УДК 531.36

© 1997 г. Р.М. Булатович

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СЛУЧАЯХ, КОГДА ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ИМЕЕТ МАКСИМУМ

Дается краткий обзор по устойчивости линейных систем, на которые действуют потенциальные и гироскопические силы. При помощи прямого метода Ляпунова доказано несколько утверждений об устойчивости этих систем; в частности, для систем, исследованных ранее [1, 2], получены необходимые и достаточные условия устойчивости.

1. Уравнения возмущенного движения линейной механической системы, на которую действуют потенциальные и гироскопические силы, можно привести к виду

$$\ddot{q} + G\dot{q} + Kq = 0 \tag{1.1}$$

Здесь q – n-мерный вектор, $G^T = -G$, $K^T = K$ – постоянные матрицы, характеризующие соответственно гироскопические и потенциальные силы. Будем считать, что матрица K отрицательно определена. Из результата Томсона – Тэта – Четаева (см., например, [3, 4]) следует, что при нечетных n система (1.1) неустойчива, а при четных n она может быть устойчивой (т.е. возможна гироскопическая стабилизация).

В связи с этим возникает следующая задача, имеющая практическое значение: в случае четных n определить характер устойчивости системы (1.1) по коэффициентам действующих сил.

Напомним некоторые из полученных в этом направлении немногочисленных результатов.

1°. Если $4K - G^2 < 0$, то система неустойчива [5] (см. также [6, 7]).

2°. Если $KG = GK$, то система устойчива тогда и только тогда, когда $4K - G^2 > 0$ [8].

Отметим, что условие коммутативности матриц K и G весьма ограничительно. Например, если $n = 2$, то $K = \alpha I$, где α – скаляр и I – единичная матрица.

При помощи функции Ляпунова в виде квадратичного интеграла системы (1.1) было получено несколько результатов [1, 9–11], тесно связанных с полученным Ляпуновым доказательством необходимости и достаточности условия существования определенно положительного квадратичного интеграла для устойчивости системы (1.1) (см. также [12]).

В случае, когда $G = \gamma G_0$, $\det G_0 \neq 0$, была получена [9] оценка параметра γ, достаточная для осуществления гироскопической стабилизации.

Более точную оценку дает следующее утверждение.

3°. Если $\gamma^2 > 4k_+/g_-$, где $k_+(g_-)$ – максимальное (минимальное) собственное значение матрицы $-K(G_0^2)$, то система устойчива [10].

4°. Если существует $\alpha \in \mathbb{R}$, такое, что $K^{-1}(K - \alpha I) > 0$ и $K - \alpha I + \alpha G(K - \alpha I)^{-1}G >$ > 0 $(I - \alpha K) > 0$ и $4K(I - \alpha K)^{-1} - G(I - \alpha K)^{-1}G < 0$, то система устойчива (неустойчива) [11].

Отметим, что последнее утверждение о неустойчивости обобщает результат 1°, совпадая с ним при $\alpha = 0$.

5°. Пусть матрица K диагональная и пусть D – некоторая диагональная положительно определенная матрица. Если D коммутирует с G и $K - D - G^2 + G(I - DK)^{-1} G >$ > 0, то система устойчива [1].

Важно отметить, что применение критериев 4°, 5° требует исследования соответственно параметра α и матрицы D.

Были предложены [13, 2] довольно простые критерии устойчивости. Их доказательство использует следующее утверждение: система (1.1) устойчива, когда корни характеристического уравнения чисто мнимые. В отличие от потенциальной системы, для системы (1.1) это утверждение неверно, о чем свидетельствует пример системы с двумя степенями свободы

$$\ddot{q} + 2\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\dot{q} - \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} q = 0$$

В этом примере корням характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$ соответствуют квадратичные элементарные делители и, следовательно, система неустойчива.

В следующем разделе прямым методом Ляпунова будут получены некоторые результаты по устойчивости системы (1.1).

2. В дальнейшем понадобится следующая лемма, доказательство которой содержится в [14].

Лемма. Для положительной определенности квадратичной формы

$$\Phi = x^T A x + 2x^T B y + y^T C y, \quad A^T = A, \quad C^T = C, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрицы A и $C - B^T A^{-1} B$ были положительно определены. Если $A > 0$ и $C - B^T A^{-1} B \geqslant 0$, то форма (2.1) положительно полуопределена.

Теорема 1. Если

$$2K - G^2 - 2k_+ I > 0 \tag{2.2}$$

где k_+ – максимальное собственное значение матрицы $-K$, то система (1.1) устойчива.

Эта теорема аналогична критерию, предложенному ранее [13]. Сравним их на следующем примере [13]:

$$\ddot{q} + 4\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}\dot{q} + \begin{Vmatrix} k_1 - 7 & 0 \\ 0 & k_2 - 7 \end{Vmatrix} q = 0, \quad k_i < 7$$

Из теоремы 1 следует, что эта система устойчива, если $7 > k_i > 3$, а критерий [13] налагает более жесткое условие: $7 > k_i > 5$.

Доказательство теоремы 1. Система (1.1), как известно [9], допускает помимо интеграла энергии $2H = \dot{q}^T \dot{q} + q^T K q$ еще и интеграл

$$\Gamma = (G\dot{q} + Kq)^T (G\dot{q} + Kq) + \dot{q}^T K \dot{q}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем связку этих интегралов $V = \Gamma - 2k_+ H$, которую можно записать в виде

$$V = \dot{q}\left(K - \frac{1}{2}G^2 - k_+ I\right)\dot{q} + F \tag{2.3}$$

$$F = -\frac{1}{2}\dot{q}^T G^2 \dot{q} - 2\dot{q}^T G K q + q^T (K^2 - k_+ K) q$$

Пусть выполнено условие (2.2). Так как $G^2 < 0$ и $K^2 + k_+K \leqslant 0$, то в силу леммы квадратичная форма F положительно полуопределена и, следовательно, поскольку $(\dot{q} = 0, F = 0) = (0, 0)$, функция (2.3) положительно определена.

Таким образом, при выполнении условия (2.2) функция V удовлетворяет теореме Ляпунова об устойчивости, из которой и следует утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Условие теоремы 1 заведомо выполняется, если имеет место критерий 3°.

Замечание 2. Можно показать, что условия положительной определенности связки интегралов $V = \Gamma - 2\alpha H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, эквивалентны условиям устойчивости критерия 4°, доказанного при помощи функции Ляпунова иного вида.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов систем (1.1), для которых

$$\det G \neq 0,\ KG^2 = G^2K,\ KGKG^{-1} = G^{-1}KGK \tag{2.4}$$

Например, условиям (2.4) удовлетворяют системы (1.1) с двумя степенями свободы. Система (1.1), (2.4) допускает квадратичный интеграл [15]

$$V = q^T(K + G^2 - G^{-1}KG)Kq + 4q^TKG\dot{q} + \dot{q}^T(K - G^2 - GKG^{-1})\dot{q} \tag{2.5}$$

В силу леммы форма (2.5) положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$LK > 0 \tag{2.6}$$

$$M = L - 2G^2 + 4GKL^{-1}G > 0 \quad (L = L^T = K + G^2 - GKG^{-1}) \tag{2.7}$$

Проведем анализ условий (2.6) и (2.7). Первое из них, поскольку $LK = KL$ и $K < 0$, равносильно условию $L < 0$. Так как $\det G \neq 0$, то условие (2.7) равносильно условию $G^TMG > 0$, которое можно представить так:

$$G^TMG = (L^2 - 4G^2K)\,L^{-1}G^2 = (L - 2N)\,(L + 2N)\,L^{-1}G^2 > 0 \tag{2.8}$$

где $N = (G^2K)^{1/2}$ – положительно определенный квадратный корень из положительно определенной матрицы G^2K. Очевидно, что совместно условия $L < 0$ и (2.8) могут выполняться, только если $L + 2N < 0$, т.е. последнее является необходимым и достаточным условием положительной определенности интеграла (2.6). Следовательно, в силу теоремы Ляпунова об устойчивости имеет место.

Теорема 2. Если матрица

$$K + G^2 - GKG^{-1} + 2(G^2K)^{1/2} \tag{2.9}$$

отрицательно определена, то система (1.1), (2.4) устойчива.

Рассмотрим системы (1.1), для которых

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & M \\ -M^T & 0 \end{Vmatrix},\quad K = -\begin{Vmatrix} k_1I & 0 \\ 0 & k_2I \end{Vmatrix};\quad k_1, k_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{2.10}$$

где I – единичная и M – невырожденная $(m \times m)$-матрицы, $2m = n$. Системы этого вида исследовались ранее в [2], где в качестве критерия устойчивости было предложено условие $4K - G^2 > 0$.

Можно проверить, что матрицы (2.10) удовлетворяют условиям (2.4), и, следовательно, применима теорема 2. Из отрицательной определенности матрицы (2.9), учитывая структуру матриц G и K, заключаем, что

$$MM^T - 2\sqrt{k_1}(MM^T)^{1/2} + (k_1 - k_2)I > 0$$

$$M^TM - 2\sqrt{k_2}(M^TM)^{1/2} + (k_2 - k_1)I > 0$$

Последние условия сводятся к одному условию

$$\Lambda \overset{\text{def}}{=} (MM^T)^{1/2} - \left(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}\right) I > 0 \tag{2.11}$$

Следовательно, условие (2.11) – достаточное для устойчивости системы (1.1), (2.10). Оказывается что (2.11) является и необходимым условием устойчивости.

Действительно, так как MM^T – симметрическая положительно определенная матрица, то существует ортогональная матрица U, такая, что $U^T MM^T U = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_m^2)$. Преобразуя систему (1.1), (2.10) при помощи замены

$$q = \begin{Vmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^m$$

и исключая y, получим

$$x^{(\mathrm{IV})} + (U^T MM^T U - (k_1 + k_2) I)\ddot{x} + k_1 k_2 I x = 0 \tag{2.12}$$

Предположим, что матрица Λ не является положительно определенной. Тогда существует $i \in [1, \ldots, m]$, такое, что $|\mu_i| - \left(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}\right) \leq 0$. При этом условии, как можно показать, исследуя соответствующее уравнение системы (2.12)

$$x_i^{(\mathrm{IV})} + (\mu_i^2 - (k_1 + k_2))\ddot{x}_i + k_1 k_2 x_i = 0$$

координата x_i неустойчива.

Итак, доказана

Теорема 3. Система (1.1), (2.10) устойчива в том и только том случае, когда матрица Λ положительно определена.

Исследуем теперь устойчивость системы (1.1) в случае, когда

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & N \\ -N & 0 \end{Vmatrix}, \quad K = -\mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n) \tag{2.13}$$

$$N = \mathrm{diag}(\nu_i), \quad \nu_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k_j > 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad n = 2m$$

Для такой системы был установлен [1] один критерий устойчивости. Оказывается, что вопрос об устойчивости системы (1.1), (2.13) решается полностью.

Введем обозначения: $|N| = \mathrm{diag}(|\nu_i|, \ldots, |\nu_m|)$, $D_1 = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_m)$, $D_2 = \mathrm{diag}\,(k_{m+1}, \ldots, k_n)$. Аналогично теореме 3 доказывается

Теорема 4. Система (1.1), (2.13) устойчива в том и только том случае, когда матрица $|N| - (D_1^{1/2} + D_2^{1/2})$ положительно определена.

Отметим, что из теоремы 3, а также из теоремы 4 следует известное условие гироскопической стабилизации системы (1.1) с двумя степенями свободы (см., например, [3]): $|g| > \sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}$, где g, k_1, k_2 – элементы матриц G и $-K$. Поэтому можно заключить, что теоремы 3 и 4 представляют собой обобщение этого условия на случай $n > 2$.

В заключение докажем один критерий неустойчивости системы (1.1), (2.4) без дополнительных предположений о структуре матриц G и K.

Теорема 5. Если

$$G^2 + 4(KGKG^{-1})^{1/2} > 0 \tag{2.14}$$

то система (1.1), (2.4) неустойчива.

Доказательство. Рассмотрим знакопеременную функцию

$$V = 2q^T(KG - GK)q - q^T(G^2 + 4GKG^{-1})\dot{q} \tag{2.15}$$

Полная производная от функции (2.15) по времени в силу системы (1.1), (2.4) имеет вид

$$\dot{V} = -\dot{q}^T(G + 4GKG^{-1})\dot{q} - \dot{q}^T G(4K + G^2)q + \dot{q}^T(G^2 + 4GKG^{-1})Kq \qquad (2.16)$$

Из условий (2.4), учитывая, что условие $G^2K = KG^2$ равносильно условию $GKG^{-1} = G^{-1}KG$, заключаем, что матрицы $(G^2 + 4GKG^{-1})$ и $(G^2 + 4GKG^{-1})K$ симметричны. Так как $G^2 + 4GKG^{-1} < 0$, то в силу леммы форма (2.16) положительно определена в том и только том случае, когда

$$16KGKG^{-1} - G^4 = (4(KGKG^{-1})^{1/2} - G^2)(4(KGKG^{-1})^{1/2} + G^2) > 0$$

Таким образом, при выполнении условия (2.14) функция (2.16) удовлетворяет первой теореме Ляпунова о неустойчивости, из которой и следует теорема 5.

Замечание 3. Из отрицательной определенности матрицы следует выполнение условия (2.14). В случае $KG \neq GK$ обратное утверждение не справедливо.

Автор благодарит В.В. Козлова за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Seyranian A., Stoustrup J., Kliem W.* On gyroscopic stabilization // Dan. Center for Appl. Math. and Mech. 1994. Report N 486, P. 13.
2. *Jinn-Wen Wu, Tsu-Chin Tsao.* A sufficient stability condition for linear conservative gyroscopic systems // Trans. ASME. Appl. Mech. 1994. V. 61. N3. P. 715–717.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Пожарицкий Г.К.* О неустановившемся движении консервативных голономных систем // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 3. С. 429–433.
6. *Карапетян А.В.* Об обращении теоремы Рауса // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1973. N 5. С. 65–69.
7. *Hagedorn P.* Über die Instabilität konservativer Systeme mit gyroskopischen Kräften // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. V. 58. N 1. P. 1–9.
8. *Huseyin K., Hagedorn P., Teschner W.* On the stability of linear conservative gyroscopic systems // ZAMP. 1983. V. 34. N 6. P. 807–815.
9. *Лахаданов В.М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53–58.
10. *Карапетян А.В.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Teor. i primen. meh., 1994. N 20. S. 89–93.
11. *Walker J.A.* Stability of linear conservative gyroscopic systems // Trans. ASME. Appl. Mech. 1991. V. 58. N 1. P. 229–232.
12. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
13. *Inman D.J.* A sufficient condition for the stability of conservative gyroscopic systems // Trans. ASME. Appl. Mech. 1988. V. 55. N 4. P. 895–898.
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
15. *Bulatovic R.* Jedan prvi integral i stabilnost linearnih konzervativno giroskopskih sistema // Zbornik radova XXI JUMEN NIS 1995, A, Str. 6–11.

Югославия

Поступила в редакцию
15.IV.1996