

УДК 531.36

© 1997 г. В.И. Орехов

ДВОЙСТВЕННАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ БИФУРКАЦИОННОГО МНОЖЕСТВА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Известная схема топологического анализа [1] распространяется на случай трех и более квадратичных по скорости интегралов. Бифуркационное множество параметризуется множителями Лагранжа, что соответствует переходу к двойственной поверхности. Рассмотрен пример движения твердого тела в поле с квадратичным потенциалом.

1. Пусть динамическая система на касательном расслоении TM n -мерного многообразия M с римановой метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ допускает m интегралов

$$F_i(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \Gamma_i \mathbf{v} \rangle + W_i(x); \quad \mathbf{v} \in T_x M \quad (1.1)$$

где \mathbf{v} – скорость, $T_x M$ – касательный слой над $x \in M$, Γ_i – послойные самосопряженные линейные операторы, Γ_1 – тождественный. Рассмотрим интегральное отображение $F: TM \rightarrow R^m$, $F(\mathbf{v}) = f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i = F_i(\mathbf{v})$, множество значений которого обозначим Ω , и отображение $W: M \rightarrow R^m$, аналогично определенное функциями $W_i(x)$, дающее значения F при нулевой скорости, множество которых обозначим Ω_0 .

Примем обозначение λf для свертки вектора f с ковектором $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и обозначения λF , $\lambda \Gamma$, λW для связок F_i , Γ_i , W_i с коэффициентами λ_i .

Предметом топологического анализа [1] является описание интегральных поверхностей $I_f = F^{-1}(f) \subset TM$ и бифуркационного множества $\Sigma \subset R^m$, которое состоит из точек f , соответствующих перестройкам I_f , т.е. включает критические значения интегрального отображения. Критические точки последнего определяются условием зависимости дифференциалов dF_i , что можно представить в виде $d\lambda F = 0$, где λ_i – множители Лагранжа. Это условие инвариантно [2], т.е. критические точки связки λF образуют целые движения, называемые стационарными. Используем значения λ для параметризации семейств стационарных движений и бифуркационной поверхности.

Частный градиент функции λF вдоль слоя $T_x M$ равен $2\lambda \Gamma \mathbf{v}$, поэтому критические точки \mathbf{v} отображения F , соответствующие данному λ , лежат в ядре оператора $\lambda \Gamma$. Пусть $P(\lambda, x) = \det \lambda \Gamma$, $P'(\lambda, x) = \partial P / \partial \lambda_1$, $D(\gamma, \lambda, x) = \det(\lambda \Gamma - \gamma E)$, $\gamma_i(\lambda, x)$ – корни уравнения $D = 0$. Поскольку $\lambda \Gamma - \gamma E = (\lambda_1 - \gamma)E + \dots + \lambda_m \Gamma_m$, то $\partial D / \partial \gamma|_{\gamma=0} = -P'(\lambda, x)$. Если $P = 0$, то один из корней, пусть γ_1 , равен нулю, ядро $\lambda \Gamma$ не нулевое, и $P' = \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n$ в силу теоремы Виета. При $P = 0$ и $P' \neq 0$ корень $\gamma_1 = 0$ – простой и ядро $\lambda \Gamma$ одномерно. При $P' = P = 0$ кратность нулевого корня и размерность ядра $\lambda \Gamma$ больше единицы. Тогда ранг матрицы $\lambda \Gamma$ меньше $n - 1$, т.е. все алгебраические дополнения P_{ij} ее элементов γ_{ij} равны нулю, откуда $dP = \sum P_{ij} d\gamma_{ij} = 0$. Таким образом, при $P' = P = 0$ дифференциал dP , а с ним и частный дифференциал $d_x P$, равны нулю.

Функции P и P' задают параметризованные значением λ семейства функций $P_\lambda(x)$ и $P'_\lambda(x)$ на M . Из предыдущего следует, что при данном λ точки x , над которыми ядро $\lambda \Gamma$

не нулевое, образуют поверхность $Z_\lambda = \{x: P_\lambda(x) = 0\}$, причем в ее регулярных точках (будем считать, что это точки общего положения на Z_λ) $P'_\lambda(x) \neq 0$, и, значит, ядро $\lambda\Gamma$ над ними одномерно. Можно показать, что поверхность Z_λ и функция λW инвариантны относительно векторов ядра $\lambda\Gamma$. (Для натуральных систем это следует из уравнений, рассмотренных в [3].)

Утверждение 1. Векторы $v \in \ker \lambda\Gamma$ над регулярными точками поверхности Z_λ являются критическими точками интегрального отображения при условии

$$d\lambda W + \vartheta dP_\lambda = 0; \quad |v|^2 = \vartheta P'_\lambda \quad (1.2)$$

Доказательство. Пусть λ фиксировано, $P_\lambda = 0$ и $dP_\lambda \neq 0$ в точке x_* , вектор v_* лежит в ядре $\lambda\Gamma$ над x_* . Тогда $D = 0$ и $\partial D/\partial \gamma = -P'_\lambda \neq 0$ при $\gamma = 0$, $x = x_*$. По теореме о неявной функции в окрестности x_* получим гладкую функцию $\gamma_1(x)$ – простое собственное значение оператора $\lambda\Gamma$, $\gamma_1(x_*) = 0$. В этом случае в той же окрестности существует гладкое поле $v(x)$ соответствующих γ_1 собственных векторов, $v(x_*) = v_*$. Рассмотрим функции $g(x) = \lambda F(v(x)) = \gamma_1(x)|v(x)|^2 + \lambda W(x)$ и $G(v) = \lambda F(v + v(x))$, $v \in TM$. Справедливо равенство $d\lambda F|_{v=v(x)} = dG|_{v=0}$. Входящие в обе его части в качестве слагаемых частные дифференциалы вдоль $T_x M$ равны нулю при $x = x_*$ в силу $\lambda\Gamma v_* = 0$. Оставшееся в правой части слагаемое есть дифференциал функции $g(x) = G|_{v=0}$. Поэтому вектор v_* – критический при условии $dg = 0$ в точке x_* , которое ввиду $\gamma_1(x_*) = 0$ эквивалентно $|v_*|^2 d\gamma_1 + d\lambda W = 0$. С другой стороны, $P_\lambda = \gamma_1(x)p(x)$, где $p = \gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_n$, поэтому при $\gamma_1 = 0$ будет $dP_\lambda = p d\gamma_1$ и $P'_\lambda = p$, откуда получим (1.2) при $\vartheta = p^{-1}(x_*)|v_*|^2$.

Первое условие (1.2) задает критические точки сужения $\lambda W|_{Z_\lambda}$ и значения ϑ на этих точках. Множество тех из них, в которых $\vartheta P'_\lambda \geq 0$, обозначим X_λ . Если X_λ связно, значение λW на нем постоянно. Обозначим его $\Psi(\lambda)$:

$$\Psi(\lambda) = \lambda W(x), \quad x \in X_\lambda \quad (1.3)$$

Если X_λ не связно, на каждой его связной компоненте будет свое значение Ψ .

Согласно утверждению 1 множество X_λ заполнено траекториями стационарных движений со скоростью $\pm v_\lambda$: $v_\lambda \in \ker \lambda\Gamma$, $|v_\lambda| = \sqrt{\vartheta P'_\lambda}$. Значение интеграла λF на этих движениях согласно (1.3) есть $\Psi(\lambda)$.

Критические точки отображения W определяются условием $d\lambda W = 0$. Аналогично утверждению 1, нулевые векторы над ними суть критические точки отображения F . Значит, из каждой критической точки функции λW (кроме точек равновесия) выходит стационарное движение по Z_λ с нулевой начальной скоростью, и по непрерывности эта точка лежит на Z_λ , а значение λW в ней равно $\Psi(\lambda)$. Критические значения W образуют подмножество критических значений F , содержащее $\partial\Omega_0$.

2. Предположим, что множество X_λ вместе с функцией ϑ гладко деформируется при изменении λ в некоторой области Λ . Тогда $\Psi(\lambda)$ – гладкая функция в Λ , и векторы $\pm v_\lambda$ тоже гладко изменяются, пробегая подмножество критических точек интегрального отображения, которое обозначим S .

Утверждение 2. Значения $f = F(v_\lambda)$ интегрального отображения на множестве S описываются уравнением

$$f = \partial\Psi/\partial\lambda \quad (2.1)$$

Доказательство. В силу предположения любой вектор из S можно включить в гладкое поле $v(\lambda) = v_\lambda(x(\lambda))$, $x(\lambda) \in X_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Пусть $f = F(v(\lambda))$, тогда $\lambda df = d\lambda F = 0$ и поскольку $\lambda F(v(\lambda)) = \lambda W(x(\lambda))$, то ввиду (1.3) $\lambda f = \Psi$, откуда после дифференцирования, в силу $\lambda df = 0$, получим (2.1).

Поскольку функция $\Psi(\lambda)$ однородна, из (2.1) следует $\lambda f = \Psi$ и $\lambda df = 0$, т.е. λ – нормаль, а плоскость $\Pi_\lambda = \{f: \lambda f = \Psi\}$ – касательная к $F(S)$ в точке (2.1). Касательное семейство $\{\Pi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ отождествляется с поверхностью $\{\lambda_1: \dots: \lambda_m: -\Psi(\lambda)\}$ в

сопряженном проективном пространстве, называемой двойственной к $F(S)$ [4], в связи с чем параметризацию участка $F(S) \subset \Sigma$ по формуле (2.1) назовем двойственной, а область Λ – двойственной бифуркационной областью (ДБО).

Для всех λ из данной ДБО сигнатура матрицы $\lambda\Gamma$ над регулярными точками связной части X_λ одинакова ввиду $\gamma_2 \dots \gamma_n = P' \neq 0$. Те ДБО, которым соответствует положительная или отрицательная полуопределенность $\lambda\Gamma$ над $x \in X_\lambda$, назовем областями знакоопределенности и будем обозначать Λ^+ или Λ^- .

Ограничимся случаем, когда Σ исчерпывается критическими значениями интегралов (например, когда множество M компактно) и все ее гладкие участки имеют вид $F(S)$ для описанных множеств S . Тогда отображение (2.1), которое далее будем обозначать $f(\lambda)$, задает двойственную параметризацию бифуркационной поверхности.

Замечание. Для каждой точки f нормали к содержащим ее плоскостям Π_λ образуют поверхность $\Theta_f = \{\lambda : \lambda f = \Psi(\lambda)\}$ в некоторых ДБО. Огибающая K_f этих плоскостей – конус с вершиной f и образующими, параллельными $\text{grad}(\lambda f - \Psi(\lambda)) = f - f(\lambda)$, $\lambda \in \Theta_f$, т.е. нормальными Θ_f , так что K_f и Θ_f – взаимно двойственные конусы. Представив (2.1) в виде $\text{grad}(\lambda f - \Psi(\lambda)) = 0$, заметим, что перестройки Θ_f происходят при $f \in \Sigma$, т.е. в рассматриваемом случае соответствуют бифуркациям I_f .

3. Рассмотрим отображение $\rho: I_f \rightarrow M$ – композицию вложения $I_f \rightarrow TM$ и полойной проекции $TM \rightarrow M$. Образ $\rho(I_f) = M_f$ есть область возможности движения (ОВД) при данных значениях интегралов. Множество критических значений ρ называется обобщенной границей ОВД [5], включает границу ОВД ∂M_f и обозначается δM_f . Над точками $x \in \delta M_f$ происходят перестройки сечения $\rho^{-1}(x) = I_f \cap T_x M$ – множества возможных скоростей.

Пусть Ω_x и $\delta\Omega_x$ – образ и множество критических значений сужения $F|T_x M$. Для критических точек v отображения ρ необходимо $\lambda\Gamma v = 0$, т.е. они являются критическими и для $F|T_x M$. Таким образом, условия $x \in M_f$ и $x \in \delta M_f$ равносильны условиям $f \in \Omega_x$ и $f \in \delta\Omega_x$. Отображение $F|T_x M$ однородно с точностью до слагаемого $W(x)$, поэтому множества Ω_x и $\delta\Omega_x$ – конические с вершиной $f = W(x)$.

Конус $\delta\Omega_x$, включающий границу $\partial\Omega_x$, описывается двойственной параметризацией с поправкой на однородность. Значения λ образуют конус $X_x = \{\lambda : P(\lambda, x) = 0\}$, роль Λ играют его регулярные области, определенные условием $P'(\lambda, x) \neq 0$.

Утверждение 3. Значения $f \in \delta\Omega_x$, соответствующие регулярным точкам $\lambda \in X_x$, описываются условиями

$$f - W(x) = \mu \partial P / \partial \lambda, \quad \mu \partial P / \partial \lambda_1 \geq 0, \quad P = 0 \quad (3.1)$$

с неопределенным множителем μ .

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2 с учетом того, что функция $\Psi(\lambda) = \lambda W(x)$ линейна и дифференциал $d\lambda$ подчинен связи $dP = 0$. Неравенство следует из положительности Γ_1 .

Пусть Λ_x^+ и Λ_x^- – замыкания областей значений λ , для которых оператор $\lambda\Gamma$ над x положительно и отрицательно определен. Их границы, входящие в X_x , обозначим X_x^+ и X_x^- ; им соответствует полуопределенность $\lambda\Gamma$. Ясно, что пары Λ_x^\pm и X_x^\pm симметричны относительно нуля.

Аналогично сказанному в конце разд. 2 заключаем, что плоскости $\Pi_{\lambda x} = \{f: \lambda f = \lambda W(x)\}$ при $\lambda \in X_x$ касаются $\delta\Omega_x$. При $\lambda \in \Lambda_x^+$ они являются опорными для Ω_x , а при $\lambda \in X_x^+$ – касаются $\partial\Omega_x$. Действительно, поскольку $\lambda F(v) - \lambda W(x) = \langle v, \lambda\Gamma v \rangle$, то $\pm \lambda\Gamma \geq 0$

равносильно $\pm(\lambda f - \lambda W(x)) \geq 0$ для всех $f = F(v)$, $v \in T_x M$, причем равенство достигается при $f \in \partial\Omega_x$, $\lambda \in X_x^\pm$, $\lambda \Gamma v = 0$. Таким образом, конус Λ_x^\pm дуален Ω_x [6] и, значит, Λ_x^\pm выпуклы.

Дальнейшее относится к случаю, когда все множества Ω_x выпуклы. Так будет, в частности, при $m = 3$.

Для доказательства установим выпуклость сечения Ω_x плоскостью $\{f_1 = \text{const}\}$. Произвольная прямая в ней после линейной замены f_2, f_3 имеет вид $\{f_1 = \text{const}, f_2 = \text{const}\}$. Ее прообраз в $T_x M$ – пересечение двух квадратичных поверхностей – состоит из пары связных компонент, симметричной относительно нуля, поэтому множество значений $f_3 = F_3(\pm v)$ на этом прообразе составляет один отрезок, что и требуется.

Утверждение 4. Области возможности движения имеют вид

$$M_f = \{x: \forall \lambda \in X_x^\pm, \pm(\lambda f - \lambda W(x)) \geq 0\} \quad (3.2)$$

Доказательство. В силу выпуклости множество Ω_x дуально множеству Λ_x^+ [6], поэтому условие, что из $\lambda \in X_x^\pm = \partial\Lambda_x^\pm$ следует $\pm(\lambda f - \lambda W(x)) \geq 0$, необходимо и достаточно для $f \in \Omega_x$, т.е. для $x \in M_f$.

Граница множества Ω , очевидно, включена в Σ .

Утверждение 5. Гладкие участки $\partial\Omega$ – образы областей знакоопределенности при двойственной параметризации, причем нормали λ из Λ^+ – внутренние, а из Λ^- – внешние по отношению к Ω .

Доказательство. Пусть $f(\lambda) \in \partial\Omega$. Поскольку $\Omega = \cup \Omega_x$, то $f(\lambda)$ – точка касания $\partial\Omega$ с $\partial\Omega_x$ для какого-то $x \in X_\lambda$. Тогда λ – нормаль $\partial\Omega_x$, касательная плоскость $\Pi_{\lambda x}$ – опорная ввиду выпуклости, поэтому $\lambda \in X_x^\pm$ и значит $\lambda \in \Lambda^\pm$. Из (2.1) и (1.3) следует $\lambda f(\lambda) = \lambda W(x)$, поэтому если $f = f(\lambda) + df$, то $\lambda df = \lambda f - \lambda W(x)$, и при $\pm \lambda df > 0$ точка f лежит по ту же сторону от $\Pi_{\lambda x}$, что и Ω_x , т.е. нормаль $\pm\lambda$ – внутренняя для Ω_x и Ω .

4. Рассмотрим движение твердого тела с закрепленной точкой в поле с квадратичным потенциалом [7]. Пусть $Q = (\alpha_{ij})$ – матрица перехода от главных осей инерции к главным осям потенциала, $I = \text{diag}(I_i)$ и $A = \text{diag}(a_i)$ – главные матрицы инерции и потенциала. Примем $I_1 > I_2 > I_3$, $a_1 > a_2 > a_3 > 0$. Пусть $J_i = I_{i+1} I_{i-1}$, $b_i = a_{i+1} a_{i-1}$, $i(\text{mod}3)$. Введем матрицы $U = (u_{ij}) = QAQ^{-1}$, $J = \text{diag}(J_i)$, $B = \text{diag}(b_i)$, $V = (v_{ij}) = QBQ^{-1}$. Три интеграла – линейные комбинации указанных в [7] – имеют вид (1.1), где $v = \omega$ – угловая скорость, метрика задана тензором инерции, матрицы операторов в его главных осях и функции $W_i(Q)$ таковы:

$$\Gamma_2 = I, \quad \Gamma_3 = UI; \quad W_1 = \text{tr}UI, \quad W_2 = -\text{tr}UJ, \quad W_3 = \text{tr}VJ$$

Занумеруем подстановки σ чисел 1, 2, 3: σ_0 – тождественная, $\sigma_1 = (123)$ – циклическая, $\sigma_2 = \sigma_1^{-1}$, $\sigma_{3,4,5}$ – транспозиции, $(ij) = \sigma_{i+j}$. В пространстве R^3 отметим векторы $c_{ij} = (1, I_i, I_i a_j)$, $i, j = 1, 2, 3$ и точки c_k , $k = 0, \dots, 5$:

$$c_k = \sum_{i=1}^3 (I_i a_{\sigma(i)}, -J_i a_{\sigma(i)}, J_i b_{\sigma(i)}), \quad \sigma = \sigma_k$$

Примем за локальные координаты точки Q значения $w_i = W_i(Q)$. Пусть $w = (w_1, w_2, w_3)$. Тогда $\{w\} = \Omega_0$ и

$$P(\lambda, w) = \lambda_1 \lambda_3 (\lambda w - L(\lambda)), \quad L = \lambda c_k - (\lambda_1 \lambda_3)^{-1} \sum_{i=1}^3 \lambda c_{i\sigma(i)}$$

для любого $\sigma = \sigma_k$ ($k = 0, \dots, 5$). Поскольку Z_λ – поверхность уровня $L(\lambda)$ функции λW , то ввиду (1.3) $\Psi(\lambda) = L(\lambda)$.

Обозначение Θ_f перенесем на проективную кривую третьего порядка $\{\lambda: \lambda f = L(\lambda)\}$. Тогда X_w совпадает с Θ_f при $f = w$. Множество таких f , для которых кривая Θ_f имеет особенность, определяется обращением в ноль ее дискриминанта, т.е. является алгебраической поверхностью двенадцатого порядка [8], которую обозначим Δ . Множество Σ лежит на Δ (см. замечание в конце разд. 2).

Для описания Z_λ найдем критические точки связок λW . Опустив вычисления, приведем результат для случая $a^{-1} < r < a$, $a = (a_1 - a_2) : (a_2 - a_3)$, $r = (J_2 - J_1) : (J_3 - J_2)$. Значения λ достаточно брать на плоскости $\{\lambda_3 = 1\}$. На фиг. 1 она разделена на области прямыми $l_{ij} = \{\lambda: \lambda c_{ij} = 0\}$. Точки пересечения прямых $l_{i\sigma(i)}$ при $\sigma = \sigma_k$ обозначены цифрой $k = 0, \dots, 5$. Для λ из областей $\Lambda_0^\pm, \Lambda_1, \Lambda_2$ существует 16 критических точек функции λW , определенных уравнениями

$$\alpha_{ij}^2(\lambda) = \frac{\lambda c_{i(j+1)} \lambda c_{i(j-1)} \lambda c_{(i+1)j} \lambda c_{(i-1)j}}{(I_i - I_{i+1})(I_i - I_{i-1})(a_j - a_{j+1})(a_j - a_{j-1})(\lambda_1 \lambda_3)^2}$$

$i, j(\text{mod}3)$, и различающихся знаками α_{ij} ; дадим им общее обозначение Q_λ . Другие критические точки при $\lambda \in l_{ij}$ заполняют кривые $C_{ij} = \{Q : \alpha_{ij} = \pm 1\}$. Среди них 24 точки равновесия, где $\alpha_{i\sigma(i)} = \pm 1$, $w = c_k$ при $\sigma = \sigma_k$, $dW_i = 0$ ($i = 1, 2, 3; k = 0, \dots, 5$).

Вид Z_λ установим по перестройкам множеств уровня λW при переходе значений уровня через критические [9]. Поскольку первое условие (1.2) выполнено тождественно при $\vartheta = (\lambda_1 \lambda_3)^{-1}$, множество X_λ есть часть Z_λ , на которой $\text{sign } P'_\lambda = -\text{sign } \lambda_1 \lambda_3$. На Z_λ знак величины $P'_\lambda = \gamma_2 \gamma_3$ (при $\gamma_1 = 0$) найдем по сигнатуре $\lambda \Gamma$ в областях, разделенных Z_λ . Получим, что для λ из областей, не помеченных на фиг. 1, Z_λ или X_λ пусто. Для $\lambda \in \Lambda_0^\pm, \Lambda_1, \Lambda_2$ множество X_λ образовано четырьмя из восьми компонент Z_λ , диффеоморфных сферам с четырьмя выколотыми точками, приклеенным по проколам к Q_λ . Для остальных помеченных областей X_λ совпадают с Z_λ , диффеоморфны паре торов и при переходе λ через l_{ij} перестраиваются по C_{ij} . Таким образом, области, помеченные на фиг. 1 – ДБО; смысл индекса плюс или минус указан выше. Куски границы Λ^\dots обозначим $\partial_{ij} \Lambda^\dots = l_{ij} \cap \partial \Lambda^\dots$.

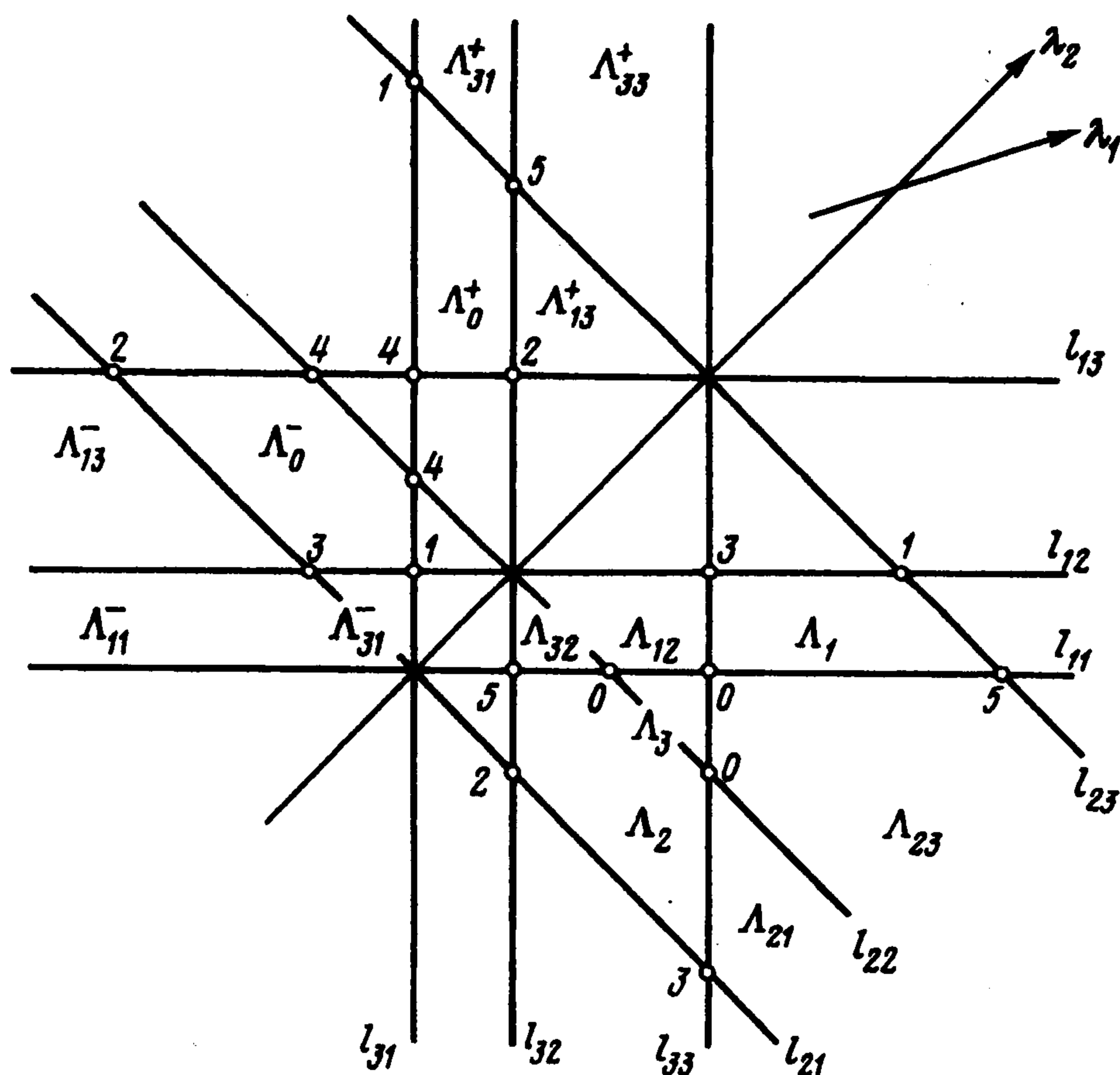
Для координат ω_i скорости стационарного движения по X_λ получим

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = u_1^{-1} : u_2^{-1} : u_3^{-1} \quad (4.1)$$

$$u_i = (\lambda_1 + I_i \lambda_2) u_{jk} - I_i \lambda_3 v_{jk}, \quad i \neq j \neq k \neq i$$

(В уравнении $\lambda \Gamma \omega = 0$ умножим i -ю строку на u_{jk} , $i \neq j \neq k \neq i$, выделим в новой матрице слагаемое $\text{diag}(u_i)$ и заметим, что $u_i \omega_i$ не зависит от i .) Три u_i совместно равны нулю лишь в точках Q_λ , где $\omega = 0$, или при $\lambda \in l_{ij}$ на кривых C_{ij} , по которым проходят стационарные движения с произвольным начальным ω_i и с $\omega_j = 0$ при $j \neq i$; эти же движения соответствуют значениям $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_3 = 0$.

Значения интегралов на движениях по C_{ij} образуют девять лучей T_{ij} , параллельных c_{ij} , содержащих по две точки c_k , $j = \sigma_k(i)$ и ограниченных одной из них. Эти лучи (части ребер самопересечения поверхности Δ), схематически показанные на фиг. 2, составляют одномерный остов множества Σ . Двумерные компоненты Σ суть диффеоморфные образы областей Λ^\dots на фиг. 1 при отображении $f(\lambda)$; образ $f(\Lambda^\dots)$ обозначим Σ^\dots с теми же индексами. Они приклеены к остову продолжением $f(\lambda)$ на границы ДБО. При этом вершины с меткой k переходя в c_k , точки с $\lambda_1 = 0, \infty$ – в бесконечность, $\partial_{ij} \Lambda^\dots$ при $i \neq j$ отображаются в T_{ij} монотонно, а $\partial_{ii} \Lambda^\dots$ в T_{ii} – двукратно: $\partial_{ii} \Lambda_{ii}^\pm$ на $[e_i, \infty)$, $\partial_{22} \Lambda_0^-$ на $[c_4, e_2]$ и $\partial_{ii} \Lambda_3$ на $[c_0, d_i]$. Эти отрезки лучей T_{ii} назовем



Фиг. 1

внутренними ребрами приклеенных к ним клеток Σ_{ij} . (Отметим, что к отрезкам $(d_i, e_j) \subset T_{ij}$ двумерные клетки не приклеиваются.) Таким образом, совокупность ДБО на фиг. 1 представляет собой "развертку" бифуркационной поверхности, показывающую взаимное расположение ее частей.

Разбиение области Ω поверхностью Σ состоит, кроме Ω_0 , из четырех бесконечных областей Ω_{ij} ($i, j = 1, 3$), одна из которых содержит конечную Ω_1 . Во избежание графических трудностей приведем по отдельности схематические изображения частей Σ , ограничивающих эти области (при выбранном соотношении между l_i, a_i).

На фиг. 2 показана граница Ω_0 , "невидимые" грани Σ_1 и Σ_0^- не обозначены. На фиг. 3 и 4 – границы Ω_{ij} , $i \neq j$ и Ω_{ii} ; здесь $k = i + 1 \pmod{3}$, верхний из индексов плюс или минус в символе Σ_{ijk} берется при $i = 1$, внутренние ребра $[c_0, d_i]$ граней Σ_{12} , Σ_{23} и Σ_2 не показаны. На фиг. 5 представлена замкнутая поверхность Σ_3 с внутренними ребрами $[c_0, d_i]$; она ограничивает область Ω_1 , входящую в Ω_{13} . Согласно утверждению 5 куски Σ_0^+ , Σ_{ij}^+ образуют верхнюю, а Σ_0^- , Σ_{ij}^- – нижнюю часть $\partial\Omega$ относительно оси f_1 .

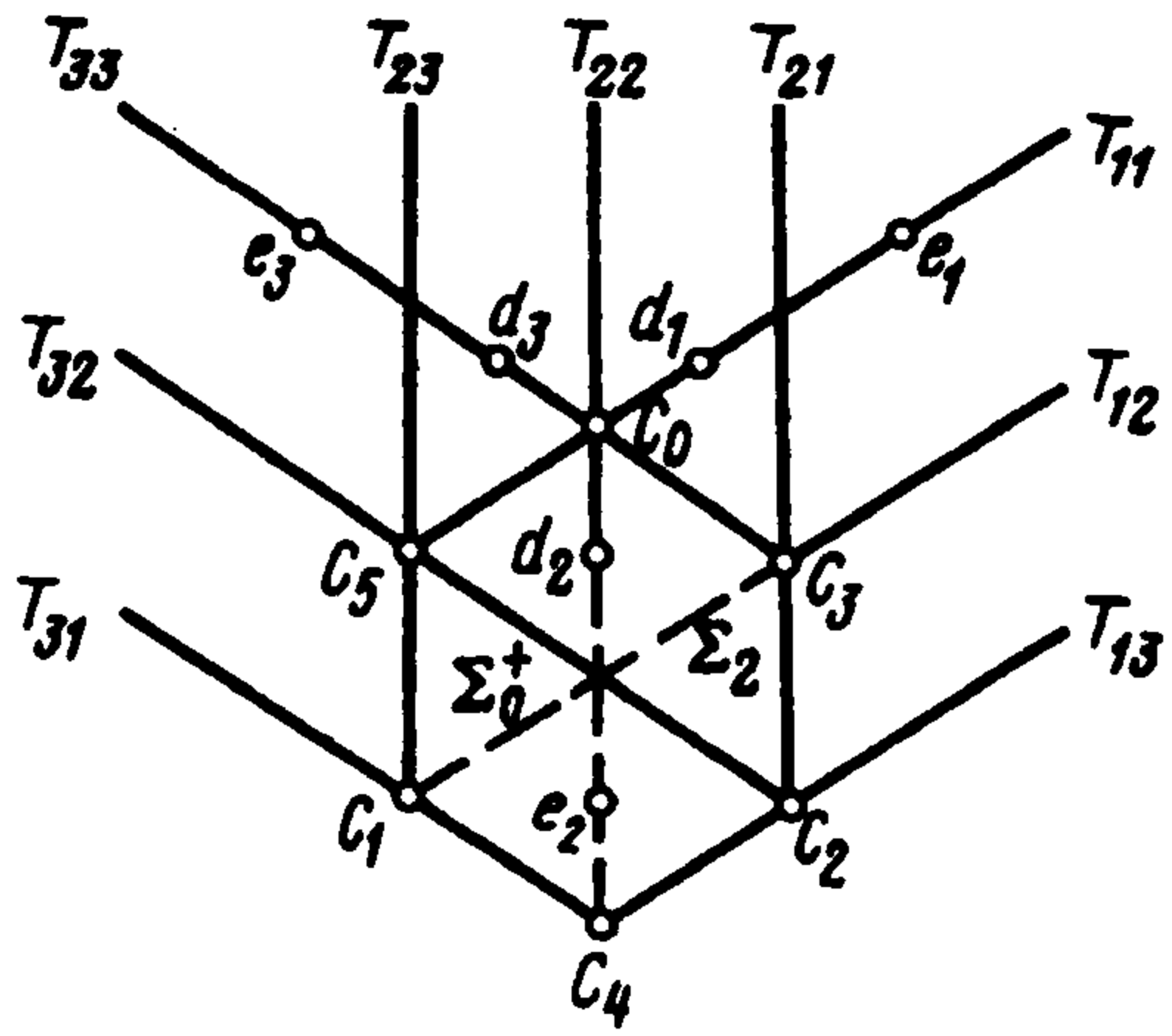
Поскольку $\partial L/\partial \lambda = f(\lambda)$, условие (3.1) имеет вид

$$f - w = \tau(f(\lambda) - w), \quad \lambda w = L(\lambda) \quad (4.2)$$

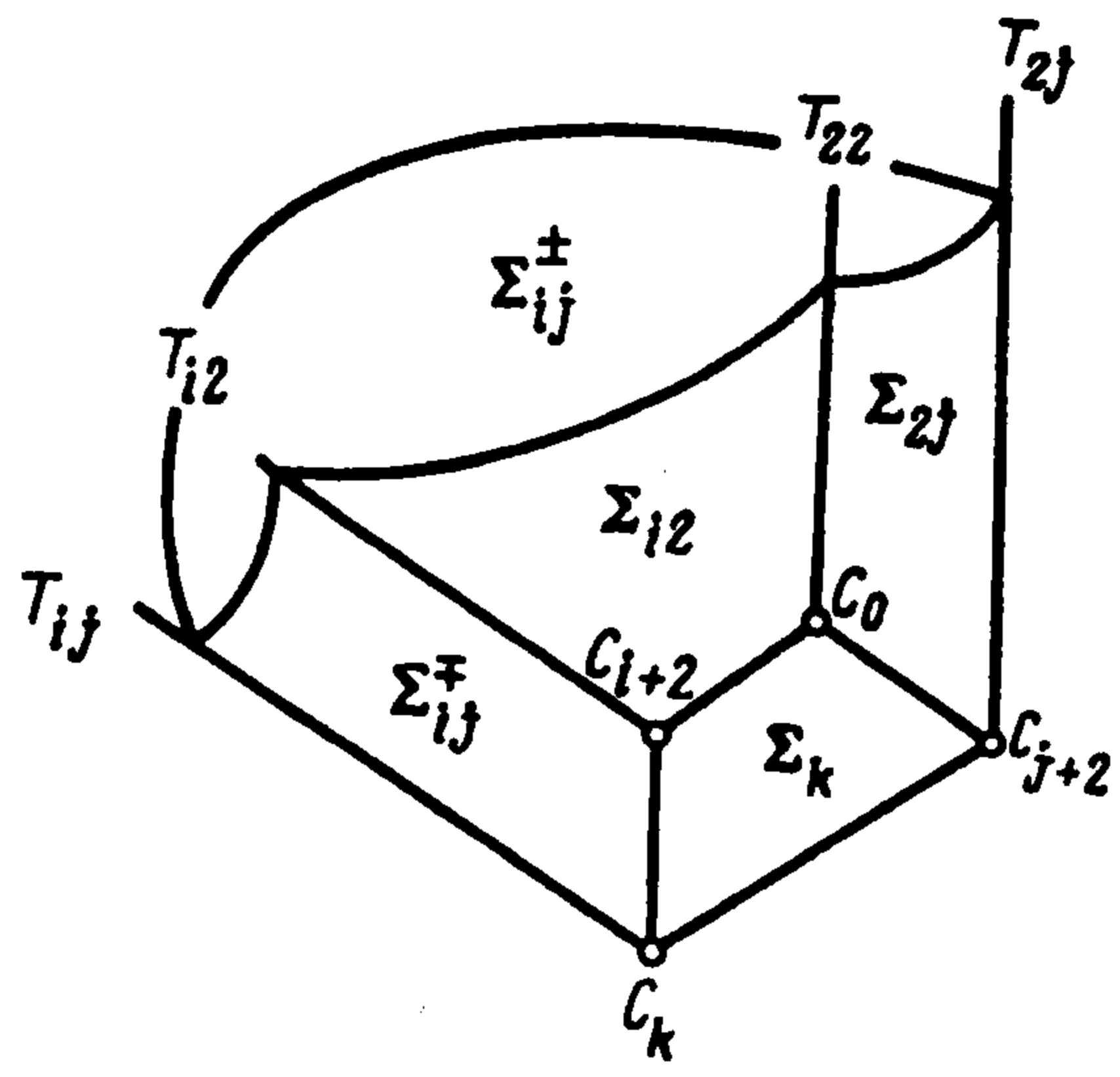
с неопределенным множителем τ , что означает коллинеарность точек $f, w, f(\lambda)$. Умножив на λ первое равенство (4.2), в силу второго и тождества $\lambda f(\lambda) = L$ (из однородности $L(\lambda)$) получим $\lambda(f - w) = 0$, т.е. второе равенство (4.2) можно заменить на $\lambda f = L$. Отсюда следует, что конус $\delta\Omega_w$ – половина ($f_i \geq w_i$) конуса K_w , двойственного множеству X_w , а обобщенная граница δM_f – пересечение с Ω_0 половины ($w_i \leq f_i$) конуса K_f , двойственного Θ_f (замечание в конце разд. 2).

Рассмотрим области Λ_f^+ , Λ_f^- , $\Lambda_f^\pm = \{\lambda: \pm(\lambda f - L) \geq 0\}$ на плоскости $\{\lambda_3 = 1\}$; они ограничены кривой Θ_f и осью λ_2 . Поскольку $\lambda w = L$ на X_w , запишем (3.2) в виде

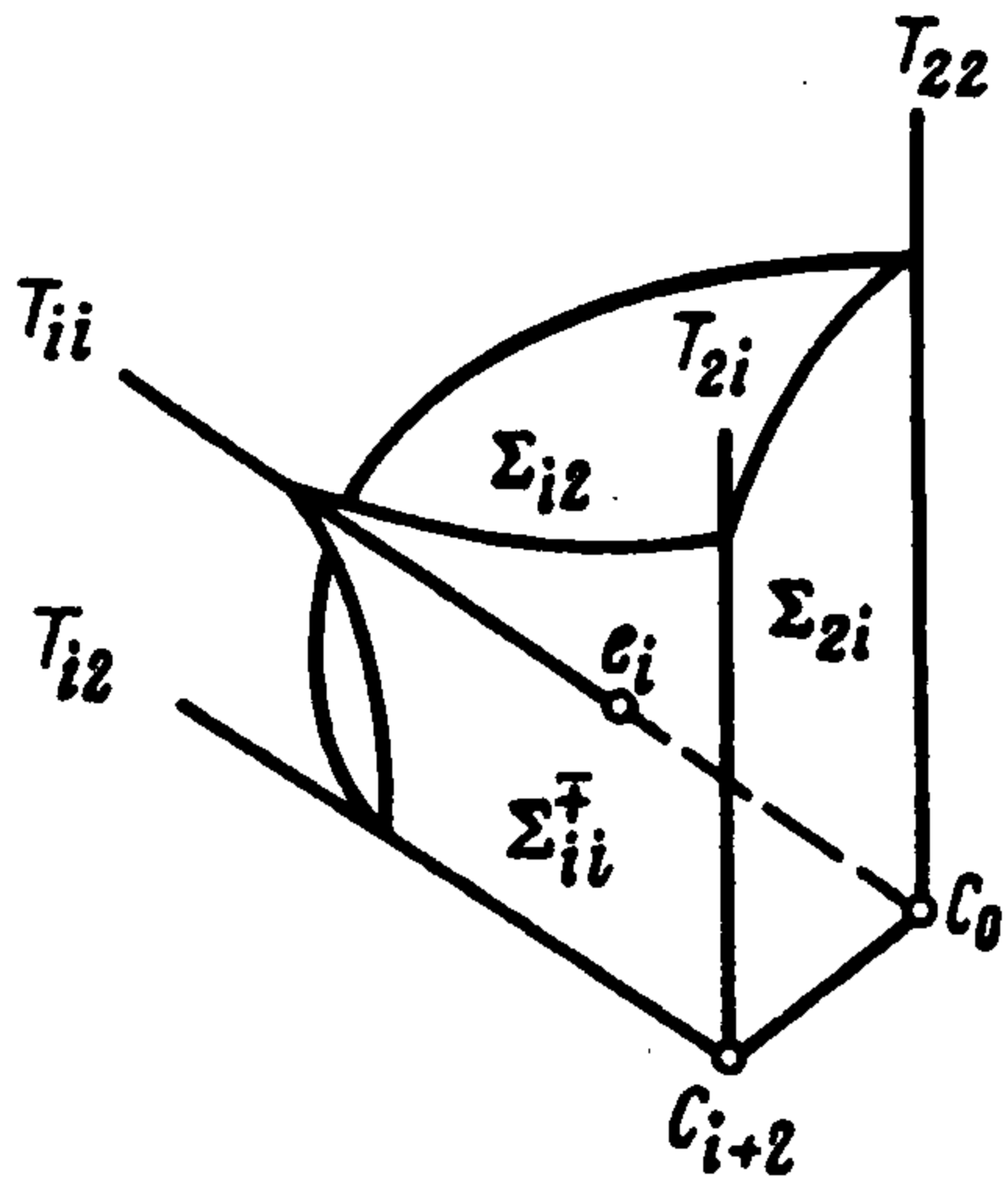
$$M_f = \{w: X_w^\pm \subset \Lambda_f^\pm\} \quad (4.3)$$



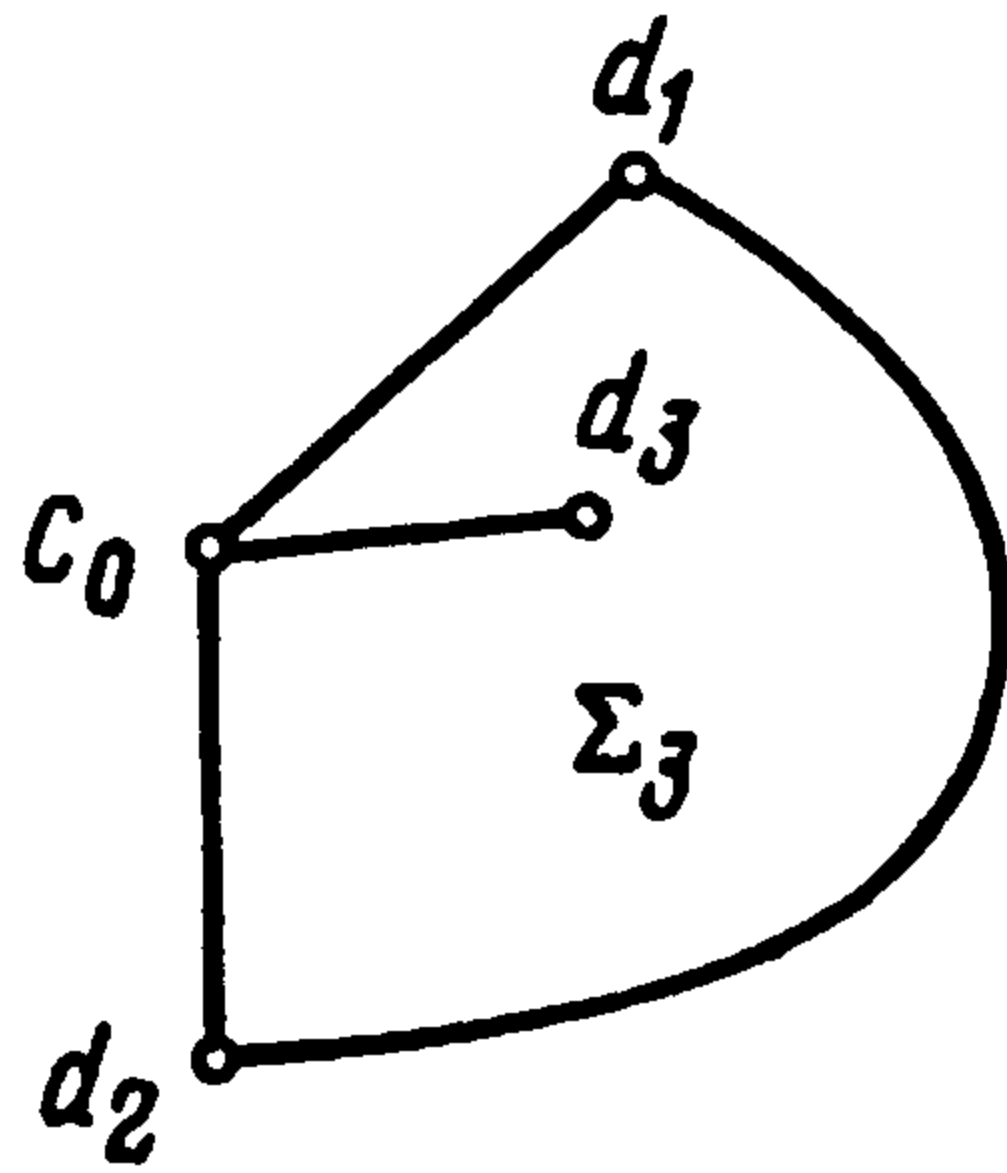
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



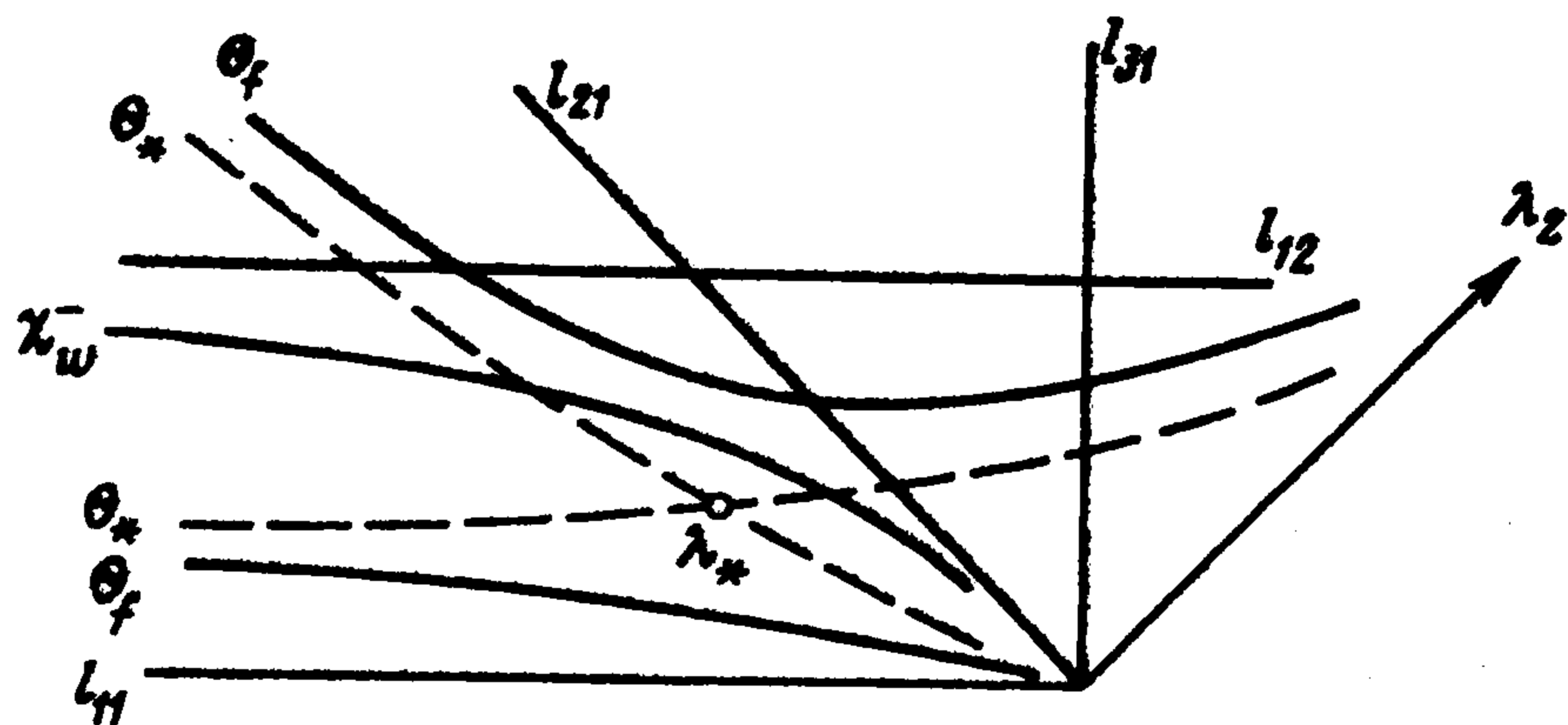
Фиг. 5

Заметим, что условие (4.2), выражающее принадлежность $w \in \delta M_f$, означает касание X_w с Θ_f , принадлежность же $w \in \partial M_f$ ввиду (4.3) означает касание X_w^\pm с $\partial \Lambda_f^\pm$.

Так как задача интегрируема, описание интегральных поверхностей сводится к указанию числа составляющих их торов. Для этого установим вид M_f и характер проекции $I_f \rightarrow M_f$ для значений f , близких к критическим.

Все кривые Θ_f имеют три общих точки при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a_i$ и три в бесконечности на направлениях l_{ij} . Вид Θ_f можно установить при $f = c_k$ (тройка прямых $l_{i\sigma(i)}$, $\sigma = \sigma_k$), при $f \in T_{ij}$ (прямая l_{ij} и гипербола) и по непрерывности, с учетом замечания из разд. 2, для других f . Пусть $f_* = f(\lambda_*)$, $\lambda_* \in \Lambda_{11}^-$. Соответствующие множества обозначим M_* , Θ_* , Z_* , Λ_*^\pm . Пусть f лежит в Ω_{11} вблизи f_* . На фиг. 6 показаны отрезки кривых X_w^- , Θ_f и Θ_* (пунктир) вблизи λ_* — узла Θ_* , области Λ_f^- , Λ_*^- лежат между верхними и нижними ветвями Θ_f , Θ_* .

Видно, что для $X_w^- \subset \Lambda_*^-$ необходимо $\lambda_* \in X_w^-$, т.е. $w \in Z_*$, а для $X_w^- \subset \Lambda_f^-$ — чтобы кривая X_w проходила вблизи λ_* , значит, M_f лежит вблизи Z_* . Поскольку $Z_* \subset M_*$, то $M_* = Z_*$, и условие $\lambda_* \in X_w^-$ ввиду (4.3) достаточно для $X_w^\pm \subset \Lambda_*^\pm$. По непрерывности, учитывая возможный характер пересечения алгебраических кривых X_w и Θ_f с шестью общими точками, можно показать, что для $X_w^\pm \subset \Lambda_f^\pm$ достаточно, чтобы ветвь X_w^- проходила между ветвями Θ_f на фиг. 6; точки их касания при $w \in \delta M_f$ образуют множества Θ'_f на верхней и Θ''_f на нижней ветви Θ_f вблизи λ_* . Другие ветви кривой X_w не проходят через Λ_{11}^- , поэтому, во-первых, $\delta M_f = \partial M_f$, во-вторых, при $w \in M_f$



Фиг. 6

значение $\lambda w - L(\lambda)$ неположительно на Θ'_f и неотрицательно на Θ''_f , следовательно, M_f лежит в пересечении следующих областей Ω'_f и Ω''_f : $\Omega'_f = \cap \Omega^-_{\lambda}, \lambda \in \Theta'_f$; $\Omega''_f = \cap \Omega^+_{\lambda}, \lambda \in \Theta''_f$; $\Omega^{\pm}_{\lambda} = \{w: \pm(\lambda w - L) \geq 0\}$. Поскольку границы этих областей определены тем же условием касания X_w с Θ_f , что и ∂M_f , то $M_f = \Omega'_f \cap \Omega''_f$ и $\partial M_f = \partial \Omega'_f \cup \partial \Omega''_f$.

Сдвигая каждую точку из Z_* вдоль векторного поля, трансверсального к Z_* , до точки с координатами w_i , для которых X_w касается Θ_f , получим непрерывную деформацию Z_* в $\partial \Omega'_f$ и $\partial \Omega''_f$. Таким образом, M_f имеет две компоненты, каждая ограничена парой торов и стягиваема в компоненту поверхности Z_* . В граничные точки M_f проектируются из I_f по два противоположных вектора вида (4.1), во внутренние – по две противоположные пары близких к ним векторов, тем самым I_f состоит из четырех трехмерных торов, попарно проектируемых в две компоненты ОВД.

Таков же вид I_f для $\Omega_{33}, \Omega_{13}, \Omega_{31}$. Для Ω_1 аналогично получим, что интегральные поверхности состоят из восьми торов: четыре проектируются на ОВД, как выше, и еще по два – на подмножества компонент ОВД такого же вида. Для Ω_0 четыре тора, составляющих I_f , проектируются по одному в четыре компоненты ОВД, ограниченные каждая парой поверхностей, гомеоморфных сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smale S. Topology and mechanics // Invent. math. 1970. V. 10. N 4. P. 306–331; V. 11. N 1. P. 45–64; Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77–120.
2. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 326 с.
3. Орехов В.И. Топологический анализ натуральных систем с квадратичными интегралами // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 10–15.
4. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 559 с.
5. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 198 с.
6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
7. Богоявленский О.И. Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 6. С. 1359–1363.
8. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 408 с.
9. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
6.11.1996