УДК 531.36

© 1997 г. В.В. Козлов

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ РАВНОВЕСИЙ ЗАРЯДОВ СИЛЬНЫМИ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

Рассматривается задача о возможности стабилизации неустойчивых (согласно теореме Ирншоу) равновесий свободного заряда в электростатическом поле путем добавления стационарного магнитного поля. Возникающая при этом дополнительная сила Лоренца имеет гироскопический характер. Приведен пример возможности стабилизации в строгой релятивистской постановке задачи. Получены критерии стабилизации неустойчивых равновесий линеаризованных систем. Изучены условия устойчивости зарядов в сильных магнитных полях и даны оценки вероятности стабилизации. Указаны некоторые многомерные аналоги этих результатов. В частности, рассмотрена задача о гироскопической стабилизации в случае вырождения матрицы гироскопических сил. Указаны некоторые экстремальные критерии устойчивости положений равновесия.

1. Теорема Ирншоу. Известно [1], что равновесие свободного заряда в любом электростатическом поле всегда неустойчиво (теорема Ирншоу, 1839 г.). Известные доказательства основывались на рассмотрении уравнений в вариациях (см., например, [1]). Однако легко привести примеры электростатических полей, допускающих дискретные симметрии высоких порядков, когда ряд Тейлора потенциальной энергии начинается с членов любой степени не менее третьей. Здесь уже анализ первого приближения не может дать заключения об устойчивости равновесия. Первое строгое и полное доказательство теоремы Ирншоу дано в [2]. Отмечено в [3], что теорема Ирншоу справедлива и в релятивистском случае. Конечно, линеаризация релятивистских уравнений приводит к обычным линейным уравнениям Ньютона. Однако, как сказано выше, для вырожденных равновесий эти линейные уравнения становятся непригодными. Доказательство неустойчивости равновесия использует свойство гармоничности потенциала и первый метод Ляпунова для сильно нелинейных систем [4].

Теорему Ирншоу можно распространить на псевдоримановы пространства, более общие, чем пространство Минковского. Пусть M^4 – псевдориманово пространство – время с сигнатурой $+---$. Рассмотрим некоторую времениподобную геодезическую и в некоторой ее окрестности введем полугеодезические координаты $x_i (0 \leqslant i \leqslant 3)$, $x_0 = ct$, в которых псевдориманова метрика имеет вид

$$ds^2 = \mu c^2 dt^2 - \sum_{i,j \geqslant 1} g_{ij} dx_i dx_j$$

Коэффициенты μ, g_{ij} зависят от $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_3)$. Эта система отсчета называется статической, если μ и g зависят лишь от пространственных координат x_1, x_2, x_3. В пространствах со статическими системами отсчета существуют нетривиальные стационарные электрические поля (см., например, [5]). Уравнения движения заряда e с массой m получаются из вариационного принципа

$$\delta\int(-mc)ds+e\omega=0$$

где ω – 1-форма на M^4, задающая 4-потенциал электромагнитного поля. Мировые линии электрона, параметризованные временем, удовлетворяют дифференциальным уравнениям, обобщающим известные уравнения Пуанкаре–Минковского. Положениям равновесия отвечают времениподобные геодезические пространства M^4. Оказывается, все такие равновесия неустойчивы. Эта обобщенная теорема Ирншоу доказывается методом работы [3].

2. Возможность стабилизации равновесия заряда в магнитном поле. Пусть теперь M^4 – пространство Минковского. Движение заряда в электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях описывается релятивистским уравнением

$$\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^{\cdot}=e(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v},\ \mathbf{H}]) \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{v}=\mathbf{x}^{\cdot}$ – скорость заряда, c – скорость света.

Рассмотрим стационарное электромагнитное поле ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят явно от времени). Поле $\mathbf{E}$ потенциально: $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$. Магнитная составляющая силы Лоренца является гироскопической силой: ее присутствие не влияет на сохранение полной энергии

$$F=-mc(c^2-v^2)^{1/2}+\varphi \tag{2.2}$$

Если $\mathbf{H}=0$, то все равновесия (стационарные точки потенциала φ) неустойчивы.

Приведем простой пример, показывающий возможность стабилизации неустойчивых равновесий при помощи стационарного магнитного поля. Предположим, что электрическое поле $\mathbf{E}$ создается двумя одинаковыми зарядами Q, расположенными на оси x_3 на расстоянии R от начала координат O. Тогда точка O – неустойчивое положение равновесия. Потенциал электрического поля равен $\varphi_+ + \varphi_-$, где

$$\varphi_\pm=eQ[x_1^2+x_2^2+(R\mp x_3)^2]^{-1/2}$$

Разложение полной энергии (2.2) в ряд Маклорена имеет вид

$$F=m(v_1^2+v_2^2+v_3^2)/2-eQ(x_1^2+x_2^2-2x_3^2)/R^3+\ldots$$

Если $eQ>0$ (что и будем полагать далее), то степень неустойчивости (индекс Морса функции F в критической точке $\mathbf{x}=\mathbf{v}=0$) равна двум. Если же заряды e и Q имеют противоположные знаки, то степень неустойчивости нечетна (равна единице) и по теореме Кельвина–Четаева гироскопическая стабилизация невозможна.

Введем магнитное поле $\mathbf{H}=(0, 0, \mathrm{H})$, $\mathrm{H}=\mathrm{const}$, удовлетворяющее, конечно, уравнениям Максвелла. Поскольку кинетическая энергия и электромагнитное поле инвариантны относительно поворотов вокруг оси x_3, то уравнения (2.1) допускают интеграл Нётер

$$\Phi=\frac{mc(v_1x_2-v_2x_1)}{(c^2-v_1^2-v_2^2-v_3^2)^{1/2}}+\frac{eH}{2c}(x_1^2+x_2^2)=m(v_1x_2-v_2x_1)+\frac{eH}{2c}(x_1^2+x_2^2)+\ldots$$

Функцию Ляпунова ищем в виде связки интегралов $F+\lambda\Phi$, где $\lambda=\mathrm{const}$. Подбирая λ из условия минимума этого интеграла, получаем следующее строгое условие устойчивости по Ляпунову:

$$H^2 > 8Qmc^2/(eR^3)$$

3. Условия гироскопической стабилизации. Исследуем задачу о стабилизации неустойчивых равновесий заряда магнитным полем в линейном приближении. Обозначая для удобства

$$e\varphi/m \to \varphi, \quad e\mathbf{H}/(mc) \to \mathbf{H}$$

линеаризованное уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot} = -\partial\varphi/\partial\mathbf{x} + [\mathbf{x}^{\cdot}, \mathbf{H}]; \quad \varphi = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2, \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) \tag{3.1}$$

Подходящим ортогональным преобразованием матрицу A приведем к диагональному виду: $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, то

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{3.2}$$

Если $A \neq 0$, то среди чисел a_1, a_2, a_3 найдется хотя бы одно отрицательное. Тогда равновесие $\mathbf{x} = 0$ будет неустойчивым (по теореме Ляпунова). Это – теорема Ирншоу в невырожденном случае, когда $A \neq 0$ [1].

При учете принятых соглашений уравнения (3.1) запишем в следующем явном виде:

$$x_1^{\cdot\cdot} + H_2 x_3^{\cdot} - H_3 x_2^{\cdot} + a_1 x_1 = 0, \ldots \tag{3.3}$$

К такой же форме приводятся общие линейные уравнения гироскопических систем с тремя степенями свободы. Специфика рассматриваемой задачи заключается в выполнении равенства (3.2).

Запишем характеристическое уравнение линейной системы (3.3) с учетом соотношения (3.2):

$$f(\lambda^2) = \lambda^6 + \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^2 + \gamma = 0$$

$$\alpha = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2, \quad \beta = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 + a_1H_1^2 + a_2H_2^2 + a_3H_3^2,$$

$$\gamma = a_1a_2a_3$$

Равновесие $\mathbf{x} = 0$ заведомо устойчиво, если многочлен третьей степени f имеет три различных отрицательных вещественных корня. Это условие эквивалентно неравенствам

$$\beta > 0, \quad 0 < \gamma < \alpha\beta$$

$$D = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3\gamma + 18\alpha\beta\gamma - 4\beta^3 - 27\gamma^2 > 0 \tag{3.4}$$

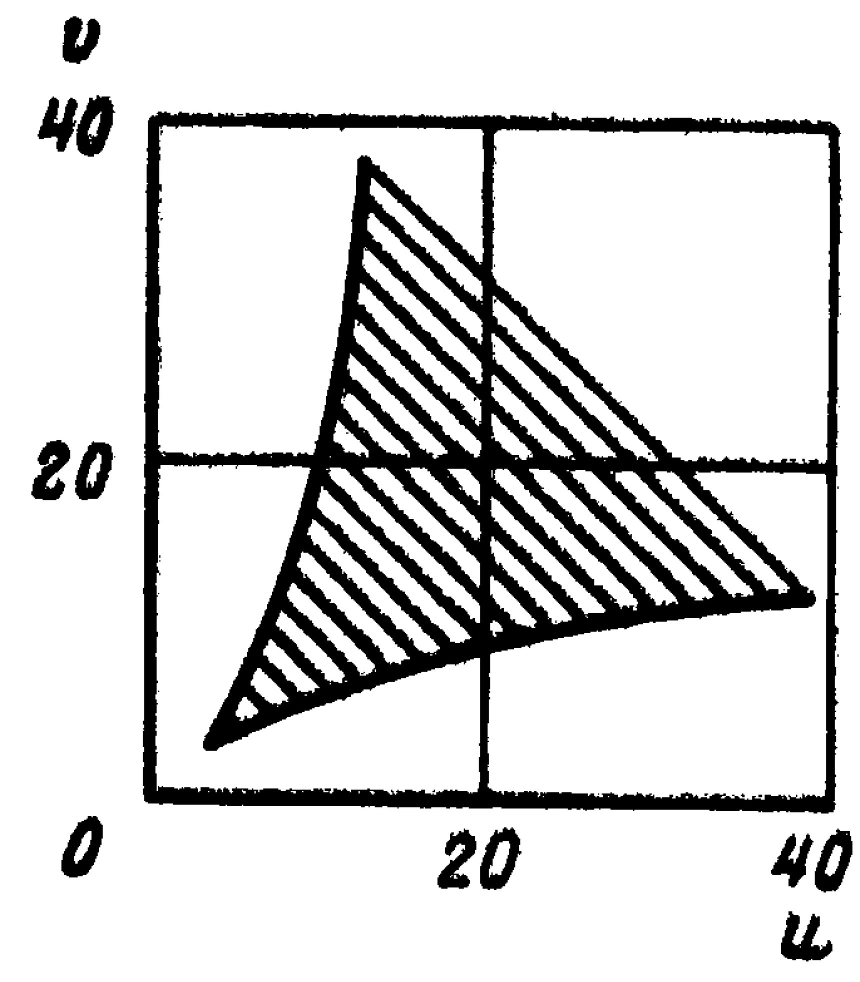
Первые два неравенства гарантируют, что корни многочлена f лежат в левой комплексной полуплоскости (критерий Гурвица). Условие $D \geqslant 0$ (D – дискриминант многочлена f) эквивалентно вещественности корней уравнения $f = 0$, причем, если $D > 0$, то все они различны.

Неравенства (3.4) можно представить в простом геометрическом виде. Если $\gamma < 0$, то степень неустойчивости нечетная и гироскопическая стабилизация невозможна. Поэтому рассмотрим случай, когда $\gamma > 0$ и положим $u = \alpha\gamma^{-1/3}$, $v = \beta\gamma^{-2/3}$. Тогда условия устойчивости (3.4) примут вид

$$v > 0, \quad uv > 1, \quad u^2v^2 - 4(u^3 + v^3) + 18uv - 27 > 0$$

Соответствующая область на плоскости параметров u, v изображена на фиг. 1 (она заштрихована). Ее граница имеет одну особую точку $u = v = 3$, в окрестности которой эта кривая выглядит как полукубическая парабола. Отметим, что условие устойчивости $\alpha\beta > \gamma$ автоматически выполняется в силу условия положительности дискриминанта D.

Отметим, что условия устойчивости равновесия $\mathbf{x} = 0$ общей гироскопической системы с тремя степенями свободы (3.3) имеют тот же вид (3.4), только к параметру α надо добавить сумму $a_1 + a_2 + a_3$.



Фиг. 1

4. Экстремальный критерий устойчивости. Условие устойчивости равновесия часто можно представить как условие экстремума некоторой функции, зависящей лишь от положения $\mathbf{x}$. Например, если потенциальная энергия $P = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$ имеет строгий минимум в точке $\mathbf{x} = 0$, то равновесие устойчиво. Наоборот, если функция $P + ([\mathbf{H}, \mathbf{x}], [\mathbf{H}, \mathbf{x}])/4$ достигает максимума при $\mathbf{x} = 0$, то равновесие неустойчиво [6]. Дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в обзорах [7, 8].

Предложение 1. Если $\gamma > 0$, то равновесие $\mathbf{x} = 0$ системы (3.3) устойчиво тогда и только тогда, когда квадратичная форма $(B\,\mathbf{x}, \mathbf{x})$, где

$$B = \begin{Vmatrix} \beta & \gamma^{1/2} & 2\alpha\gamma^{1/2} \\ \gamma^{1/2} & \alpha & -2\beta \\ 2\alpha\gamma^{1/2} & -2\beta & \alpha\beta + 27\gamma \end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

имеет в точке $\mathbf{x} = 0$ строгий минимум.

Действительно, согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма $(B\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно определена, когда диагональные миноры матрицы B положительны. Остается проверить, что при $\gamma > 0$ эти условия совпадают с неравенствами (3.4).

Замечания 1°. Условия (3.4) гарантируют, что корни характеристического многочлена f чисто мнимы и различны. В случае кратных корней вопрос об устойчивости равновесия зависит от наличия жордановых клеток. Однако кратные корни встречаются лишь в исключительном случае, когда $D = 0$. Условия (3.4) являются критерием сильной устойчивости равновесия $\mathbf{x} = 0$: оно останется устойчивым при малом изменении коэффициентов системы (3.3).

2°. Можно показать, что имеется целое семейство квадратичных форм, удовлетворяющих предложению 1. Симметричная матрица (4.1) порождает простейшую среди них. Однако этим формам трудно дать прозрачную механическую интерпретацию. Возможности распространения предложения 1 на многомерный случай обсуждаются в разд. 7.

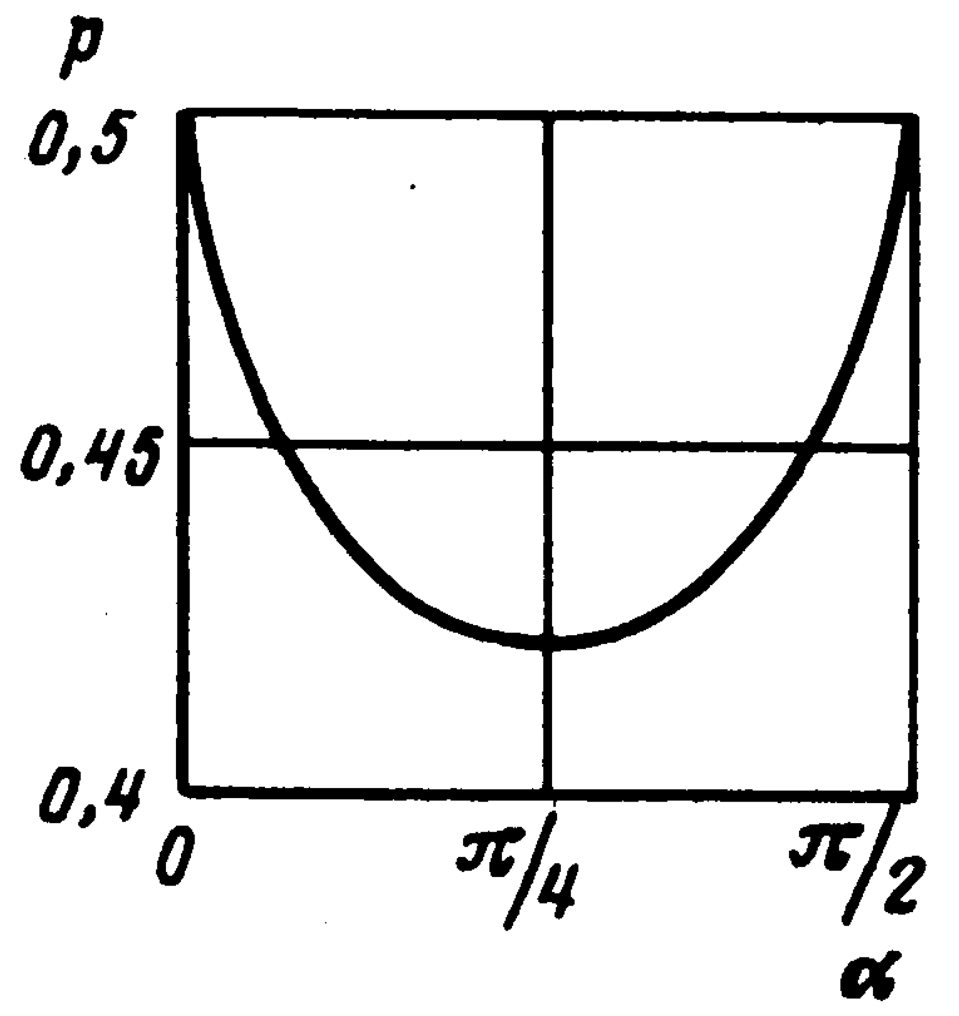
5. Сильные магнитные поля. Если $\gamma = a_1 a_2 a_3 < 0$, то степень неустойчивости нечетная и гироскопическая стабилизация невозможна. Рассмотрим случай, когда $\gamma > 0$. Зафиксируем направление магнитного поля $\mathbf{H}$ и будем увеличивать его интенсивность $|\mathbf{H}|$.

Теорема 1. Если компоненты магнитного поля удовлетворяют неравенству

$$\Sigma = a_1 H_1^2 + a_2 H_2^2 + a_3 H_3^2 > 0 \tag{5.1}$$

то равновесие заряда устойчиво при достаточно больших значениях $|\mathbf{H}|$. Если же $\Sigma < 0$, то равновесие неустойчиво при больших $|\mathbf{H}|$.

Действительно, если выполнено неравенство (5.1), то $\beta > 0$ при достаточно больших $|\mathbf{H}|$. Поскольку $\alpha > 0$, то два первых неравенства (3.4) выполнены. Чтобы доказать неравенство $D > 0$, достаточно заметить, что слагаемое $\alpha^2\beta^2$ растет быстрее любого другого слагаемого при $|\mathbf{H}| \to \infty$. Если $\Sigma < 0$, то $\beta < 0$ при достаточно больших значениях $|\mathbf{H}|$. Значит, в этом случае равновесие заведомо неустойчиво.



Фиг. 2

Замечания 1°. Неравенство (5.1) является также критерием устойчивости положения равновесия общей линейной системы с тремя степенями свободы, на которую действуют большие гироскопические силы.

2°. Если $\Sigma = 0$ и $A \neq 0$, то равновесие заряда неустойчиво. Действительно, в этом случае (при учете (3.2)) коэффициент $\beta = a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 < 0$.

Условию устойчивости (5.1) можно дать интерпретацию в терминах геометрической вероятности (см. [9]). Зафиксируем электрическое поле и предположим, что выполнено необходимое условие гироскопической стабилизации: степень неустойчивости четна. Это означает, что среди чисел a_1, a_2, a_3 два отрицательных и одно положительное. Пусть, например, $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 > 0$. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{H_1, H_2, H_3\}$ конус $\Sigma = 0$ пересекает единичную сферу $S^2 = \{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = 1\}$ по двум овалам, разделяющим ее на три связные области. Условию (5.1) удовлетворяют точки S^2 из двух областей, содержащих «полюсы» – точки с координатами 0, 0, ±1. Отношение суммы площадей этих областей к площади S^2 (она равна 4π) есть вероятность стабилизации неустойчивого равновесия случайно выбранным магнитным полем большой интенсивности. Эта вероятность равна

$$p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1 - f(\varphi;\ a_1,\ a_2)]d\varphi,\quad f = \left(1 + \frac{a_1 + a_2}{a_1\sin^2\varphi + a_2\cos^2\varphi}\right)^{-1/2}$$

и выражается через эллиптические функции от a_1/a_2. Полагая $a_1/a_2 = \operatorname{tg}\alpha$, получаем функцию одного переменного $\alpha \in [0, \pi/2]$. Ее график (фиг. 2) симметричен относительно точки $\alpha = \pi/4$, в которой p принимает значение $1 - 3^{-1/2} = 0.42\ldots$. В интервале $[\pi/4, \pi/2]$ функция $p(\alpha)$ возрастает, причем ее максимальное значение $p(\pi/2) = 1/2$. Таким образом, вероятность стабилизации заключена между значениями 0.42... и 0.5. Она минимальна в симметричном случае $a_1 = a_2$, который рассматривался в разд. 2.

6. Некоторые обобщения. Рассмотрим задачу об устойчивости равновесия линейной системы с n степенями свободы, описываемой уравнениями

$$\mathbf{x}^{\cdot\cdot} + \Gamma\mathbf{x} + A\mathbf{x} = 0,\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \ \Gamma^{\mathrm{T}} = -\Gamma,\ \ A^{\mathrm{T}} = A,\ \ \det A \neq 0 \qquad (6.1)$$

Матрицу A можно считать диагональной.

Заменим Γ на $\mu\Gamma$ и будем считать μ достаточно большим положительным числом. Выясним, каким условиям должны удовлетворять матрицы A и Γ, чтобы равновесие $\mathbf{x} = 0$ было устойчивым при больших значениях μ. Была установлена устойчивость [10, 11] в предположении, что матрица A отрицательна (т.е. потенциальная энергия $P(\mathbf{x}) = = (A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$ отрицательно определена), а матрица гироскопических сил Γ невырождена. Поскольку $\Gamma^{\mathrm{T}} = -\Gamma$ и $\det\Gamma \neq 0$, то n четно. В этом случае степень неустойчивости равна n и поэтому четная. Были указаны [11, 12] оценки значений параметра μ, при которых имеет место устойчивость равновесия $\mathbf{x} = 0$. Для нечетных n матрица Γ вырождена, и поэтому результаты [10, 11] неприменимы. При $n = 3$ критерий устойчивости дает теорема 1.

Пусть $\ker\Gamma$ – ядро оператора Γ – множество всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, таких что $\Gamma\mathbf{x} = 0$. Ясно, что $\ker\Gamma$ – линейное подпространство $\mathbb{R}^n$. Ему можно поставить в соответствие фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$ (см., например, [13]); его элементы – классы векторов из $\mathbb{R}^n$, отличающихся на векторы из $\ker\Gamma$. Известно [13], что $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$ имеет структуру векторного пространства, причем

$$\dim\ker\Gamma + \dim\mathbb{R}^n / \ker\Gamma = n,\qquad \dim\mathbb{R}^n / \ker\Gamma = \operatorname{rank}\Gamma$$

Следовательно, размерность фактор-пространства $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$ всегда четная.

Пусть C – симметричная матрица. Сопоставим с ней квадратичную форму

$$(C\Gamma\mathbf{x},\ \Gamma\mathbf{x}) = -(\Gamma C\Gamma\mathbf{x},\ \mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \tag{6.2}$$

Значение этой формы не изменится, если к вектору $\mathbf{x}$ прибавить любой вектор из подпространства $\ker\Gamma$. Значит, квадратичная форма (6.2) корректно определена на фактор-пространстве $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$.

Теорема 2. Если ограничение потенциальной энергии $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$ на подпространство $\ker\Gamma$ является положительно определенной квадратичной формой, а форма $(A^{-1}\Gamma\mathbf{x}, \Gamma\mathbf{x})$ отрицательно определена на $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$, то равновесие $\mathbf{x} = 0$ устойчиво при достаточно больших значениях параметра μ.

Рассмотрим частный случай, когда $\det\Gamma\neq 0$. Тогда $\ker\Gamma= 0$ и первое условие теоремы 2 можно опустить ввиду его тривиальности. Пусть $\mathbf{x} = \Gamma^{-1}\mathbf{z}$. Тогда форма $(A^{-1}\Gamma\mathbf{x}, \Gamma\mathbf{x}) = (A^{-1}\mathbf{z}, \mathbf{z})$ будет отрицательно определенной. Отсюда в свою очередь вытекает отрицательная определенность потенциальной энергии $(A\mathbf{z}, \mathbf{z})/2$. Таким образом, теорема 2 содержит как частный случай результат [11] (без оценок параметра μ).

Замечание. Свойство отрицательной определенности квадратичной формы $(A^{-1}\Gamma\mathbf{x}, \Gamma\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^n/\ker\Gamma$ достаточно проверить на некотором подпростанстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \dim(\ker\Gamma)$, трансверсальном подпространству $\ker\Gamma$.

В качестве еще одного следствия выведем из теоремы 2 неравенство (5.1) как достаточное условие гироскопической стабилизации. При $n = 3$ ядро оператора $\Gamma\neq 0$ одномерно и состоит из векторов, параллельных вектору (H_1, H_2, H_3). Значение потенциальной энергии на этом векторе равно $\Sigma a_k H_k^2/2$. Следовательно, первое условие теоремы 2 дает неравенство (5.1). Поскольку $\gamma = a_1a_2a_3 > 0$, то либо все $a_k > 0$, либо два из этих чисел отрицательны, а одно положительно. В первом случае равновесие $\mathbf{x} = 0$ устойчиво по теореме Кельвина. Рассмотрим второй случай; пусть, например, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$. Так как $\Sigma a_k H_k^2 > 0$, то $H_3\neq 0$. Значит, в качестве двумерного подпространства, трансверсального $\ker\Gamma$, можно взять плоскость $x_3 = 0$. Значение квадратичной формы $(A^{-1}\Gamma\mathbf{x}, \Gamma\mathbf{x})$ на векторе $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ из этой плоскости

$$H_3^2/a_2 + H_2^2/a_3 = (a_2H_2^2 + a_3H_3^2)/(a_2a_3) < 0$$

поскольку $a_2H_2^2 + a_3H_3^2 > -a_1H_1^2 \geqslant 0$ и $a_2a_3 < 0$. Аналогично доказывается, что данная форма отрицательна на другом базисном векторе $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$. Таким образом, выполнено второе условие теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Кроме интеграла энергии

$$F = (\mathbf{x}^{\cdot},\ \mathbf{x}^{\cdot})/2 + (A\mathbf{x},\ \mathbf{x})/2$$

система (6.1) допускает интеграл

$$\Phi = (A^{-1}\mathbf{x}^{\cdot},\ \mathbf{x}^{\cdot})/2 - (\Gamma A^{-1}\mathbf{x}^{\cdot},\ \mathbf{x}) + ((E - \Gamma A^{-1}\Gamma)\mathbf{x},\ \mathbf{x})/2$$

Здесь E – единичная матрица. Заменим Γ на $\mu\Gamma$ и рассмотрим квадратичный интеграл

$$V = 2F - 2\Phi/\mu^{3/2} = (\mathbf{x}^{\cdot},\ \mathbf{x}^{\cdot}) + (A\mathbf{x},\ \mathbf{x}) - \mu^{1/2}(A^{-1}\Gamma\mathbf{x},\ \Gamma\mathbf{x}) + O(\mu^{-1/2})$$

По условиям теоремы 2 форма $(A^{-1}\Gamma\mathbf{x}, \Gamma\mathbf{x})$ неположительна и обращается в нуль лишь на подпространстве $\ker\Gamma$, где форма $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно определена. Следовательно, при достаточно больших значениях μ квадратичная форма V будет положительно определенным интегралом. По теореме Ляпунова состояние равновесия $\mathbf{x} =$ $= 0$, $\mathbf{x}^{\cdot} = 0$ устойчиво.

Укажем еще одно обобщение условия (5.1) в многомерном случае. Пусть $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$ – элементы матрицы гироскопических сил Γ, $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $\alpha = \Sigma a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n-2}} \gamma_{i_{n-1} i_n}$, где суммирование ведется по всем индексам $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-2}$, не совпадающим с индексами $i_{n-1} < i_n$. При $n = 3$ величина α совпадает с левой частью неравенства (5.1).

Предложение 2. Если $\alpha < 0$, то равновесие $\mathbf{x} = 0$ неустойчиво при достаточно больших значениях μ.

Действительно, в устойчивом случае все коэффициенты характеристического многочлена должны быть положительными. Коэффициент при λ^2 отличается от α слагаемыми, зависящими лишь от a_k. Поэтому, если $\alpha < 0$, то при достаточно больших μ этот коэффициент становится отрицательным.

Замечание. Неравенство $\alpha > 0$ является критерием сильной устойчивости лишь при $n = 3$. Уже для $n = 4$ к этому условию надо добавить еще одно неравенство, связывающее коэффициенты матрицы гироскопических сил Γ.

7. Общий вид условий устойчивости. Пусть

$$f(\lambda^2) = \lambda^{2n} + \alpha_1 \lambda^{2n-2} + \ldots + \alpha_n \tag{7.1}$$

– характеристический многочлен линейной системы (6.1) без кратных корней. Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – многочлены от a_k и элементов матрицы Γ. Наличие кратных корней эквивалентно обращению в нуль дискриминанта D многочлена (7.1).

Равновесие $\mathbf{x} = 0$ устойчиво в том и только в том случае, когда все корни многочлена f n-й степени вещественные отрицательные числа. Следовательно, необходимое условие устойчивости заключается в выполнении неравенств $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$. Будем считать эти условия выполнены.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – простые корни уравнения $f(z) = 0$. Положим

$$s_k = z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k, \quad s_0 = n$$

Числа s_k выражаются через коэффициенты α_j по следующим формулам Ньютона:

$$s_m + s_{m-1}\alpha_1 + \ldots + s_1\alpha_{m-1} + m\alpha_m = 0, \quad m \leq n$$

$$s_m + s_{m-1}\alpha_1 + \ldots + s_{m-n}\alpha_n = 0, \quad m > n$$

Отсюда $s_1 = -\alpha_1$, $s_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2$, $s_3 = -\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3, \ldots$ Введем симметричную матрицу n-го порядка

$$S = \begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{Vmatrix}$$

и квадратичную форму $\Phi(\mathbf{x}) = (S\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Отметим, что $D = \det S$.

Предложение 3. Пусть $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ и $D \neq 0$. Равновесие $\mathbf{x} = 0$ системы (6.1) устойчиво тогда и только тогда, когда функция Φ имеет в точке $\mathbf{x} = 0$ строгий минимум.

Доказательство. Пусть $D \neq 0$. Тогда многочлен (7.1) не имеет кратных корней. В этом случае критерий вещественности всех корней многочлена f есть условие положительной определенности матрицы S [14]. Остается воспользоваться следующим результатом, вытекающим из правила Декарта: многочлен (7.1) без комлексных корней имеет n отрицательных корней тогда и только тогда, когда все его коэффициенты положительны.

Замечания. 1°. Предложение 1 не вытекает из предложения 2, поскольку условие положительной определенности матрицы (4.1) включает положительность коэффициентов α и β.

2°. Характеристический многочлен автономной гамильтоновой системы, линеаризованной в окрестности положения равновесия, содержит лишь четные степени и поэтому имеет вид (7.1). Следовательно, условия устойчивости равновесий гамильтоновых систем с n степенями свободы сводятся к $2n-1$ алгебраическим неравенствам. Конечно, не все они независимы.

Пример. При $n = 3$ к неравенствам $\alpha > 0$, $\beta > 0, \gamma > 0$ надо добавить два условия:

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = 2(\alpha^2 - 3\beta) > 0, \quad D = \det S > 0$$

Отметим, что первое из них является следствием второго. Поэтому условия сильной устойчивости положения равновесия сводятся к уже известным четырем неравенствам: $\alpha > 0$, $\beta > 0, \gamma > 0, D > 0$.

Автор благодарит В.В. Румянцева, Ю.П. Соловьева и А.В. Карапетяна за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. *Козлов В.В.* Об одной задаче Кельвина // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 165–167.
3. *Вуйчич В.А., Козлов В.В.* К задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 555–559.
4. *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Первый метод Ляпунова для сильно нелинейных систем // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 10–22.
5. *Эддингтон А.С.* Теория относительности. М.: Л.: Гостехиздат, 1934. 508 с.
6. *Пожарицкий Г.К.* О неустановившемся движении консервативных голономных систем // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 429–433.
7. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 6. 132 с.
8. *Булатович Р.М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // ПММ. Т. 61. Вып. 3. С. 385–389.
9. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.
10. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
11. *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
12. *Карапетян А.В.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Teor. i primen. meh. 1994. V. 20. P. 89–93.
13. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963. 262 с.
14. *Граве Д.А.* Элементы высшей алгебры. Киев: Изд-во Импер. ун-та св. Владимира, 1914. 698 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1996