

УДК 531.36

© 1997 г. А.П. Маркеев

## О КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Изучается движение периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы в окрестности положения равновесия. Предполагается, что равновесие устойчиво в первом приближении и имеет место резонанс четвертого порядка. Рассматривается критический случай, когда параметры системы таковы, что для получения строгих выводов об устойчивости равновесия необходимо учитывать члены выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона в ряд. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости, а также исследованы бифуркации периодических движений в окрестности положения равновесия, когда параметры системы проходят через их значения, отвечающие критическому случаю. Результаты применены в задаче о движении шара в однородном поле тяжести при наличии соударений с поверхностью эллиптического цилиндра, образующая которого горизонтальна.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему с одной степенью свободы, движение которой описывается каноническими дифференциальными уравнениями с  $2\pi$ -периодическим по времени  $t$  гамильтонианом  $H(x, y, t)$ . Предполагается, что начало координат  $x = y = 0$  фазового пространства является положением равновесия, а функция  $H$  аналитична в его окрестности или, по крайней мере, частные производные функции  $H$  до достаточно высокого порядка непрерывны.

Пусть характеристические показатели линеаризованных уравнений – чисто мнимые величины  $\pm i\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) и в системе нет резонанса до третьего порядка включительно (т.е. число  $k\lambda$  не будет целым при  $k = 1, 2, 3$ ), но есть резонанс четвертого порядка  $4\lambda = N$ , где  $N$  – целое число.

При помощи канонических преобразований переменные  $x, y$  можно [1, 2] выбрать так, чтобы первые несколько форм в разложении функции Гамильтона в ряд были нормализованы. Пусть такой выбор уже сделан. Тогда, как показывают выкладки, функция Гамильтона может быть записана в виде

$$H = \lambda\tau + \sum_{n=2}^m [\gamma_n + \alpha_n \sin(4\chi - Nt) + \beta_n \cos(4\chi - Nt)]\tau^n + O(\tau^{m+1}) \quad (1.1)$$

где  $x = \sqrt{2\tau} \sin \chi$ ,  $y = \sqrt{2\tau} \cos \chi$ ,  $m$  – достаточно большое натуральное число,  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  – постоянные коэффициенты, величина  $O(\tau^{m+1})$   $2\pi$ -периодична по  $t$ .

Будем считать, что величины  $\gamma_2$  и  $\alpha_2^2 + \beta_2^2$  отличны от нуля. Сделаем каноническую замену переменных  $\chi, \tau \rightarrow \varphi, r$  по формулам

$$\chi = \frac{1}{4}Nt + \chi_* + \sigma[\frac{1}{8}(1 + \sigma)\pi + \varphi], \quad \tau = \delta r \quad (1.2)$$

$$\delta = (\alpha_2^2 + \beta_2^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sin 4\chi_* = \delta\alpha_2, \quad \cos 4\chi_* = \delta\beta_2, \quad \sigma = \text{sign } \gamma_2$$

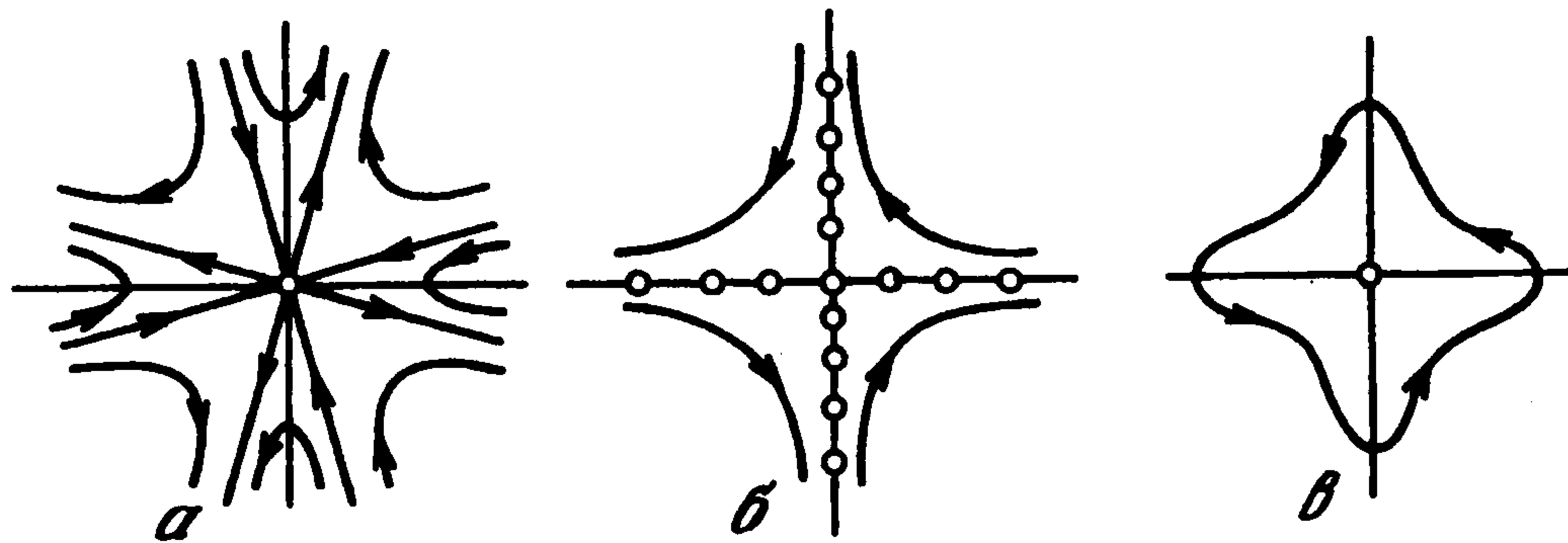
Преобразование (1.2) уничтожает в новой функции Гамильтона линейное относительно  $r$  слагаемое и исключает время в членах до  $r^m$  включительно. В новых переменных имеем

$$H = (\kappa - \cos 4\varphi)r^2 + \sum_{n=3}^m (c_n + a_n \sin 4\varphi + b_n \cos 4\varphi)r^n + O(r^{m+1}) \quad (1.3)$$

$$\kappa = \delta|\gamma_2|, \quad c_n = \sigma\delta^{n-1}\gamma_n, \quad a_n = \sigma\delta^n(\alpha_2\beta_n - \beta_2\alpha_n), \quad b_n = -\delta^n(\alpha_2\alpha_n + \beta_2\beta_n) \quad (1.4)$$

Величина  $O(r^{m+1})$  в (1.3)  $8\pi$ -периодична по  $t$ .

Рассмотрим приближенную систему уравнений движения, определяемую укороченным гамильтонианом  $h = (\kappa - \cos 4\varphi)r^2$ , который получается из (1.3), если пренебречь



Фиг. 1

величинами выше второго порядка малости относительно  $r$ . Фазовые портреты этой системы в плоскости  $y_1, y_2$ , где  $y_1 = \sqrt{2r} \cos \varphi$ ,  $y_2 = \sqrt{2r} \sin \varphi$ , представлены на фиг. 1, а, б, в для случаев  $0 < \kappa < 1$ ,  $\kappa = 1$  и  $\kappa > 1$  соответственно.

Асимптотические траектории на фиг. 1, а лежат на лучах  $\varphi = \pm \frac{1}{4} \arccos \kappa + \frac{1}{2} l \pi$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ). Период движения по замкнутой траектории на фиг. 1, в равен  $2K(k)[(\kappa+1)h]^{-1/2}$ , где  $K$  – полный эллиптический интеграл первого рода,  $k^2 = 2(\kappa+1)^{-1}$ ,  $h$  – константа интеграла энергии; максимальное и минимальное значения  $r$  на этой траектории равны  $(\kappa-1)^{-1/2} h^{1/2}$  и  $(\kappa+1)^{-1/2} h^{1/2}$  соответственно.

Было показано [2], что в случае  $0 < \kappa < 1$ , положение равновесия, совпадающее с началом координат, неустойчиво, а в случае  $\kappa > 1$  устойчиво, причем не только в приближенной системе с укороченным гамильтонианом, но и в полной системе, определяемой функцией Гамильтониана (1.3).

Случай  $\kappa = 1$  критический. При  $\kappa = 1$  в приближенной системе все точки, лежащие на осях координат, являются положениями равновесия и все они неустойчивы (фиг. 1, б). Примеры показывают [2], что члены выше второй степени относительно  $r$  в гамильтониане (1.3) могут привести как к устойчивости начала координат, так и к его неустойчивости.

В данной статье получены условия устойчивости и неустойчивости в критическом случае  $\kappa = 1$ . Эти условия могут быть записаны в виде неравенств, связывающих коэффициенты  $\gamma_n, \alpha_n, \beta_n$  ( $n \geq 3$ ) нормализованной функции Гамильтона (1.1). Исследована также задача о бифуркациях периодических движений в окрестности начала координат при переходе величины  $\kappa$  через его критическое значение  $\kappa = 1$ .

**2. Дальнейшее преобразование нормальной формы функции Гамильтона.** Сделаем в (1.3) унивалентное каноническое преобразование  $\varphi, r \rightarrow \psi, R$  по формулам

$$\varphi = \psi + k_1 R + k_2 R^2 + \dots + k_{m-2} R^{m-2}, \quad r = R \quad (2.1)$$

Постоянные коэффициенты  $k_i$  в (2.1) можно подобрать так, чтобы преобразован-

ный гамильтониан не содержал  $\sin 4\psi$  в членах до степени  $m$  включительно относительно  $R$ . Например, коэффициенты  $k_1, k_2$  должны при этом задаваться равенствами  $k_1 = -\frac{1}{4}a_3, k_2 = -\frac{1}{4}(a_4 + a_3b_3)$ .

Преобразованную функцию Гамильтона (1.3) можно записать в виде

$$H = \sum_{n=2}^m \delta_n R^n + (1 - \cos 4\psi) \sum_{n=2}^m e_n R^n + O(R^{m+1}) \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $\delta_n, e_n$  выражаются через коэффициенты функции (1.3). В частности, имеем  $e_2 = 1$ , а

$$\delta_2 = \kappa - 1, \quad \delta_3 = c_3 + b_3, \quad \delta_4 = c_4 + b_4 - \frac{1}{2}a_3^2 \quad (2.3)$$

В критическом случае коэффициент  $\delta_2$  в первой сумме из (2.2) равен нулю. Пусть следующий коэффициент  $\delta_3$  отличен от нуля. Для исследования критического и близкого к критическому случаев целесообразно сделать еще одну замену переменных  $\psi, R, t \rightarrow \theta, \rho, \eta$  по формулам,  $\psi = \theta, R = |\delta_3|^{-1}\rho, t = |\delta_3|\eta$ .

В новых переменных движение описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона вида

$$H = (\kappa - \cos 4\theta)\rho^2 + [s + k(1 - \cos 4\theta)]\rho^3 + O(\rho^4), \quad \text{где } s = \text{sign } \delta_3, k = |\delta_3|^{-1}e_3 \quad (2.4)$$

**3. Об устойчивости в критическом случае.** Считая, что  $\delta_3 \neq 0$ , рассмотрим приближенную систему с гамильтонианом  $\Gamma(\theta, \rho)$ , который получается из (2.4), если отбросить члены выше третьего порядка малости относительно  $\rho$ . Приближенная система интегрируема и допускает полное ее исследование. Для достаточно малых  $\rho$  фазовые траектории этой системы в критическом случае ( $\kappa = 1$ ) показаны на фиг. 2, б и фиг. 3, б в плоскости  $x_1, x_2$ , где

$$x_1 = \sqrt{2\rho} \cos \theta, \quad x_2 = \sqrt{2\rho} \sin \theta \quad (3.1)$$

Фиг. 2, б соответствует случаю  $s = -1$  ( $\delta_3 < 0$ ), а фиг. 3, б – случаю  $s = 1$  ( $\delta_3 > 0$ ). В приближенной системе положение равновесия, совпадающее с началом координат, неустойчиво при  $\delta_3 < 0$  и устойчиво при  $\delta_3 > 0$ . Ниже показано, что эти выводы справедливы не только для приближенной системы, но и для системы, описываемой уравнениями с полным гамильтонианом (2.4).

Учитывая, что в силу (1.4), (2.3) величина  $\delta_3$  выражается через коэффициенты гамильтониана (1.1) по формуле  $\delta_3 = \delta^3[\gamma_2\gamma_3 - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3)]$ , последнее утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

*Теорема 1.* Если коэффициенты функции Гамильтона (1.1) таковы, что  $|\gamma_2| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$ , но при этом выполняется неравенство

$$\gamma_2\gamma_3 < \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 \quad (3.2)$$

то положение равновесия  $x = y = 0$  неустойчиво; при противоположном знаке в неравенстве (3.2) имеет место устойчивость.

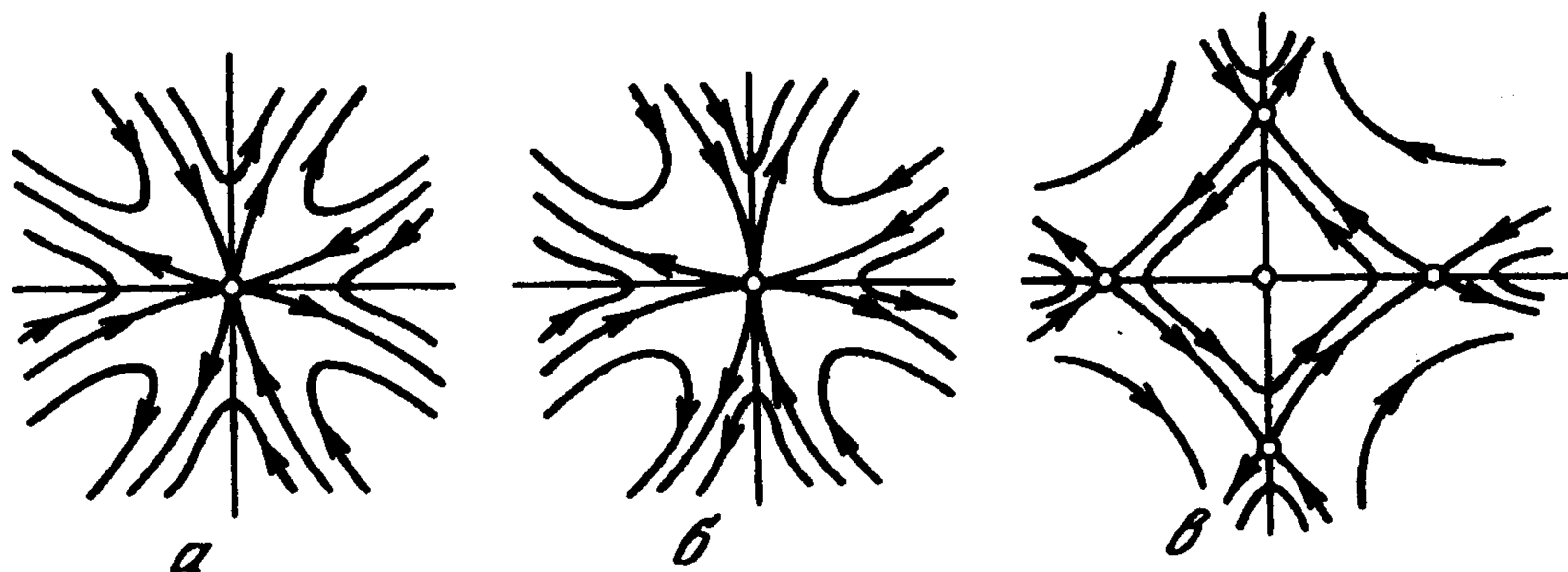
Для доказательства неустойчивости возьмем функцию  $V$  вида

$$V = \rho^2 \sin 4\theta \quad (3.3)$$

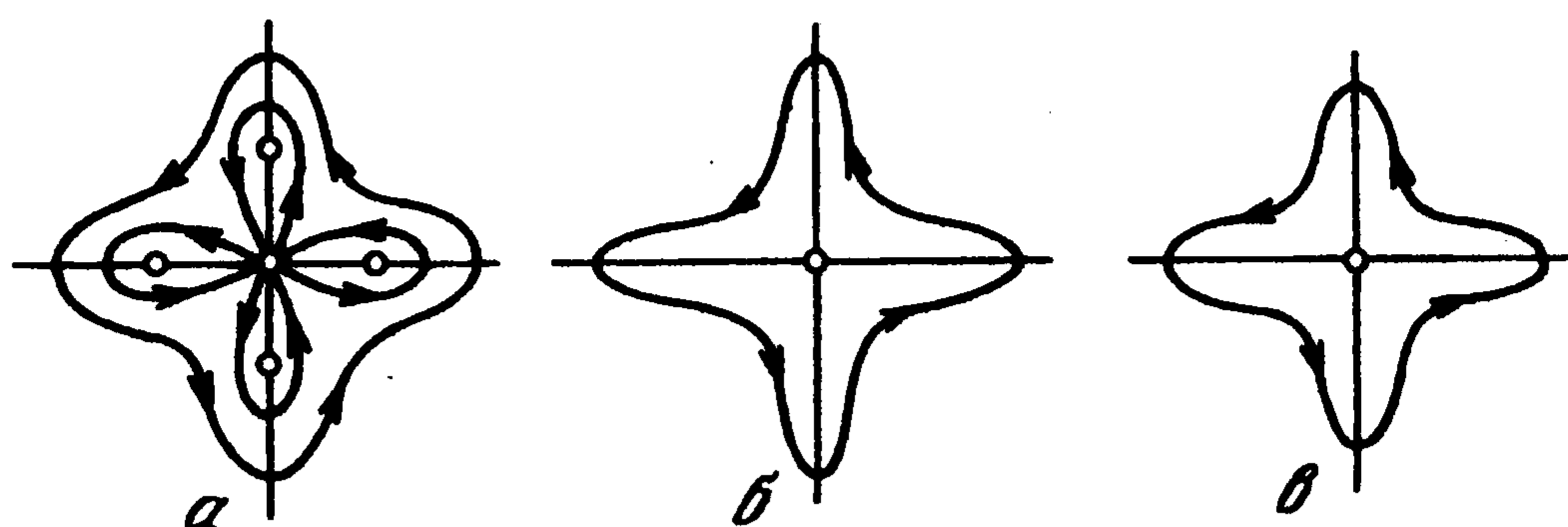
Учитывая, что  $\kappa = 1$ , а при условии (3.2) величина  $s = -1$ , имеем выражение для производной функции  $V$  в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.4)

$$dV / d\eta = -4\rho^3[(1 - \cos 4\theta)(2 + O(\rho)) + \rho(3 + O(\rho))] \quad (3.4)$$

При достаточно малых  $\rho$  функция (3.4) определенно-отрицательна. А так как функция  $V$  знакопеременна, то отсюда согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости [3] следует неустойчивость равновесия при выполнении неравенства (3.2).



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть теперь неравенство (3.2) выполняется с противоположным знаком. Тогда  $s = 1$  и  $\Gamma(\theta, \rho) = \rho^3 + \nu\rho^2(1 + k\rho)$ , где  $\nu = 1 - \cos 4\theta$ . Приближенная система описывается уравнениями

$$d\theta / d\eta = 3\rho^2 + \nu\rho(2 + 3k\rho), \quad d\rho / d\eta = -4\rho^2(1 + k\rho)\sin 4\theta \quad (3.5)$$

и имеет интеграл  $\Gamma(\theta, \rho) = h = \text{const}$ .

Величину  $\rho$  полагаем достаточно малой, чтобы правая часть первого из уравнений (3.5) была положительна, а знак правой части второго уравнения был противоположен знаку  $\sin 4\theta$  при любых значениях  $k$ . Для малых  $\rho$  имеем  $0 < h \ll 1$ .

Положим  $h = h_0$  и из уравнения  $\Gamma(\theta, \rho) = h_0$  найдем корень  $\rho = \rho_0(\theta, h_0)$ , описывающий фазовую траекторию системы (3.5), охватывающую начало координат и такую, что она "схлопывается" в начало координат при  $h_0 \rightarrow 0$ . Фазовая траектория показана на фиг. 3, б. Для максимального и минимального значений  $\rho$  на этой траектории имеем следующие выражения:

$$\rho_{\max} = h_0^{1/3}, \quad \rho_{\min} = \sqrt{2}h_0^{1/2} / 2 - (1 + 2k)h_0 / 8 + O(h_0^{3/2})$$

Если  $h = h_0 + \mu$  ( $|\mu| \ll 1$ ), то для корня  $\rho(\theta, h)$  уравнения  $\Gamma(\theta, \rho) = h$  имеем сходящийся ряд по  $\mu$ :  $\rho = \rho_0 + \mu\rho_1 + \dots$ , причем  $\rho_1^{-1} = 3\rho_0^2 + \nu\rho_0(2 + 3k\rho_0) > 0$ .

Пусть  $I(h)$  – переменная действия в приближенной системе (3.5) ( $I(0) = 0$ ). Вблизи фазовой кривой  $\rho = \rho_0(\theta, h)$  величина  $I(h)$  может быть представлена в виде ряда:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, h) d\theta = I_0 + \mu I_1 + \dots, \quad I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_1 d\theta \neq 0$$

где  $I_0$  – поделенная на  $2\pi$  площадь, лежащая внутри фазовой кривой  $\rho = \rho_0(\theta, h_0)$ .

Из неравенства  $I_1 \neq 0$  следует, что обратная к  $I(h)$  функция  $h = h(I)$  аналитична в области  $0 < I \ll 1$ .

Если в полной системе с функцией Гамильтона (2.4) (при  $\kappa = 1, s = 1$ ) сделать замену переменных  $\theta, \rho \rightarrow w, I$  приводящую функцию  $\Gamma(\theta, \rho)$  к переменным действие – угол, то получим функцию Гамильтона полной системы в виде

$$H = h(I) + h_1(w, I, \eta) \quad (3.6)$$

где функция  $h_1$  имеет период  $2\pi$  по  $w$  и  $8\pi\delta_3^{-1}$  по  $\eta$ , аналитична или по крайней мере имеет непрерывные производные до достаточно высокого порядка при  $0 < I \ll 1$ , причем  $h_1 = o(h(I))$  при  $I \rightarrow 0$ .

Рассмотрим сохраняющее площадь отображение окрестности начала координат, задаваемое движениями системы с функцией Гамильтона (3.6) за период  $8\pi\delta_3^{-1}$  изменения величины  $\eta$ . Для устойчивости начала координат необходимо и достаточно, чтобы в любой сколь угодно малой его окрестности существовала окружающая точку  $I = 0$  кривая, инвариантная при этом отображении [4]. Существование таких кривых следует из теоремы Мозера [5], если только выполнено условие невырожденности  $d^2h/dI^2 \neq 0$ .

Можно показать, что

$$\frac{d^2h}{dI^2} = \frac{\omega^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \right)^{-3} d\theta, \quad \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} \right)^{-1} d\theta \quad (3.7)$$

где интегралы вычисляются вдоль замкнутой траектории  $\rho = \rho(\theta, h)$  приближенной системы (3.5) (фиг. 3, б),  $\omega$  – частота движения для этой траектории.

Так как величины  $\partial \Gamma / \partial \rho = 3\rho^2 + \nu\rho(2 + 3k\rho)$  и  $\partial^2 \Gamma / \partial \rho^2 = 6\rho + 2\nu(1 + 3k\rho)$  положительны при достаточно малых  $\rho$ , то из (3.7) следует, что  $d^2h/dI^2 > 0$ , и следовательно, условие невырожденности выполнено.

Утверждение теоремы 1 об устойчивости доказано.

*Замечание.* Пусть в критическом случае в гамильтониане (2.2) не только  $\delta_2$ , но и коэффициент  $\delta_3$  равен нулю, но при этом  $\delta_4 \neq 0$ . Тогда, аналогично случаю  $\delta_3 \neq 0$ , можно доказать, что при  $\delta_4 < 0$  имеет место неустойчивость, а при  $\delta_4 > 0$  устойчивость. Выражение величины  $\delta_4$  через коэффициенты гамильтониана (1.1) получается из формул (1.4), (2.3).

*Следствие.* Из [2] и результатов данного раздела вытекает следующее утверждение об устойчивости равновесия при резонансе четвертого порядка  $4\lambda = N$ , справедливое как в критическом, так и в некритическом случаях.

*Теорема 2.* Если  $\delta_m$  – первый отличный от нуля коэффициент в разложении (2.2), то задача об устойчивости равновесия  $x = y = 0$  решается рассмотрением членов до степени  $2m$  включительно в разложении функции  $H(x, y, t)$  в ряд: при  $\delta_m < 0$  равновесие неустойчиво, а при  $\delta_m > 0$  устойчиво.

**4. О движениях в случаях, близких к критическому.** Предположим, что  $\delta_3 \neq 0$  и рассмотрим поведение системы при переходе параметра  $\kappa$  через его критическое значение, равное единице. Положив в (2.4)  $\kappa = 1 + \varepsilon$  ( $|\varepsilon| \ll 1$ ), получим такие уравнения движения:

$$d\theta / d\eta = 2(1 + \varepsilon - \cos 4\theta)\rho + 3[s + k(1 - \cos 4\theta)]\rho^2 + O(\rho^3) \quad (4.1)$$

$$d\rho / d\eta = -4\rho^2(1 + k\rho)\sin 4\theta + O(\rho^4)$$

4.1. Пусть сначала  $\delta_3 < 0$  ( $s = -1$ ). Как показано в разд. 3, в этом случае при  $\varepsilon = 0$  положение равновесия, совпадающее с началом координат, неустойчиво.

Рассмотрим приближенную систему уравнений, получаемую из уравнений (4.1)

отбрасыванием в них величины  $O(\rho^3)$  и  $O(\rho^4)$ . Ее фазовые портреты для малых  $\rho$  показаны на фиг. 2 в плоскости  $x_1, x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  определены равенствами (3.1).

На фиг. 2а величина  $\varepsilon$  отрицательна. Фазовые траектории получаются малой деформацией соответствующих траекторий фиг. 1, а. Например, асимптотические траектории на фиг. 2, а уже не лежат на прямых, проходящих через начало координат; они задаются уравнениями

$$\theta = \pm[\frac{1}{4} \arccos(1 + \varepsilon) + (1 + k\varepsilon)|\varepsilon|^{-\frac{1}{2}}(2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\rho + O(\rho^2)] + l\pi/2 \quad (l = 0, 1, 2, 3)$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  фиг. 2, а переходит в фиг. 2, б; здесь асимптотические траектории касаются осей координат.

Фиг. 2, в соответствует случаю  $\varepsilon > 0$ . В приближенной системе помимо начала координат существуют близкие к нему положения равновесия  $\rho_*, \theta_*$ , где

$$\rho_* = \frac{2}{3}\varepsilon, \quad \theta_* = \frac{1}{2}n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

На фиг. 2, в им отвечают седловые особые точки. Седла соединяются гетероклинными двоякоасимптотическими траекториями – сепаратрисами. Направление их входа в седловую точку или выхода из нее составляет с осью координат, на которой лежит эта точка, угол равный  $\arctg \sqrt{3\varepsilon/[2(3+2k\varepsilon)]}$ . Сепаратрисы выделяют часть фазового пространства, заполненную замкнутыми траекториями, окружающими устойчивое положение равновесия  $x_1 = x_2 = 0$ . Эти траектории получаются из соответствующих фазовых траекторий фиг. 1, в при помощи малой деформации. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  замкнутые траектории, седловые особые точки и сепаратрисы "схлопываются" в начало координат и приходим к фиг. 2, б.

При помощи метода малого параметра Пуанкаре [6] можно показать, что из седловых точек приближенной системы при достаточно малых  $\varepsilon$  рождается аналитическое по  $\varepsilon$  периодическое решение полной системы (4.1). Этому решению отвечает  $8\pi$ -периодическое по  $t$  движение системы с исходным гамильтонианом (1.1), переходящее при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в положение равновесия  $x = y = 0$ . Вычисления показывают, что характеристические показатели этого периодического движения при малых  $\varepsilon$  равны  $\pm 8\sqrt{2}(3|\delta_3|)^{-1}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}})$ . Так как один из них положителен, то из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3] следует, что периодическое движение неустойчиво.

Таким образом, если  $\delta_3 < 0$ , то при переходе параметра  $\kappa$  через критическое значение  $\kappa = 1$  из области  $\kappa < 1$  в область  $\kappa > 1$  неустойчивое положение равновесия  $x = y = 0$  становится устойчивым и от него ответвляется неустойчивое  $8\pi$ -периодическое движение.

4.2. Пусть теперь  $\delta_3 > 0$  ( $s = 1$ ). В этом случае при  $\varepsilon = 0$  начало координат устойчиво.

Как и в разд. 4.1, рассмотрим сначала приближенную систему. Ее фазовые траектории задаются уравнением  $\rho^3 + v\rho^2(1 + k\rho) + \varepsilon\rho^2 = h = \text{const}$ . Для малых  $\rho$  они показаны на фиг. 3.

На фиг. 3, а величина  $\varepsilon$  отрицательна. Начало координат неустойчиво. У приближенной системы есть также положения равновесия  $\rho_*, \theta_*$ , не совпадающие с началом координат. Эти равновесия задаются равенствами (4.2), если в них  $\varepsilon$  заменить на  $|\varepsilon|$ . Равновесиям  $\rho_*, \theta_*$  на фиг. 3, а отвечают особые точки типа центр; в них  $h = (4/27)\varepsilon^3$ . Если  $(4/27)\varepsilon^3 < h < 0$ , то фазовые траектории замкнуты и окружают особые точки – центры. При  $h = 0$  имеем неустойчивое равновесие – начало координат и гомоклинные двоякоасимптотические к этому равновесию траектории – сепаратрисы. На них  $\rho = -(\varepsilon + v)(1 + kv)^{-1}$ , причем угол  $\theta$  изменяется в узких секторах:  $|\theta - \frac{1}{2}n\pi| < \Delta$

( $n = 0, 1, 2, 3$ ), где  $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{2|\epsilon|}(1 + O(\epsilon))$ , а максимальное значение величины  $\rho$  равняется  $|\epsilon|$ . При  $h > 0$  фазовые траектории являются замкнутыми кривыми, охватывающими все особые точки и сепаратрисы. На этих траекториях при малых  $|\epsilon|$  величина  $\rho = \rho(\theta, h)$  мало отличается от аналогичной величины, отвечающей замкнутой кривой фиг. 3, б с тем же значением  $h$ . Если при  $h > 0$  гамильтониан приближенной системы привести к переменным действие – угол, то при малых  $|\epsilon|$  величина  $d^2h/dl^2$  будет мало отличаться от аналогичной величины из (3.7) и, в соответствии с разд. 3, будет отлична от нуля, т.е. при  $h > 0$  и малых  $|\epsilon|$  функция Гамильтона приближенной системы является невырожденной.

При  $\epsilon \rightarrow 0$  двоякоасимптотические траектории и охватываемые ими области на фиг. 3, а "схлопываются" в начало координат и при  $\epsilon = 0$  получается фазовый портрет, представленный на фиг. 3, б.

Фазовый портрет приближенной системы для  $\epsilon > 0$  показан на фиг. 3, в. Он получается из фазового портрета фиг. 3, б при помощи малой деформации.

Методом Пуанкаре можно показать, что из особых точек – центров, существующих в приближенной системе при  $\epsilon < 0$  (фиг. 3, а), при достаточно малых  $|\epsilon|$  рождается аналитическое по  $\epsilon$  периодическое решение полной системы (4.1), переходящее при  $\epsilon \rightarrow 0$  в положение равновесия, совпадающее с началом координат. Этому решению соответствует  $8\pi$ -периодическое по  $t$  движение в исходной системе с гамильтонианом (1.1). Как показывают вычисления, функция Гамильтона возмущенного движения для этого периодического движения при подходящем выборе возмущений  $q, p$  имеет нормальную форму вида

$$H = \frac{1}{2}\Omega(q^2 + p^2) + \frac{1}{4}c(q^2 + p^2)^2 + O((q^2 + p^2)^{5/2})$$

$$\Omega = (\frac{8}{3})\sqrt{2|\epsilon|}^{3/2}(1 + O(\epsilon)), \quad c = -(68/3)(1 + O(\epsilon))$$

Так как при достаточно малых  $|\epsilon|$  величина  $c$  отлична от нуля, то из теоремы Мозера об инвариантных кривых [5] следует, что периодическое движение устойчиво.

Из теоремы Мозера и отмеченной выше невырожденности при  $h > 0$  гамильтониана приближенной системы следует также, что, несмотря на то что при  $\epsilon < 0$  равновесие  $x = y = 0$  неустойчиво, траектории движения в его окрестности ограничены: если траектория начинается достаточно близко к началу координат, то при дальнейшем движении величина  $\rho(t)$  не превосходит величину порядка  $|\epsilon|$  (напомним, что  $|\epsilon|$  – это максимальное значение  $\rho$  на двоякоасимптотических траекториях фиг. 3, а).

При переходе параметра  $\kappa$  через критическое значение  $\kappa = 1$  из области  $\kappa < 1$  область  $\kappa > 1$  устойчивое  $8\pi$ -периодическое по  $t$  движение сливается при  $\kappa = 1$  с началом координат и при  $\kappa > 1$  исчезает, само же начало координат становится устойчивым.

**5. Пример. О движении шара над поверхностью эллиптического цилиндра.** Рассмотрим движение шара в поле тяжести над неподвижным абсолютно гладким желобом, имеющим форму эллиптического цилиндра с горизонтальной образующей. При движении шар время от времени соударяется с поверхностью желоба. Удар считаем абсолютно упругим. Движение отнесем к неподвижной системе координат  $\xi\eta\zeta$ , ось  $\eta$  которой вертикальна, а ось  $\zeta$  направлена вдоль образующей. Постоянную во все время движения проекцию скорости центра шара на ось  $\zeta$ , не ограничивая общности, принимаем равной нулю. Если пренебречь размерами шара, то придем [7] к задаче о плоском движении тяжелой материальной точки над дугой эллипса  $\xi^2a^{-2} + (\eta - b)^2b^{-2} = 1$ .

Существует периодическое движение точки, когда ее траектория лежит на вертикали  $\eta$ , а сама точка в результате соударений с дугой эллипса в начале координат  $\xi = \eta = 0$  периодически подскакивает на некоторую высоту  $l$ . Период этого движения равен промежутку времени  $2\sqrt{2l/g}$  между двумя последовательными соударениями.

Были получены [7] достаточные условия орбитальной неустойчивости и изоэнергетической орбитальной устойчивости этого периодического движения. В частности, по казано, что  $z$  в плоскости  $\alpha, \beta$ , где  $\alpha = a^2 b^{-2}$ ,  $\beta = lb^{-1}$ , на луче  $\beta = \frac{1}{4}\alpha$  реализуется резонанс четвертого порядка. Точки  $c(5, 5/4)$  и  $d(10, 5/2)$  разбивают этот луч на участки устойчивости и неустойчивости (в обозначениях данной статьи в этих точках  $\kappa = 1$ ). При  $0 < \alpha < 5$  или  $\alpha > 10$  имеет место орбитальная устойчивость (здесь  $\kappa > 1$ ), а если  $5 < \alpha < 10$ , то периодическое движение орбитально неустойчиво (здесь  $\kappa < 1$ ).

Рассмотрим устойчивость периодического движения в критических точках  $c$  и  $d$ . Для этого зафиксируем уровень энергии, равный  $mg l$ , и, следуя [7], при помощи метода поверхностей сечения Пуанкаре построим сохраняющее площадь отображение плоскости  $\xi, p_\xi$  в себя ( $p_\xi$  — импульс, соответствующий координате  $\xi$ ). Рассматриваемому периодическому движению шара соответствует неподвижная точка  $\xi = 0, p_\xi = 0$  отображения. В окрестности этой точки отображение аналитично. При помощи вещественного аналитического канонического преобразования  $\xi, p_\xi \rightarrow u, v$  оно было приведено к нормальной форме до членов шестой степени включительно. В комплексно сопряженных переменных  $\zeta = u - iv, \bar{\zeta} = u + iv$  нормализованное отображение можно записать в виде

$$\zeta_1 = i\zeta + f_{21}^* \zeta^2 \bar{\zeta} + f_{03}^* \bar{\zeta}^3 + f_{32}^* \zeta^3 \bar{\zeta}^2 + f_{50}^* \zeta^5 + f_{14}^* \zeta \bar{\zeta}^4 + O_7 \quad (5.1)$$

На подробностях довольно громоздкой процедуры вычисления коэффициентов  $f_{kl}^*$  не останавливаемся.

Для отображения (5.1) (как и для любого аналитического сохраняющего площадь отображения) существует [1]  $2\pi$ -периодический по  $t$  гамильтониан  $H(\zeta, \bar{\zeta}, t)$  класса  $C_\infty$ , если не аналитический, такой, что преобразование за время  $2\pi$ , осуществляемое движениями системы с этим гамильтонианом, совпадает с (5.1). Как показывают выкладки, функцию  $H$  можно взять в виде ( $4\lambda = 1$ )

$$H = i\lambda \zeta \bar{\zeta} + \gamma_{22} (\zeta \bar{\zeta})^2 + \gamma_{40} e^{-it} \zeta^4 + \gamma_{04} e^{it} \bar{\zeta}^4 + \gamma_{33} (\zeta \bar{\zeta})^3 + \gamma_{51} e^{-it} \zeta^5 \bar{\zeta} + \gamma_{15} e^{it} \zeta \bar{\zeta}^5 + O_8 \quad (5.2)$$

где величины  $\gamma_{kl}$  не зависят от  $t$ . Их выражения через коэффициенты отображения (5.1) для краткости не приводим.

После канонической замены переменных  $\zeta = -i\sqrt{2\tau}e^{i\chi}$ ,  $\bar{\zeta} = i\sqrt{2\tau}e^{-i\chi}$  гамильтониан (5.2) принимает форму (1.1). Вычисления показали, что коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  ( $n = 2, 3$ ) в точке  $c$  таковы:  $\alpha_2 = 0, \beta_2 = -\gamma_2 = 5/(64\pi)$ ,  $\alpha_3 = 0, \beta_3 = -5/(512\pi), \gamma_3 = -49/(1536\pi)$ , а в точке  $d$  имеем  $\alpha_2 = 0, \beta_2 = \gamma_2 = 5/(32\pi), \alpha_3 = 0, \beta_3 = 45/(128\pi), \gamma_3 = 89/(384\pi)$ .

Из условия (3.2) следует, что в критической точке  $c$  рассматриваемое периодическое движение шара вдоль вертикали изоэнергетически орбитально устойчиво, а в точке  $d$  — неустойчиво.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
4. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
5. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
7. Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.

Москва

Поступила в редакцию  
4.VI.1996