, y)$ условия: 1) $F(-x, y) = -F(x, y)$, 2) $F(0, y) \equiv 0$.

Пусть r – достаточно малое положительное число. Через $s_1(r)$ обозначим точки, лежащие на сфере $S(0, r)$ в пространстве R_1, т.е. $s_1(r) = \pm r$. Каждому значению t поставим в соответствие некоторое число $\zeta_1(t) \in (0, t)$. Пусть η_1, η_2 – произвольные числа, расположенные в интервале $(-r, r)$, причем $\eta_1, \eta_2 \ge 0$ при $s_1(r) = r$ и $\eta_1, \eta_2 \le 0$ при $s_1(r) = -r$.

Введем обозначение

$$d(T)=\begin{cases} a(T)+F(\eta_1, TK(T,\zeta_1,\eta_2))/\eta_1, & |\eta_2|\le \eta_1|, \quad \eta_1\ne 0 \\ a(T), & \eta_1=0 \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть r – произвольное положительное достаточно малое число. Если при любом $T(0 < T < \infty)$, произвольных $\zeta(T) \in (0, T)$, $\eta_1, \eta_2 \in S(0, r)(\eta_1 \cdot \eta_2 \ge 0, |\eta_2| \le \le |\eta_1|)$ выполняется условие $d(T) < 0(d(T) < -\alpha, \alpha > 0)$, то решение уравнения (8) устойчиво (асимптотически устойчиво).

Доказательство. Предположим для определенности, что $x(0) = x_0 > 0$. Пусть в момент времени T траектория решения уравнения (8) покидает сферу $S(0, r)$, т.е. проходит через точку r на оси OX. Через точку $-r$ траектория пройти не может, так как $x_0 > 0$, а по условию 2), налагаемому на функцию $F(x, y)$, траектория, начавшаяся в сегменте $[0, r]$, не может перейти в интервал $[-r, 0)$.

Представим при $t \ge T$ уравнение (8) в виде

$$\frac{dx}{dt}=d(T)x(t)+(a(t)-a(T))x(t)+F(r,\psi(T))-F(r,TK(T,\zeta_1\eta_2))x(t)/r+$$

$$+F(x(t),\psi(t))-F(r,\psi(T)),\quad \psi(t)=\int_0^t K(t,s,x(s))ds$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, и учитывая, что траектория уравнения (8) может находиться только в сегменте $[0, r]$, убеждаемся в справедливости теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сергеев В.С.* Об асимптотической устойчивости движений в некоторых системах с последействием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.
2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
3. *Ильюшин А.А., Победря В.Е.* Основы математической теории термо вязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
5. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.
6. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
7. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
8. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
9. *Виноград Р.Э.* Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости // Докл. АН СССР. 1953. Т. 101. № 2. С. 209–212.
10. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня // Мат. сб. 1955. Т. 37. № 1. С. 83–88.
11. *Бойков И.В.* Об устойчивости решений дифференциальных и разностных уравнений в критических случаях // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 6. С. 1298–1300.
12. *Бойков И.В.* Об одном способе определения областей устойчивости систем автоматического регулирования // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 2. С. 20–25.
13. *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970. 534 с.

Пенза

Поступила в редакцию
18.XII.1995