

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОСИММЕТРИЧНЫМ ВЫРЕЗОМ, ИМЕЮЩИМ ДВА НУЛЕВЫХ УГЛА

В продолжение работы авторов [1], посвященной решению первой основной и смешанной задач теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла, тем же методом решается вторая основная задача теории упругости для плоскости с таким же отверстием.

1. Схема решения. Вторая краевая задача для неограниченной области D заключается [2], в нахождении двух функций, аналитических в $D \setminus \{\infty\}$:

$$f(z) = \Gamma z - \frac{X + iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \frac{a}{z} + \dots, \quad g(z) = \Gamma' z + \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \frac{a'}{z} + \dots \quad (1.1)$$

где $\Gamma, \Gamma', X + iY$ – известные постоянные. Краевое условие имеет вид

$$\{\kappa f(z) - z \overline{f'(z)} - \overline{g(z)}\}|_{z=z(t)} = 2\mu(u(t) + i\nu(t)) \quad (1.2)$$

где $z = z(t), t \in [0, l]$ – уравнение граничной кривой ∂D . Будем полагать, что $u'(t)$ и $\nu'(t)$ – гельдеровы функции.

Перейдем к функции $z(\zeta)$, отображающей конформно область $E^- = \{\zeta = \xi + i\eta, |\zeta| > 1\}$ на D с соответствием $z(\infty) = \infty$ и продифференцируем обе части равенства (1.2) по t . Получим краевое условие

$$\{\kappa \overline{\Phi(\zeta)} z'(\zeta) - \overline{z'(\zeta)} \Phi(\zeta) + \overline{z(\zeta)} \Phi'(\zeta) \zeta^2 + \Psi(\zeta) z'(\zeta) \zeta^2\}|_{\zeta=e^{i\theta}} = Q(\theta) \quad (1.3)$$

$$Q(\theta) = 2i\mu[u'(t) - i\nu'(t)]|_{t=t(\theta)} e^{i\theta} |z'(e^{i\theta})|, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (1.4)$$

причем функции $\Phi(\zeta) = f'(z(\zeta)), \Psi(\zeta) = g'(z(\zeta))$ аналитичны в E^- .

Если $q(\zeta) = \bar{z}(\zeta^{-1})$ и $r(\zeta) = \bar{z}'(\zeta^{-1})$ мероморфны в E^- , то можем восстановить мероморфные функции

$$K_j(\zeta) = (-1)^j \kappa \Phi(\zeta) z'(\zeta) - r(\zeta) \Phi(\zeta) + q(\zeta) \Phi'(\zeta) \zeta^2 + \Psi(\zeta) z'(\zeta) \zeta^2, \quad j = 1, 2 \quad (1.5)$$

используя граничные значения $\operatorname{Re} K_1(\zeta)$ ($\operatorname{Re} Q(\theta)$) и $\operatorname{Im} K_2(\zeta)$ ($\operatorname{Im} Q(\theta)$), (1.3) и (1.4). Далее $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ восстанавливаются с помощью $K_j(\zeta)$ (1.5).

2. Решение задачи. Функция

$$z(\zeta) = \frac{i(b^2 \zeta^2 + 1)}{\zeta(b^2 - 1)} + \frac{\zeta(b^2 - 1)}{i(b^2 \zeta^2 + 1)}, \quad b > 1 \quad (2.1)$$

отображает E^- на D .

Используя формулы (1.5), получим

$$\begin{aligned} 2\kappa \Phi(\zeta) z'(\zeta) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(\theta)} \frac{\zeta + e^{i\theta}}{\zeta - e^{i\theta}} d\theta + A - \frac{2}{\zeta^2} \left[\frac{i}{b^2 - 1} \bar{\Gamma} - \frac{ib^2}{b^2 - 1} \bar{\Gamma}' \right] - \\ & - \frac{\kappa(X + iY)}{\pi(1 + \kappa)\zeta} - 2\bar{B} \frac{\zeta - ib}{1 + ib\zeta} - 2\bar{C} \frac{\zeta + ib}{1 - ib\zeta} - 2\bar{D} \left(\frac{\zeta - ib}{1 + ib\zeta} \right)^2 - 2\bar{E} \left(\frac{\zeta + ib}{1 - ib\zeta} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Требую $\Phi(\infty) = \Gamma$, имеем

$$A + \frac{2i}{b}\bar{B} - \frac{2i}{b}\bar{C} + \frac{2}{b^2}\bar{D} + \frac{2}{b^2}\bar{E} = \frac{2\kappa ib^2}{b^2 - 1}\Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(\theta)} d\theta \quad (2.3)$$

Согласно (1.5)

$$\Psi(\zeta) = [\zeta^2 z'(\zeta)]^{-1} [K_1(\zeta) - \kappa \Phi(\zeta) z'(\zeta) + r(\zeta) \Phi(\zeta) - q(\zeta) \Phi'(\zeta) \zeta^2] \quad (2.4)$$

причем коэффициенты при степенях $(\zeta \pm ib)^{-2}$ и $(\zeta \pm ib)^{-1}$ должны обращаться в нуль, что дает четыре уравнения:

$$\begin{aligned} D(b^2 - 1) - i\Phi(ib)b^2/2 = 0, \quad E(b^2 - 1) - i\Phi(-ib)b^2/2 = 0 \\ B + 2ibD + b\Phi(ib) = 0, \quad C - 2ibE - b\Phi(-ib) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя формулу (2.2), получим из (2.3) и (2.5) систему из 5 уравнений относительно 5 неизвестных постоянных:

$$\begin{aligned} A + \frac{2i}{b}\bar{B} - \frac{2i}{b}\bar{C} + \frac{2}{b^2}\bar{D} + \frac{2}{b^2}\bar{E} &= \frac{2\kappa ib^2}{b^2 - 1}\Gamma - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(\theta)} d\theta \\ D - b\beta[A - 2i\delta\bar{C} + 2\delta^2\bar{E}] &= b\beta R_+(b) \\ E - b\beta[A + 2i\delta\bar{B} + 2\delta^2\bar{D}] &= b\beta R_-(b) \\ B + 2ibD + 2i\beta(1 - b^2)[A - 2i\delta\bar{C} + 2\delta^2\bar{E}] &= -2i\beta(1 - b^2)R_+(b) \\ C - 2ibE - 2i\beta(1 - b^2)[A + 2i\delta\bar{B} + 2\delta^2\bar{D}] &= 2i\beta(1 - b^2)R_-(b) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{b^3(1 + b^2)^2}{4\kappa(b^4 + 1)(b^4 + b^2 + 1)}, \quad \delta = \frac{2b}{b^2 + 1} \\ R_{\pm}(b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(\theta)} \frac{\pm ib + e^{i\theta}}{\pm ib - e^{i\theta}} d\theta - \frac{2i}{b^2(b^2 - 1)}(\bar{\Gamma} - b^2\bar{\Gamma}') \mp \frac{\kappa(X + iY)}{\pi ib(1 + \kappa)} \end{aligned}$$

После нахождения постоянных функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ могут быть получены по формулам (2.2) и (2.4), соответственно.

Теперь восстановим $f(z(\zeta))$ и $g(z(\zeta))$:

$$f(z(\zeta)) = \int_1^{\zeta} \Phi(\zeta) z'(\zeta) d\zeta + f(z(1)), \quad g(z(\zeta)) = \int_1^{\zeta} \Psi(\zeta) z'(\zeta) d\zeta + g(z(1))$$

Функция $z(\zeta)$ — та же, что и в (2.1), $f(z(1))$ и $g(z(1))$ — величины, удовлетворяющие уравнению

$$\kappa f(z(1)) - \overline{g(z(1))} = 2\mu[u(t_0) + i\nu(t_0)] + z(1)\overline{\Phi(1)}$$

t_0 — значение первоначального параметра, соответствующее точке $z = z(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иваньшин Н.А., Широкова Е.А.* Решение задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла // ПММ. Т. 59. Вып. 3. С. 524–528. 1995.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Казань

Поступила в редакцию
15.V.1995