

УДК 531.3; 531.66

© 1997 г. А.П. Иванов

К ЗАДАЧЕ О СТЕСНЕННОМ УДАРЕ

Обсуждаются общие закономерности соударения двух твердых тел при некоторых ограничениях на их перемещения и возможность корректного применения для его описания различных математических моделей. Рассматриваются два типа ограничений. Первый из них – двусторонние связи – обусловлен закреплением одной или двух точек тела. Показано, что при наличии сухого трения удар может иметь стопорный характер, т.е. контактные напряжения не исчезают. Получены условия стопорного удара в терминах геометрии точек крепления. Другая особенность соударения тел с закрепленными точками состоит в изменении физического смысла коэффициента восстановления: он зависит от конфигурации системы. Второй тип составляют задачи об ударе при наличии односторонней связи – опоре одного из тел на массивное основание; выяснено, что сухое трение в опоре может приводить к ситуациям несуществования или неединственности решения, аналогичным известным парадоксам Пенлеве. Делается вывод: для адекватного описания явления стесненного удара необходимо учитывать податливость соударяемых тел не только непосредственно в ударной паре, но и в точках контакта с другими телами. В общем случае использование волновой теории для описания стесненного удара приводит к необозримым математическим трудностям и на первый план выдвигаются упрощенные модели деформаций, приводящие к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены примеры: удар физического маятника о стенку и задача Кориолиса о соударении бильiardных шаров.

Соударение твердых тел представляет собой совокупность различных физических процессов, полный учет которых не представляется возможным. В динамике задача об ударе сводится к определению импульсов ударных сил. Исторически сформировались три подхода к решению этой задачи: классическая стереомеханика, основы которой были заложены Гюйгенсом и Ньютоном, волновая теория удара, восходящая к работам Сен-Венана конца прошлого века, и метод деформируемых элементов, применявшийся еще Даламбером [1]. Выбор того или иного метода для решения конкретной задачи определяется, с одной стороны, требованиями к реалистичности и точности результата, с другой стороны, – вычислительными возможностями.

Аналогичные подходы используются для решения более сложной и важной на практике задаче об ударе в *системе твердых тел*. Из результатов общетеоретического характера можно выделить обобщение Аппелем уравнений Лагранжа на случай части переменных при ударе без трения [2]. Этого, однако, недостаточно для полного решения, и даже в простейших случаях требуются те или иные дополнительные предположения. В стереомеханике распространено [3] использование в задаче об ударе в системе связанных тел гипотезы об абсолютной жесткости наложенных на систему связей по сравнению с жесткостью контакта непосредственно в ударной паре. Такое предположение может привести не только к значительным погрешностям, но в некоторых случаях и к невозможности однозначного решения [4]. Логический изъян, скрытый в этой гипотезе, состоит в неравноправности различных точек одного и того же тела: в одной из них, соответствующей ударному контакту, допускаются локальные деформации и энергетические потери, а в другой, закрепленной с другими телами, данные явления не учитываются.

По сравнению с таким аксиоматическим подходом, волновая теория и дискретные модели в той или иной мере связаны с учетом деформаций. К числу решенных таким методом относится задача Буссинеска об ударе твердого тела по стержню, противоположный конец которого жестко закреплен [5].

1. Оценка импульса при соударении свободных твердых тел. Обозначим Q, M_Q главный вектор и главный момент активных сил, приложенных к телу, F, M_F — главный вектор и главный момент реакций, возникающих при контакте с другими твердыми телами. Теоремы о движении центра масс и об изменении кинетического момента выражаются формулами

$$m\dot{V} = Q + F, \quad (J\Omega) \dot{=} M_Q + M_F \quad (1.1)$$

где m — масса, J — центральный тензор инерции, V — скорость центра масс G , Ω — угловая скорость тела.

Удар будем описывать разностными уравнениями, полученными из (1.1) путем интегрирования; при этом изменения координат, а также интегралы от "обычных" сил пренебрежимо малы [2]:

$$m\Delta V = I, \quad J\Delta\Omega = M_I \quad (1.2)$$

$$I = \int_{t_0}^t F(s) ds, \quad M_I = \int_{t_0}^t M_F(s) ds$$

Наиболее известна задача о соударении двух свободных твердых тел в случае единственной точки контакта C . Обозначая F ударную силу, действующую на первое тело со стороны второго, представим уравнения (1.2) в виде

$$m_1\Delta V_1 = I, \quad m_2\Delta V_2 = -I, \quad J_1\Delta\Omega_1 = G_1C \times I, \quad J_2\Delta\Omega_2 = -G_2C \times I \quad (1.3)$$

Число неизвестных можно понизить на две единицы, задавая формулу для вычисления касательной составляющей реакции F_t :

$$F_t = f(F_n, V_C), \quad F_n = (F, n), \quad F_t = F - F_n n \quad (1.4)$$

$$V_C = (V_1 + \Omega_1 \times G_1C) - (V_2 + \Omega_2 \times G_2C)$$

В формулах (1.4) n — нормаль к поверхностям тел в точке C , направленная в сторону первого из них, V_C — относительная скорость в этой точке; вид функции f зависит от характера трения. В частности, в случае абсолютно гладких поверхностей $f \equiv 0$ сухое кулоново трение описывается соотношениями [6]

$$F_t = -\mu \frac{V_t}{|V_t|} F_n, \quad \text{если } V_t \neq 0 \quad (1.5)$$

$$|F_t| \leq \mu F_n, \quad \text{если } V_t = 0$$

где V_t, V_n — касательная и нормальная составляющие относительной скорости, μ — коэффициент трения скольжения (для простоты считаем его равным коэффициенту трения покоя).

Вычислим приращение относительной скорости, пользуясь соотношениями (1.2), (1.3):

$$\begin{aligned} \Delta V_C &= \Delta V_1 - \Delta V_2 + \Delta\Omega_1 \times G_1C - \Delta\Omega_2 \times G_2C = \\ &= (m_1^{-1} + m_2^{-1})I + J_1^{-1}(G_1C \times I) \times G_1C + J_2^{-1}(G_2C \times I) \times G_2C \end{aligned} \quad (1.6)$$

Представим равенство (1.6) в матричной форме

$$\Delta V_C = \mathbf{B}\mathbf{I}, \quad \mathbf{B} = (m_1^{-1} + m_2^{-1})\mathbf{E}_3 + \parallel b_{ij} \parallel \quad (1.7)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{J}_k^{-1}(\mathbf{G}_k \mathbf{C} \times \mathbf{e}_i), \mathbf{G}_k \mathbf{C} \times \mathbf{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

где \mathbf{e}_i – координатные орты, \mathbf{E}_3 – единичная матрица третьего порядка.

Дифференцируя равенство (1.7) по переменной $\chi = I_n$, получим при учете (1.4) для описания удара систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с начальным условием $V_C(t_0) = V^-$. Свойства интегральных кривых для случая сухого трения (1.5) обсуждались в [6–8] и др. Для определения момента окончания удара необходимо задать граничное условие, вид которого зависит от используемой модели контактных напряжений.

В классической теории, не учитывающей деформации соударяемых тел, граничное условие включает коэффициент восстановления, равный отношению нормальных составляющих ударного импульса в двух фазах удара [6]. Построенные уравнения имеют в частных случаях (плоскопараллельное движение, удар двух шаров) аналитическое решение, а в общем случае требуется численное интегрирование. Несмотря на то, что данная модель не всегда согласуется с экспериментами [9–11], она широко применяется при исследовании систем с ударами.

Более реалистичны дискретные модели удара, к которым относится и метод деформируемых элементов. Идея последнего состоит в размещении в точке контакта воображаемого объекта с нулевой массой и диаметром, обладающего заданной зависимостью напряжений от деформаций $F(q, \dot{q})$ [1,9]. При этом граничное условие выражает неотрицательность величины F_n . Для проверки его выполнения необходимо решать систему, получаемую дифференцированием равенства (1.7) по времени:

$$\dot{V}_C = \mathbf{B}\mathbf{F} \quad (1.8)$$

Недостаток данного подхода состоит в неопределенности характеристики $F(q, \dot{q})$.

Наиболее сложна волновая теория удара, в рамках которой учитывают деформации во всем объеме соударяемых тел. Для проверки граничного условия $F_n \geq 0$ необходимо решать систему уравнений в частных производных. Данная задача решена аналитически лишь в исключительных частных случаях: коллинеарное соударение стержней или прямоугольных пластин [9, 12], а в общем случае обозримые результаты невозможно получить даже численно. Некоторые оценки показывают [13], что роль волновых явлений в формировании ударного импульса при соударении тел с невырожденными измерениями невелика.

Общим для различных моделей удара свойством является ограниченность ударного импульса, доказанная ниже.

Предложение 1. При ударе двух свободных твердых тел с гладкими или шероховатыми поверхностями импульс допускает оценку сверху вида

$$|\mathbf{I}| \leq 2|V^-|/\lambda \quad (1.9)$$

где λ – минимальное собственное значение матрицы \mathbf{B} в формуле (1.7).

Доказательство. Матрица \mathbf{B} симметрична и положительно определена, как следует из соответствующих свойств тензоров инерции \mathbf{J}_k , поэтому $\lambda > 0$.

Приращение суммарной кинетической энергии тел определяется следующей формулой Кельвина:

$$\Delta T = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^- + \mathbf{V}^+, \mathbf{I}) \quad (1.10)$$

где \mathbf{V}^- и \mathbf{V}^+ – относительная скорость в точке контакта в начале и конце удара

соответственно. При учете формулы (1.7) получаем

$$\Delta T = (\mathbf{V}, \mathbf{I}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\mathbf{I}, \mathbf{I}) \quad (1.11)$$

При механическом ударе не происходит высвобождения энергии, и кинетическая энергия не возрастает:

$$\Delta T \leq 0 \quad (1.12)$$

В пространстве $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^3$ неравенство (1.12) определяет внутренность эллипсоида, проходящего через начало координат, откуда и следует ограниченность ударного импульса. Оценка (1.9) получена для границы этого эллипсоида при учете неравенства Коши – Буняковского.

Следствие. По окончании соударения свободных твердых тел контактные напряжения отсутствуют.

Действительно, противоположная ситуация свидетельствовала бы о неограниченном росте ударного импульса.

Замечание. По аналогии с предложением 1 можно построить нижнюю оценку для ударного импульса. Для этого воспользуемся неравенством $(\mathbf{V}^+, \mathbf{n}) \geq 0$, где \mathbf{n} – орт, нормальный поверхностям соударяемых тел в точке контакта. При учете формулы (1.7) отсюда получаем

$$(\mathbf{V}^-, \mathbf{n}) + (\mathbf{B}\mathbf{I}, \mathbf{n}) \geq 0$$

Следовательно,

$$|\mathbf{I}| \geq \left| (\mathbf{V}^-, \mathbf{n}) \right| / \Lambda \quad (1.13)$$

где Λ – максимальное собственное значение матрицы \mathbf{B} .

2. Соударение тел с закрепленными точками. Перейдем к изучению соударения тел, имеющих закрепленные точки. В этом случае наряду с импульсом непосредственно в ударной паре на тела действуют ударные реакции наложенных связей. Последние можно выразить через \mathbf{I} , используя условия неподвижности точек крепления (при этом тела считаем абсолютно твердыми). В итоге получим соотношение, аналогичное (1.7):

$$\Delta \mathbf{V}_C = \mathbf{B}^* \mathbf{I} \quad (2.1)$$

Матрица \mathbf{B}^* неотрицательна. Действительно, если в формуле (1.10) положить $\mathbf{V}^- = \mathbf{0}$, то левая часть будет представлять собой кинетическую энергию, приобретаемую покоящимися телами под действием данного импульса. Следовательно,

$$(\mathbf{B}^* \mathbf{I}, \mathbf{I}) \geq 0 \quad (2.2)$$

В отличие от соударения свободных тел, матрица \mathbf{B}^* может быть вырожденной. Это объясняется тем, что не всякий импульс изменяет скорости тела с закрепленными точками. В этом случае правая часть в формуле (1.9) обращается в бесконечность, и предложение 1 не применимо к описанию стесненного удара. Существуют ситуации, когда такой удар имеет стопорный характер: относительная скорость в точке контакта исчезает, а контактные напряжения сохраняются, т.е. соударяемые тела заклиниваются. С формальной точки зрения, продолжительность стопорного удара и ударный импульс бесконечно велики.

Пример. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси и соударяющееся с массивной стенкой. Теорема об изменении кинетического момента при импульсивном движении [2] выражается формулой

$$\rho r^2 \Delta \Omega = (\mathbf{O}\mathbf{C} \times \mathbf{I}, \mathbf{e}) \mathbf{e} \quad (2.3)$$

где ρ – радиус инерции относительно оси вращения, \mathbf{e} – направляющий орт этой оси,

O – некоторая неподвижная точка. Отсюда при учете формул (1.4) получаем

$$\Delta V_C = \Delta \Omega \times OC = m^{-1} \rho^{-2} (\mathbf{e}^*, \mathbf{I}) \mathbf{e}^*, \quad \mathbf{e}^* = \mathbf{e} \times OC \quad (2.4)$$

Выберем орты \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 на поверхности стенки, а \mathbf{e}_3 – ортогонально этой поверхности (в направлении первого тела) и обозначим α_1, α_2 и α_3 координаты вектора \mathbf{e}^* . Преобразуем формулу (2.4) к виду (2.1), где

$$\mathbf{B}^* = m^{-1} \rho^{-2} \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_3 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Два собственных значения матрицы (2.5) равны нулю, а третье положительно. Стопорный удар реализуется при наличии трения (1.5), если коэффициент трения достаточно велик, чтобы предотвратить скольжение маятника по препятствию в направлении, противоположном исходному: $\alpha_3 \mu \geq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}$.

В данном примере стопорный удар оказывается возможным благодаря существованию направлений, проходящих через точку контакта и неподвижную ось: импульсивная реакция, действующая вдоль такого направления, не приводит тело в движение. Аналогичные рассуждения позволяют получить легко проверяемое необходимое условие существования стопорного удара в общем случае соударения двух тел с закрепленными точками.

Обозначим γ_j ($j = 1, 2$) множество неподвижных точек для каждого из данных тел. Это множество представляет собой единственную точку, прямую линию или все трехмерное пространство в зависимости от типа крепления.

Предложение 2. Матрица \mathbf{B}^* в уравнении (2.1) вырождена тогда и только тогда, когда существует прямая линия, проходящая через точку C и пересекающая оба множества γ_1 и γ_2 .

Действительно, направляющий вектор такой прямой очевидно является собственным вектором матрицы \mathbf{B}^* , отвечающим нулевому собственному значению.

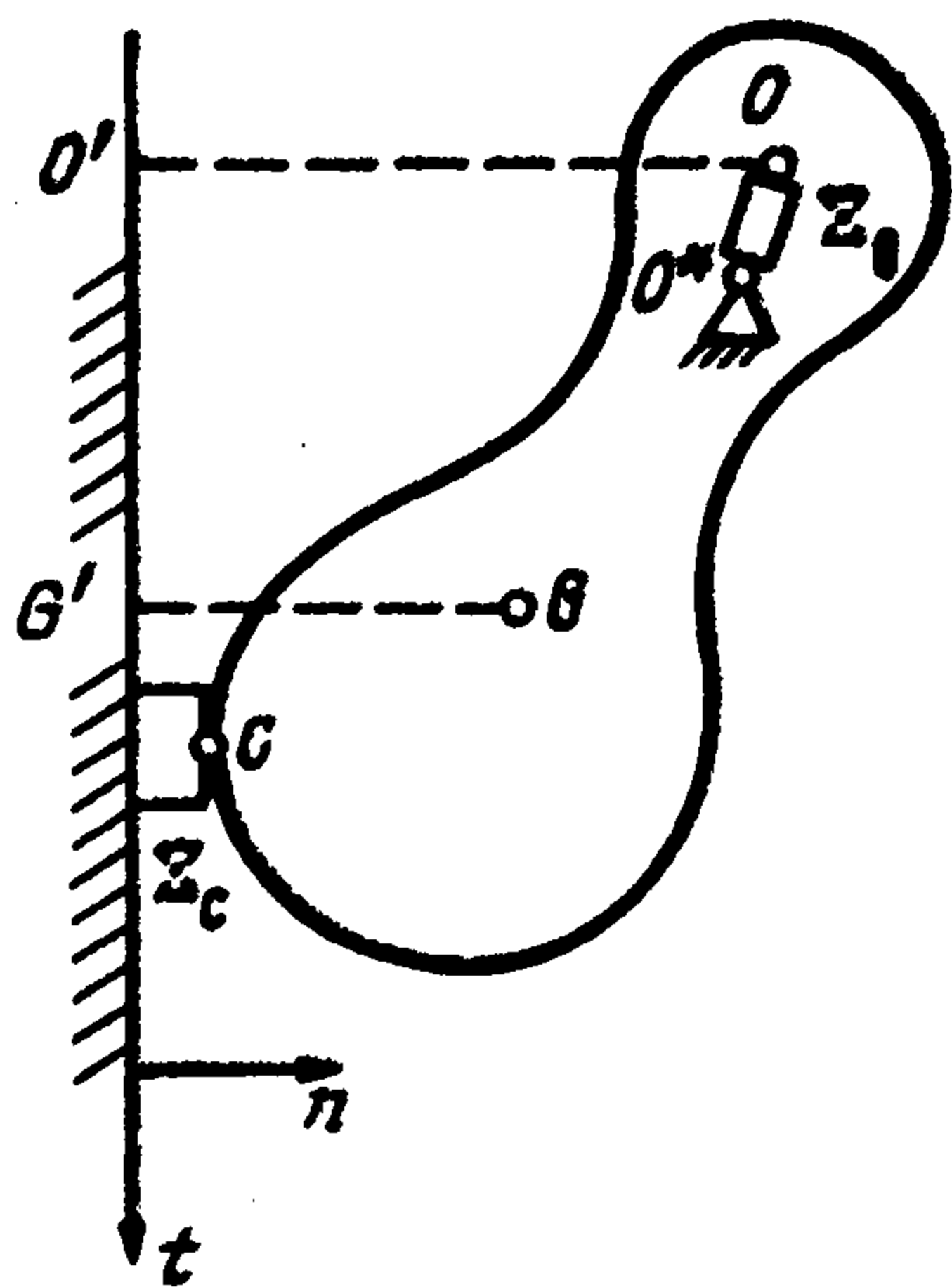
Замечание. Система (2.1) получена в предположении, что скорости закрепленных точек равны нулю. Это свойство справедливо для абсолютно твердых тел, но нарушается в деформируемых телах. Тем не менее и в этом случае вырожденность матрицы \mathbf{B}^* является необходимым условием стопорного удара, так как при этом для достаточно больших значений коэффициента трения система обладает положением равновесия при ненулевых контактных напряжениях. Для того чтобы определить, достигается ли это положение при данных условиях удара, необходимо составить его уравнения, задавшись той или иной моделью деформаций, а затем проинтегрировать их.

Другая важная особенность стесненного удара заключается в изменении смысла понятия коэффициента восстановления. В классическом смысле этот коэффициент, равный отношению нормальных компонент ударного импульса в двух фазах удара, зависит лишь от материалов, из которых сделаны соударяющиеся тела. Для объяснения наблюдаемой на практике зависимости этих коэффициентов от формы тел и скорости удара требуется учет контактных деформаций (см. например [9, 13]). Такой учет тем более необходим при решении задач о стесненном ударе (в частности, при стопорном ударе коэффициент восстановления равен нулю).

Достаточно простую для анализа модель, позволяющую выявить роль упругости крепления, можно построить при помощи деформируемых элементов.

Показателен в этом отношении следующий пример.

Пример. Рассмотрим плоскую задачу об ударе маятника о гладкую стенку. Будем считать маятник и стенку абсолютно твердыми, а точку подвеса O^* – неподвижной, но не обязательно совпадающей с фиксированной в теле точкой O . Мысленно разместим деформируемый элемент Ξ_C в точке ударного контакта и Ξ_O между точками O и O^* (фиг. 1).



Фиг. 1

получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\epsilon}_C &= -(F_C + F_O) + \rho^{-2} [GC(GC, F_C) - F_C(GC, GC) + GO(GC, F_O) - F_O(GO, GC)] \\
 m\ddot{\epsilon}_O &= -(F_C + F_O) + \rho^{-2} [GC(GO, F_C) - F_C(GO, GC) + GO(GO, F_O) - F_O(GO, GO)] \\
 \dot{\epsilon}_O(t_0) &= \dot{\epsilon}_C(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_O(t_0) = 0, \quad \dot{\epsilon}_C(t_0) = -V_C(t_0) \\
 (\epsilon_C(t_0 + \tau), n) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если функции F_C, F_O заданы, то решение задачи об ударе сводится к интегрированию системы (2.8), которое в общем случае может быть выполнено лишь численно. В результате будут найдены скорости $V_C(t_0 + \tau)$ и $V_O(t_0 + \tau)$ двух точек тела в конце удара. Отсюда можно определить распределение скоростей во всех точках тела, решая алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
 V(t_0 + \tau) + \Omega(t_0 + \tau) \times GC &= V_C(t_0 + \tau) \\
 V(t_0 + \tau) + \Omega(t_0 + \tau) \times GO &= V_O(t_0 + \tau)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Наличие ненулевой скорости в точке подвеса свидетельствует о продолжении вибраций в окрестности этой точки. Эти вибрации быстро затухают, при этом кинетическая энергия тела уменьшается. Данный процесс можно рассматривать как быстрое торможение точки O тела. Таким образом, по окончании удара тело вновь может рассматриваться как маятник.

При выполнении условий

$$F_C \perp GO, \quad \rho^2 + (GO, GC) = 0 \tag{2.10}$$

деформация и ударная реакция в точке подвеса отсутствуют [14].

Так как опора гладкая, то первое условие (2.10) означает, что точка подвеса находится на том же расстоянии от стенки, что и центр инерции. Второе условие накладывает ограничение на положение точек контакта.

Если хотя бы одно из равенств (2.10) не выполнено, для решения задачи об ударе маятника необходимо численное интегрирование системы (2.8). В результате определяются значения $\epsilon'_{O\tau}(t_0 + \tau)$, $\epsilon'_{Cn}(t_0 + \tau)$ и $\epsilon'_{On}(t_0 + \tau) = 0$. Затем можно рассчитать распределение скоростей во всех точках тела, решая систему (2.9), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{aligned}
 V_{Gn} + (GC, t)\Omega &= V_{Cn} = -\epsilon'_{Cn}(t_0 + \tau) \\
 V_{Gn} + (GO, t)\Omega &= V_{On} = -\epsilon'_{On}(t_0 + \tau) \\
 V_{Gt} - (GO, n)\Omega &= V_{Ot} = -\epsilon'_{Ot}(t_0 + \tau)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где n и t – векторы, нормальный и параллельный к поверхности препятствия.

Решение выглядит так

$$\Omega(t_0 + \tau) = [\varepsilon'_{O_n}(t_0 + \tau) - \varepsilon'_{C_n}(t_0 + \tau)] / [(\mathbf{GC}, \mathbf{t}) - (\mathbf{GO}, \mathbf{t})] \quad (2.12)$$

$$V_{G_t} = (\mathbf{GO}, \mathbf{n})\Omega - \varepsilon'_{O_t}(t_0 + \tau), \quad V_{G_n} = -(\mathbf{GO}, \mathbf{t})\Omega - \varepsilon'_{O_n}(t_0 + \tau)$$

Диссипацию энергии при остановке точки O рассчитываем по формулам (1.10):

$$\Delta T = -\frac{1}{2}(V_{O_t}^2 + V_{O_n}^2) + \frac{1}{2}[(\mathbf{GO}, \mathbf{n})V_{O_t} - (\mathbf{GO}, \mathbf{t})V_{O_n}]^2 / \rho_0^2 \quad (2.13)$$

где ρ_0 – радиус инерции маятника относительно точки подвеса.

Рассмотрим частный случай этой задачи, полагая $m = 1$, $|GO| = 1$, $|G'C| = 1$ (причем $(\mathbf{GO}, \mathbf{GC}) = -1$), $|GG'| = |OO'|$, где G' и O' – проекции точек G и O соответственно на препятствие (см. фиг. 1). Характеристики деформируемых элементов примем линейными, полагая

$$\mathbf{F}_C = c_1(\varepsilon_C, \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad \mathbf{F}_O = c_2\varepsilon_O \quad (2.14)$$

Так как стенка абсолютно гладкая, то в уравнения (2.8) не входит переменная ε_{C_t} ; кроме того, ввиду ортогональности векторов \mathbf{OG} и \mathbf{F}_C имеем $\varepsilon_{O_t} = 0$. Поэтому порядок системы (2.8) можно понизить до четвертого и представить ее в виде

$$\varepsilon'_{O_n} = -\varepsilon_{O_n}(1 + \rho^{-2}) - \sigma\varepsilon_{C_n}(1 - \rho^{-2}) \quad (2.15)$$

$$\varepsilon'_{C_n} = -\varepsilon_{O_n}(1 - \rho^{-2}) - \sigma\varepsilon_{C_n}(1 + \rho^{-2}), \quad \sigma = c_1 / c_2$$

$$\varepsilon_{O_n}(t_0) = \varepsilon_{C_n}(t_0) = 0, \quad \varepsilon'_{O_n}(t_0) = 0, \quad \varepsilon'_{C_n}(t_0) = 1, \quad \varepsilon_{C_n}(t_0 + \tau) = 0$$

На фиг. 2 представлены графики зависимости относительной потери энергии $\Delta T/T_0$ от отношения жесткостей σ для двух значений параметра ρ . Расчеты показывают, что для $\rho = 0,5$ наибольшая потеря происходит при $\sigma = 1$ (около 36% всей кинетической энергии маятника), а для $\rho = 2$ – также при $\sigma = 1$ (около 53%). При значениях ρ из интервалов $(0; 0,3)$, $(0,7; 1,4)$, $(3; +\infty)$ для $\sigma \in (0; 5)$ энергетические потери не превосходят 15%.

3. Соударение при наличии идеальной односторонней связи. Другой тип задачи о стесненном ударе связан с наличием в системе некоторых односторонних связей. Ограничимся обсуждением простейшей проблемы такого рода: соударение двух твердых тел, одно из которых свободно, а второе соприкасается в одной из своих точек A с некоторой неподвижной поверхностью (в начальный момент удара тело может покоиться, катиться по поверхности или скользить по ней).

Будем обозначать реакцию опоры \mathbf{F}^* . По аналогии с (1.3), уравнения импульсного движения выглядят так:

$$m_1\Delta\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{J}_1\Delta\Omega_1 = \mathbf{G}_1\mathbf{C} \times \mathbf{I} \quad (3.1)$$

$$m_2\Delta\mathbf{V}_2 = -\mathbf{I} + \mathbf{I}^*, \quad \mathbf{J}_2\Delta\Omega_2 = -\mathbf{G}_2\mathbf{C} \times \mathbf{I} + \mathbf{G}_2\mathbf{A} \times \mathbf{I}^*$$

где A – точка контакта с опорой. Односторонний характер связи выражается неравенством

$$(\mathbf{F}^*, \mathbf{N}) \geq 0 \quad (3.2)$$

выражающим неотрицательность нормальной составляющей реакции поверхности (\mathbf{N} – нормаль в точке A). Неравенство (3.2) означает отсутствие адгезионного прилипания тела к поверхности.

Единственное условие (3.2), очевидно, недостаточно для определения зависимости реакции плоскости от \mathbf{F} , и необходимы некоторые дополнительные допущения. При классическом подходе считают [2, 15], что нормальная составляющая ускорения в

точке A необходимо неотрицательна, причем наличие ненулевой реакции в этой точке свидетельствует о сохранении контакта:

$$(\dot{V}_A, N) \geq 0, \quad F^*(\dot{V}_A, N) \equiv 0 \quad (3.3)$$

Равенство в (3.3) часто называют условием дополнителности.

Задавая характер трения в точках A и C , получаем модель стесненного удара абсолютно твердых тел.

Обсудим пригодность этой модели для решения задач механики.

Преобразуем систему (3.1) к виду

$$\dot{V}_C = \mathbf{B}\mathbf{F} - \tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{F}^*, \quad \dot{V}_A = \mathbf{B}_A\mathbf{F}^* - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F} \quad (3.4)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F} = m_2^{-1}\mathbf{F} + \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{G}_2\mathbf{C} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G}_2\mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_A\mathbf{F}^* = m_2^{-1}\mathbf{F}^* + \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{G}_2\mathbf{A} \times \mathbf{F}^*) \times \mathbf{G}_2\mathbf{A}$$

Матрица \mathbf{B} определена в (1.7), штрих означает транспонирование. Заметим, что матрица \mathbf{B}_A симметрична и положительно определена.

Умножим обе части второго равенства (3.4) скалярно на \mathbf{N} :

$$(\dot{V}_A, N) = (\mathbf{B}_A\mathbf{F}^*, N) - (\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F}, N) \quad (3.5)$$

Допустим, что поверхность абсолютно гладкая, т.е. касательная составляющая реакции в точке A равна нулю (при этом может присутствовать трение в точке C контакта между телами), т.е. $\mathbf{F}^* = F_N^*\mathbf{N}$. Тогда уравнение (3.5) можно представить в виде

$$(\dot{V}_A, N) = \alpha + \beta F_N^*, \quad \alpha = -(\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F}, N), \quad \beta = (\mathbf{B}_A\mathbf{N}, N) \quad (3.6)$$

Положительность коэффициента β в уравнении (3.6) гарантирует существование единственного его решения, удовлетворяющего условиям (3.2), (3.3). Это решение выглядит так

$$F_N^* = \max\{0, -\alpha / \beta\} \quad (3.7)$$

В силу определения коэффициентов α, β зависимость F_N^* от \mathbf{F} кусочно-линейна; подставляя выражение (3.7) в первую из формул (3.4), получаем

$$\dot{V}_C = \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{F}, & \text{если } \alpha \geq 0 \\ \mathbf{B}^*\mathbf{F}, & \text{если } \alpha < 0 \end{cases}, \quad \mathbf{B}^*\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{F} - \beta^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F}, N)\tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{N} \quad (3.8)$$

Матрица \mathbf{B}^* симметрична и положительно определена. Действительно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^*\mathbf{F}, \mathbf{F}) &= (\mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{F}) - \beta^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{F}, N)^2 = m_1^{-1}F^2 + (\mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{G}_1\mathbf{C} \times \mathbf{F}), \mathbf{G}_1\mathbf{C} \times \mathbf{F}) + \\ &+ \beta^{-1} \left\{ \left[m_2^{-1} + (\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{G}_2\mathbf{A} \times \mathbf{N}), \mathbf{G}_2\mathbf{A} \times \mathbf{N}) \right] \left[m_2^{-1}F^2 + (\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{G}_2\mathbf{C} \times \mathbf{F}), \mathbf{G}_2\mathbf{C} \times \mathbf{F}) \right] - \right. \\ &\left. - \left[m_2^{-1}F_N + (\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{G}_2\mathbf{C} \times \mathbf{F}), \mathbf{G}_2\mathbf{A} \times \mathbf{N}) \right]^2 \right\} \geq m_1^{-1}F^2 \end{aligned}$$

$$(\mathbf{B}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \beta^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}, N)(\tilde{\mathbf{B}}'\mathbf{N}, \mathbf{v}) = (\mathbf{B}^*\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

По аналогии с предложением 1 можно доказать следующее утверждение.

Предложение 3. При ударе двух твердых тел с гладкими или шероховатыми поверхностями, одно из которых свободно, а второе касается гладкой массивной опоры, импульс допускает оценку сверху вида (1.9), где λ – минимальное из собственных значений матриц \mathbf{B} и \mathbf{B}^* в формуле (3.8).

Отсюда следует, что по окончании стесненного удара обсуждаемого типа контактные напряжения в точке C равны нулю.

Для решения задачи об ударе можно применить схему, рассмотренную в предыду-

щем разделе: задавшись законом трения в точке C , перейти в системе (3.8) к новой независимой переменной χ и интегрировать эту систему при заданных начальных условиях. При этом граничное условие определяется при помощи коэффициента восстановления (напомним, что система (3.8) получена в рамках классической теории удара).

Пример. Задача о соударении двух шаров на бильярдном столе решалась в [16] при учете трения между шарами, но в отсутствие трения между каждым из шаров и сукном. При этом условие дополнительности (3.3) не использовалось, зато принималась гипотеза о неизменности направления относительной скорости V_C во время удара. Исследуем данную систему описанным выше методом (попутно будет показана правомерность такого подхода, т.е. ударная реакция стола на один из шаров тождественно равна нулю). Не ограничивая общности, будем считать, что проекция вектора V^- на вертикаль N отрицательна (в противном случае изменим нумерацию шаров).

В качестве ортонормированного базиса возьмем орты n , $N \times n$ и N , тогда

$$G_1 C = -G_2 C = (R, 0, 0), \quad G_2 A = (0, 0, -R), \quad J_1 = J_2 = m\rho^2 E_3$$

где R – радиус шаров, ρ – радиус инерции (для однородного шара $\rho^2 = 0,4R^2$). Для матриц B в формуле (1.7) и B_A, \tilde{B} в (3.4) имеем следующие выражения:

$$B = \frac{2}{m} \text{diag} \left\{ 1, \frac{R^2}{\rho^2} + 1, \frac{R^2}{\rho^2} + 1 \right\}, \quad B_A = \frac{2}{m} \text{diag} \left\{ \frac{R^2}{\rho^2} + 1, \frac{R^2}{\rho^2} + 1, 1 \right\} \quad (3.9)$$

$$\tilde{B} = \frac{2}{m} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -R^2/\rho^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

По сделанному предположению, в начальный момент удара $F_N > 0$, поэтому первый шар не испытывает ударной реакции со стороны стола, кроме того, $\alpha = -F_N/m < 0$, и в соответствии с формулой (3.8) изменение относительной скорости в точке C определяется матрицей

$$B^* = \frac{2}{m} \text{diag} \left\{ 2, 2\frac{R^2}{\rho^2} + 2, 2\frac{R^2}{\rho^2} + 1 \right\} \quad (3.10)$$

Трение скольжения описывается первой из формул (1.5):

$$F = \left(1, -\mu V_2 (V_2^2 + V_3^2)^{-1/2}, -\mu V_3 (V_2^2 + V_3^2)^{-1/2} \right) F_n \quad (3.11)$$

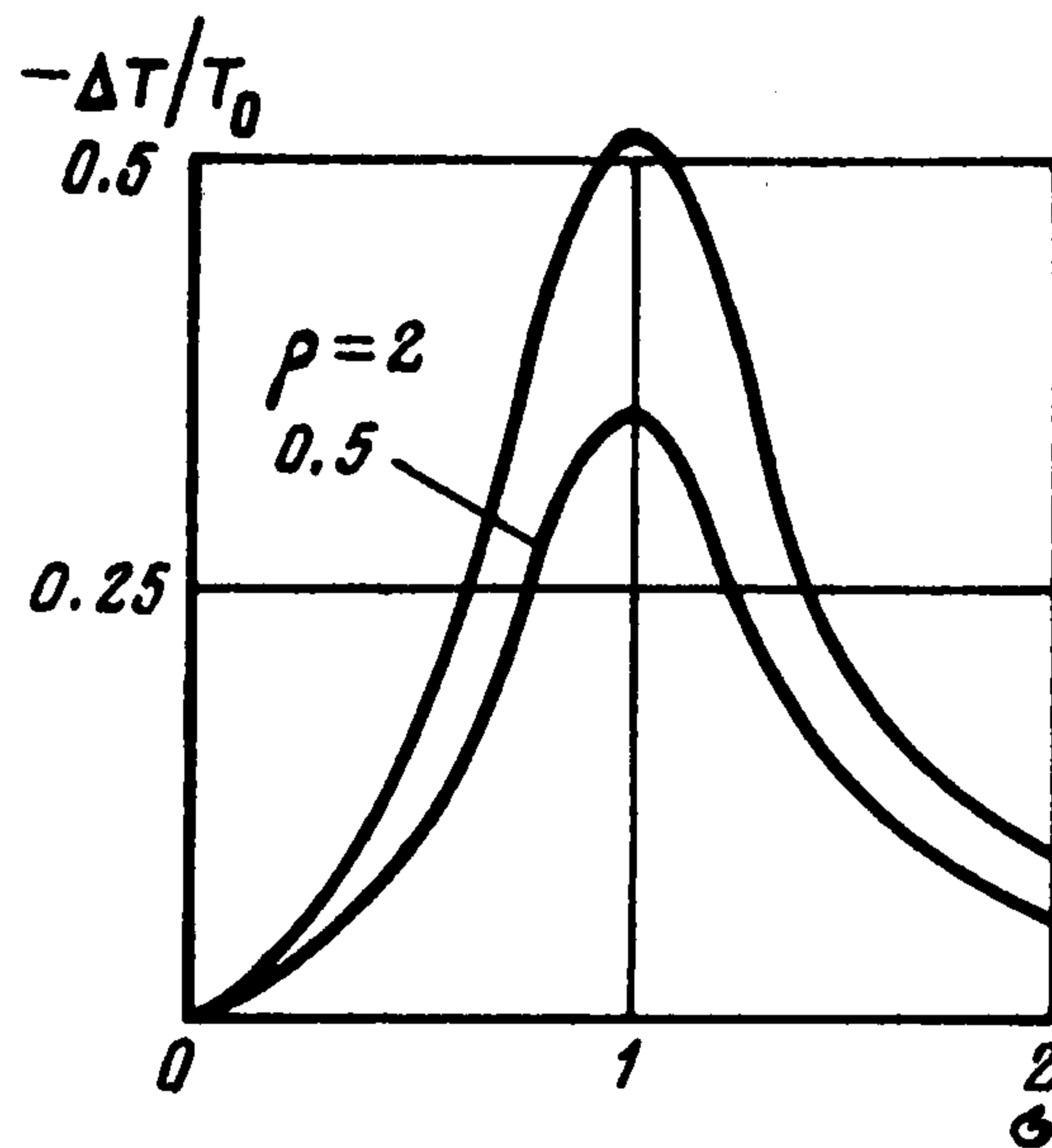
$$V_1 = (V_C, n), \quad V_2 = (V_C, N \times n), \quad V_3 = (V_C, N)$$

Переходя в системе (3.8) к независимой переменной $\chi = I_n$, представим ее для случая однородных шаров в виде (штрихом обозначено дифференцирование по χ):

$$mV_1' = 2, \quad mV_2' = -7\mu V_2 (V_2^2 + V_3^2)^{-1/2}, \quad mV_3' = -7\mu V_3 (V_2^2 + V_3^2)^{-1/2} \quad (3.12)$$

Перейдем в системе (3.12) к полярным координатам r, φ , полагая $V_2 = r \sin \varphi, V_3 = r \cos \varphi$ (таким образом, величина r равна модулю касательной составляющей относительной скорости между шарами в точке их контакта, φ – угол между этой составляющей и вертикалью):

$$r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi = -6\frac{\mu}{m} \cos \varphi, \quad r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi = -7\frac{\mu}{m} \sin \varphi$$



Фиг. 2

Отсюда получаем окончательно

$$V_1' = \frac{2}{m}, \quad r' = -\frac{\mu}{m}(6 + \sin^2 \varphi), \quad r\varphi' = -\frac{1}{2m}\mu \sin 2\varphi \quad (3.13)$$

Как видно из третьего уравнения (3.13), угол φ остается постоянным лишь в двух случаях: $\varphi = \pm\pi$ (вектор относительной скорости лежит в вертикальной плоскости, содержащей центры шаров; так будет, в частности, при прямом ударе катящегося без скольжения шара по неподвижному) или $\varphi = \pm\pi/2$ (вектор относительной скорости горизонтален). В общем случае угол φ возрастает по абсолютной величине, так что вектор V_C стремится занять направление, противоположное N . При этом $F_N > 0$, тогда в формуле (3.6) $\alpha < 0$ и уравнения (3.13) описывают ход удара вплоть до его окончания. Исходя из этих уравнений, можно сделать некоторые качественные выводы о характере удара.

Во-первых, величина r' отрицательна. Следовательно, относительное проскальзывание шаров всегда замедляется и в случае остановки более не возобновляется. Во-вторых, в момент прекращения скольжения (если скольжение прекращается) $\varphi = \pm\pi$, т.е. вектор V_C направлен вертикально вниз.

Заметим, что решение системы (3.13) можно свести к квадратурам. Для этого разделим второе уравнение на третье и проинтегрируем полученное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получим

$$r = r_0 \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right)^6 \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \right)^{-7} \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в третью из формул (3.13), получим уравнение, из которого можно определить (в неявной форме) зависимость φ от I_n . Первое уравнение позволяет определить величину I_n из граничного условия

$$I_n = -\frac{1+e}{2} V_n^-$$

где e – коэффициент восстановления.

Таким образом, построено в замкнутой форме решение задачи Кориолиса.

Можно сделать вывод: обсуждаемая задача о соударении двух твердых тел при наличии дополнительной идеальной односторонней связи имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (3.2), (3.3).

Проверим реалистичность этого решения при помощи простого эксперимента.

Поставим один из шаров к борту и ударим по нему другим шаром в точке, противоположной этому борту (вместо бильiardных шаров можно использовать пару монет на гладком столе, одна из которых соприкасается со стенкой). В соответствии со вторым условием (3.3), неподвижный до удара шар должен остаться неподвижным. На практике имеем иной результат: шар отойдет от борта.

Данный результат можно получить, учитывая упругие деформации при ударе. Для этого можно поместить деформируемые элементы в точки контакта двух шаров и шара со стенкой и составить дифференциальные уравнения импульсного движения по аналогии с предыдущим разделом (см. также [14]). Численные расчеты, проведенные для упругого удара двух идентичных шаров о существенно более жесткую стенку приводят к следующему результату: скорость отскока бьющего шара составляет около девяносто шести процентов его начальной скорости V , а неподвижный до удара шар отскакивает от стенки со скоростью $0,28V$.

Экспериментальная проверка решения задачи Кориолиса затруднительна, поскольку коэффициент трения между бильiardными шарами весьма мал (по данным [16], он приблизительно равен 0,03). Численное решение, построенное методом деформируемых элементов, показывает, что направление скорости скольжения в общем случае переменна. Следовательно, выдвинутая в [16] гипотеза не подтверждается.

4. Соударение тел, одно из которых опирается на шероховатую поверхность. В отличие от задачи, рассмотренной в разд. 3 и имеющей единственное решение в рамках классической теории удара, задача о соударении свободного твердого тела с телом, имеющим точку контакта с шероховатой опорой, в некоторых случаях некорректна. Данный парадокс вполне аналогичен известным парадоксам Пенлеве в системах с

сухим трением [17]. Для выяснения его сути попытаемся составить определяющее уравнение, аналогичное (3.8), при наличии в опоре сухого трения типа (1.5) с коэффициентом μ^* :

$$\mathbf{F}_T = -\mu^* \frac{\mathbf{V}_T}{|\mathbf{V}_T|} F_N, \quad \text{если } \mathbf{V}_T \neq \mathbf{0} \quad (4.1)$$

$$|\mathbf{F}_T| \leq \mu^* F_N, \quad \text{если } \mathbf{V}_T = \mathbf{0}$$

Индексы N, T отвечают нормальной и касательной составляющим вектора в точке A . Необходимо рассмотреть следующие четыре возможных типа движения этой точки.

1°. Отрыв тела от поверхности характеризуется соотношениями $\mathbf{F}^* = \mathbf{0}, (\dot{\mathbf{V}}_A, \mathbf{N}) > 0$. При этом вследствие (3.6) коэффициент α положителен.

2°. При качении тела по поверхности выполняются условия $\mathbf{V}_A = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{V}}_A = \mathbf{0}, F_N^* \geq 0, |\mathbf{F}_T| \leq \mu^* F_N^*$. Приравнивая правую часть второй формулы (3.4) к нулю, получим

$$\mathbf{B}_A \mathbf{F}^* = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{F} \quad (4.2)$$

По определению, матрица \mathbf{B}_A симметрична и положительно определена, поэтому уравнение (4.2) имеет единственное решение $\mathbf{F}^* = \mathbf{B}_A^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{F}$.

3°. Если тело скользит по опоре, т.е. $\mathbf{V}_T \neq \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{F}^* = F_N^* \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{N} - \mu^* \mathbf{e}_T, \quad \mathbf{e}_T = \mathbf{V}_T / |\mathbf{V}_T| \quad (4.3)$$

Подставляя выражение (4.3) в формулу (3.5), получаем уравнение вида (3.6), в котором величина α остается без изменения, а

$$\beta = (\mathbf{B}_A \mathbf{l}, \mathbf{N}) \quad (4.4)$$

4°. Переход от качения к скольжению в направлении \mathbf{e}_T происходит при выполнении следующих условий:

$$F_N^* \geq 0, \quad \kappa \mathbf{e}_T = F_N^* \mathbf{B}_A (\mathbf{N} - \mu^* \mathbf{e}_T) - \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{F} \quad (4.5)$$

где κ – некоторое положительное число. Здесь правая часть представляет собой величину $\dot{\mathbf{V}}$, вычисленную по формуле (3.4) при учете (4.3). Векторное равенство (4.5) содержит три неизвестных величины: κ, F_N^* и угол между ортом \mathbf{e}_T и вектором \mathbf{p} ; поэтому в принципе задача определения направления проскальзывания может иметь единственное решение.

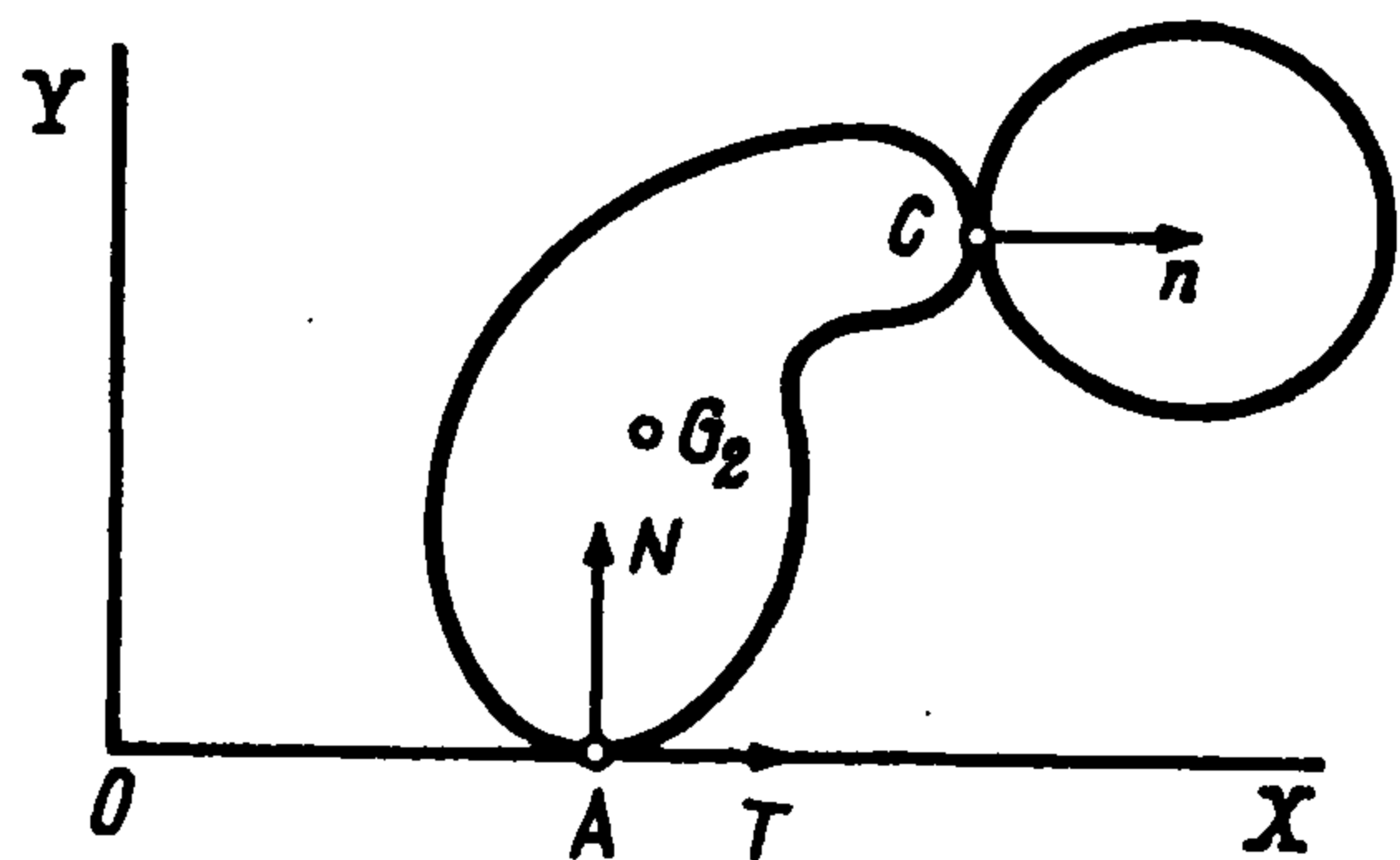
Выясним, какие из перечисленных типов движений могут иметь место при данных условиях удара. Вначале допустим, что в начальный момент второе тело скользит по опоре. Если коэффициент (4.4) положителен, то уравнение (3.6) имеет единственное решение (3.7) (в зависимости от знака величины α получаем случаи 1 и 3). В случае $\beta < 0$ уравнение (3.6) не имеет решений, согласующихся с (3.3) (если $\alpha < 0$), либо имеет сразу два таких решения (если $\alpha > 0$).

При отсутствии проскальзывания в точке A наряду со случаями, когда существует единственное решение первого, второго или четвертого типов, возможно существование одновременно решений всех этих типов сразу. Данная ситуация аналогична парадоксам движения твердого тела по шероховатой опоре, для плоского случая рассмотренной в [18], где получены и условия корректности.

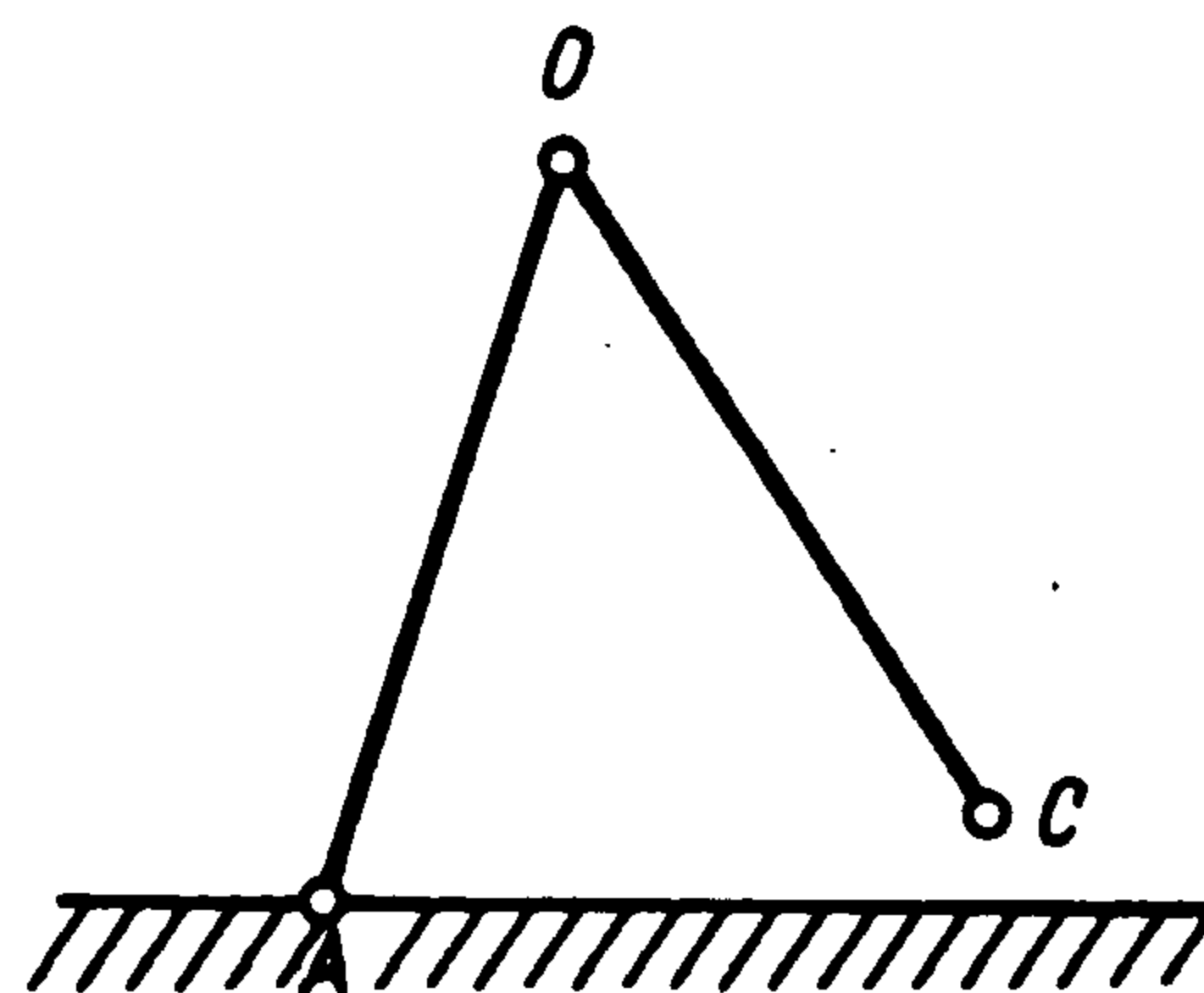
Не вдаваясь в подробности весьма громоздкого анализа, отметим лишь, что обсуждаемая задача не всегда может быть решена в рамках классической теории удара. Для решения парадоксов следует отказаться от условий (3.3) и построить модель удара,

учитывающие деформации в обеих точках A и C . Анализ таких моделей показывает, что в парадоксальных ситуациях неединственности решения истинным следует считать отрыв от опоры, при этом ударный импульс в точке C можно рассчитать методами стереомеханики. Что же касается случая, когда решение, согласующееся с (3.3), не существует, не обойтись без учета деформаций.

Пример. Рассмотрим удар катящегося бильярдного шара по неподвижному при учете шероховатости шаров и стола. Данная задача рассматривалась [19] на основе условия дополненности (3.3) в сочетании с гипотезой Кориолиса о неизменности направления скольжения в точке C . Как отмечалось в предыдущем разделе, данные допущения совместны лишь в простейшем частном случае прямого удара.



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведем исследование по описанной выше схеме (т.е. не используя гипотезу Кориолиса).

В начальный момент удара величина $\alpha = -F_N/m$ отрицательна, причем $V_A = 0$. В зависимости от величины μ^* второй шар будет скользить по опоре (четвертый случай) или катиться по ней (второй случай). Расчеты показывают, что при контакте с опорой во всех случаях 2–4 необходимо $F_3^* = F_3$. При качении $F_1^* = \frac{2}{7}F_1 - \frac{5}{7}F_3$, $F_2^* = \frac{2}{7}F_2$, причем $(\mu^* F_3^*)^2 \geq F_1^{*2} + F_2^{*2}$.

Проскальзывание произойдет, если последнее неравенство имеет противоположный смысл, при этом начальное направление скольжения противоположно вектору $(\frac{2}{7}F_1 - \frac{5}{7}F_3, \frac{2}{7}F_2, 0)$.

При скольжении в соответствии с (4.3) будет $F^* = F_3 l$.

В рассматриваемом примере $\beta = 1/m > 0$, потому задача определения зависимости F^* от F решается однозначно.

По сравнению с рассмотренным в предыдущем разделе случаем гладкой опоры, обсуждаемая задача обладает существенным новым свойством: относительное ускорение в точке C контакта шаров зависит не только от F , но и от относительной скорости в точке A контакта второго шара со столом. В частности, при скольжении в точке A выполняются уравнения (3.4), где $F^* = F_3 l$. Уравнение для нормальной составляющей скорости V_C отделяется, а оставшуюся нелинейную систему четвертого порядка можно преобразовать к полярным координатам, полагая (как и выше) $V_2 = r \sin \varphi$, $V_3 = r \cos \varphi$, а также $e_T = (r^* \cos \xi, r^* \sin \xi, 0)$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} mr' &= -\mu(6 + \sin^2 \varphi) + \mu\mu^* \cos \varphi \left(\frac{5}{2} \cos \xi \cos \varphi - \sin \xi \sin \varphi \right) \\ mr\varphi' &= -\mu \sin \varphi \cos \varphi - \mu\mu^* \cos \varphi \left(\frac{5}{2} \cos \xi \sin \varphi + \sin \xi \cos \varphi \right) \\ mr^{*\prime} &= 7\mu^* \mu \cos \varphi - \cos \xi - \mu \left(\frac{5}{2} \cos \xi \cos \varphi - \sin \xi \sin \varphi \right) \\ mr^*\xi' &= \sin \xi + \mu \left(\cos \xi \sin \varphi + \frac{5}{2} \sin \xi \cos \varphi \right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Выясним, при каких условиях угол φ сохраняет постоянное значение (т.е. выполняется гипотеза Кориолиса). Правая часть второго уравнения (4.6) обращается в нуль в трех случаях:

либо $\cos \varphi = 0$ (удар прямой), либо $\mu = 0$, либо

$$\sin \varphi + \mu^* \left(\frac{5}{2} \cos \xi \sin \varphi + \sin \xi \cos \varphi \right) = 0 \quad (4.7)$$

Для выполнения равенства (4.7) при $\mu^* \neq 0$ необходимо, чтобы и угол ξ сохранял постоянное значение. Получаем систему двух уравнений (4.7) и $\xi' = 0$ (где производная вычисляется из четвертого уравнения (4.6)) для определения значений φ , ξ при данных коэффициентах трения. Отметим, что постоянные μ и μ^* входят в эту систему линейно. Отсюда следует: каждой паре значений φ , ξ , для которой выражения в круглых скобках в уравнениях системы не вырождаются, отвечает пара значений μ , μ^* , для которой направление скольжения между шарами неизменно в ходе удара. Таким образом, алгебраическое решение, полученное в [19], правомерно лишь в некоторых исключительных частных случаях.

В частности, если $\mu = \mu^*$, то желаемое свойство достигается как при прямом ударе, так и при таком, для которого $\cos \varphi = -2/(7\mu)$, при условии, что $\mu > 2/7$ (при этом $\xi = \varphi$).

Кроме таких исключений, направление удара не сохраняется, и для решения системы (4.6) необходимо численное интегрирование.

Данная задача может быть решена в рамках классической теории, чего нельзя сказать о следующем простом примере.

Примеры. 1°. Исследуем плоское соударение двух тел (пластин), считая, что трение в точке их контакта отсутствует. Введем декартову систему координат OXY таким образом, чтобы опорная поверхность описывалась уравнением $y = 0$ и обозначим координаты векторов следующим образом:

$$G_1C = (a_1, b_1), \quad G_2C = (a_2, b_2), \quad G_2A = (a_3, b_3), \quad b_3 < 0$$

Для определенных в (1.7) и (3.4) матриц, определяющих сценарий удара, имеем следующие выражения:

$$\mathbf{B} = \left(m_1^{-1} + m_2^{-1} \right) \mathbf{E}_2 + m_1^{-1} \rho_1^{-2} \begin{vmatrix} b_1^2 & -a_1 b_1 \\ -a_1 b_1 & a_1^2 \end{vmatrix} + m_2^{-1} \rho_2^{-2} \begin{vmatrix} b_2^2 & -a_2 b_2 \\ -a_2 b_2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

$$m_2 \mathbf{B}_A = \mathbf{E}_2 + \rho_2^{-2} \begin{vmatrix} b_3^2 & -a_3 b_3 \\ -a_3 b_3 & a_3^2 \end{vmatrix}, \quad m_2 \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{E}_2 + \rho_2^{-2} \begin{vmatrix} b_2 b_3 & -a_3 b_2 \\ -a_2 b_3 & a_2 a_3 \end{vmatrix}$$

Будем считать, что нормаль \mathbf{n} горизонтальна (фиг. 3).

Сначала допустим, что в начальный момент удара второе тело скользит вправо по опоре (при этом $\mathbf{F}^* = \mathbf{0}$), по формуле (4.4)

$$m_2 \rho_2^2 \beta = a_3^2 + \rho_2^2 + \mu^* a_3 b_3 \quad (4.8)$$

Величина β в формуле (4.8) может быть отрицательной, если $a_3 > 0$, а коэффициент трения достаточно велик. При сделанных предположениях $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{n}$, $\gamma > 0$, откуда в формуле (3.6) $\alpha = \gamma m_2^{-1} \rho_2^{-2} a_3 b_2$. Следовательно, в случае $b_2 > 0$ уравнение (3.6) имеет два решения, а в случае $b_2 < 0$ – ни одного.

Пусть теперь в начальный момент $\mathbf{V}_A = \mathbf{0}$. Как показывают расчеты, при выполнении неравенств

$$a_3 < 0, \quad b_2 < 0, \quad \beta < 0, \quad \left(\rho_2^2 + b_2 b_3 \right) - b_3 a_2 \frac{\mu^* (\rho_2^2 + b_3^2) + a_3 b_3}{\rho_2^2 + a_3^2 + \mu^* a_3 b_3} < 0$$

возможно движение каждого из трех типов 1, 2 и 4.

2°. В задачах двуногой ходьбы обсуждалась [4] система, состоящая из двух шарнирно связанных звеньев ("ног"), поочередно переступающих по шероховатой опоре (фиг. 4) и предлагалось ее решение на основе условия дополненности (3.3). В результате были обнаружены парадоксальные ситуации, аналогичные рассмотренным выше. Хотя данная система несколько отличается от рассматриваемых в данном разделе, для нее можно провести аналогичное исследование и получить уравнение типа (3.6). Парадоксы возникают в случае $\beta < 0$.

Для решения указанных парадоксов можно использовать метод деформируемых элементов. Результат состоит в следующем: в случаях неединственности имеет место отрыв от опоры ($F_N^* = 0$). Случаи несуществования решения в классической модели не являются особыми при

учете деформаций, однако обладают определенной спецификой: сколь бы ни мало было отношение m_1/m_2 , деформации в точке A не малы. Качественно ситуация такая же, как в случае так называемого "тангенциального удара" [17]: удар в точке A происходит вследствие несоответствия касательных, а не нормальных скоростей. После такого удара второе тело отскакивает от опоры ("муха опрокидывает слона").

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01440).

ЛИТЕРАТУРА

1. Даламбер Ж. Динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
3. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
4. Формальский А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
6. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
7. Болотов Е.А. Об ударе двух тел при действии трения // Изв. Моск. инж. училища. 1908. Ч. 2. Вып. 2. С. 43–55.
8. Bhatt V., Koechling J. Three-dimensional frictional rigid-body impact // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 4. P. 893–898.
9. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
10. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The rebound of elastic bodies in oblique impact // Mech. Res. Comm. 1977. V. 4. № 1. P. 17–21.
11. Maw N., Barber J.R., Fawcett J.N. The role of elastic tangential compliance in oblique impact // Trans. ASME. J. Lubr. Techn. 1981. V. 103. № 1. P. 74–80.
12. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. М.: Наука, 1969. 199 с.
13. Джонсон К.Л. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
14. Иванов А.П. О кратном ударе // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 930–946.
15. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
16. Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
17. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
18. Lötstedt P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints // SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. № 2. P. 281–296.
19. Нагаев Р.Ф., Холодильник Н.А. К теории соударения бильярдных шаров // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 6. С. 48–55.

Москва

Поступила в редакцию
10.IX.1996