

4. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
5. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
6. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
7. Дюво Ж. Функциональный анализ и механика сплошной среды. Приложение к изучению композиционных упругих материалов с периодической структурой – гомогенизация // Теоретическая и прикладная механика. Тр. междунар. конгр. IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 323–345.
8. Каламкаргов А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 19. С. 78–147.
9. Lewinski T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure // Intern. J. Solids Structures, 1992. V. 29. N 3. P. 309–326.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
9.VI.1995

УДК 539.3

© 1997 г. И.П. Железко, Н.И. Ободан

ВТОРИЧНЫЕ ВЕТВЛЕНИЯ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Исследуется нелинейное поведение и закритическое поведение тонкостенных оболочек при неоднородных деформациях, обусловленных неравномерностью нагружения или неоднородностью конструкции. Строятся уравнения разветвления и проводится классификация особых точек для нелинейных уравнений в применении к методу Ньютона. Приводятся результаты расчета и анализ закритического поведения для цилиндрических и сферических оболочек с различными видами неоднородности. Показано, что локальные формы потери устойчивости и разрушения связаны с существованием изолированных равновесных ветвей и вторичным ветвлением нелинейных решений.

Экспериментальными исследованиями установлено [1], что закритические равновесные формы тонких оболочек можно подразделить на общие (регулярные) и локальные, когда волнообразование выражено лишь на ограниченной части поверхности. При этом граница области существования локальных закритических форм лежит ниже границы регулярных состояний. Исследование закритических состояний тонкостенных конструкций, находящихся в условиях неоднородной деформации, позволяет оценивать реальную несущую способность конструкции после выпучивания. Известные теоретические исследования закритического поведения тонкостенных конструкций посвящены преимущественно построению начальных отрезков закритических ветвей, причем в качестве форм выпучивания принимаются линейные собственные формы бифуркационной задачи для однородного докритического состояния [2]. Для случая близких критических нагрузок, соответствующих различным линейным формам выпучивания, показано, что взаимодействие соседних форм может проявиться во вторичной бифуркации закритических ветвей [3]. Такие решения получены для модели с двумя степенями свободы, соответствующими двум соседним линейным формам. Исследование вторичного ветвления с позиций полного нелинейного анализа не проводилось. Исследование локального выпучивания ограничивалось рассмотрением случая образования единичной вмятины заданной формы при нагрузках, близких к классическому критическому значению.

1. Постановка задачи и численный метод. Рассматривается геометрически нелинейная краевая задача теории оболочек при неоднородной деформации. Принимается, что квадраты углов поворота при деформации не превышают единицы. Соответствующая рассматриваемой краевой задаче вариационная задача состоит в отыскании минимума функционала

$$\begin{aligned}
S = & -\frac{1}{2Eh} \iint \left[\left(T_{11}^2 + T_{22}^2 - 2\nu T_{11}T_{22} + \frac{2}{1+\nu} T_{12}^2 \right) + \frac{12}{h^2} \left(M_{11}^2 + M_{22}^2 - 2\nu M_{11}M_{22} + \frac{1}{1+\nu} M_{12}^2 \right) \right] d\Omega + \\
& + \iint \left\{ T_{11} \frac{1}{A_1 A_2} \left[A_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1}{\partial \eta} v + A_1 A_2 \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} A_1 A_2 \vartheta_1^2 \right] + \right. \\
& + T_{22} \frac{1}{A_1 A_2} \left[A_1 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi} u + A_1 A_2 \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} A_1 A_2 \vartheta_2^2 \right] + \\
& + T_{12} \frac{1}{2 A_1 A_2} \left[A_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} + A_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi} v - \frac{\partial A_1}{\partial \eta} u + A_1 A_2 \vartheta_2 \vartheta_1 \right] + \\
& + M_{11} \frac{1}{A_1 A_2} \left[A_2 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1}{\partial \eta} \vartheta_2 \right] + M_{22} \frac{1}{A_1 A_2} \left[A_1 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi} \vartheta_1 \right] + \\
& \left. + M_{12} \frac{1}{2 A_1 A_2} \left[A_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi} + A_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \eta} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi} \vartheta_2 - \frac{\partial A_1}{\partial \eta} \vartheta_1 \right] \right\} d\Omega + \lambda \iint q d\Omega \quad (1.1)
\end{aligned}$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{R_1} u, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{R_2} v$$

Интегрирование ведется по всей поверхности оболочки, ξ, η – координатные линии, λ – параметр нагружения, R_1, R_2 – радиусы кривизны недеформированной поверхности в направлении ξ, η , A_1, A_2 – параметры Ламе срединной поверхности, h – толщина оболочки, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Отметим, что из условий стационарности функционала (1.1) следуют все разрешающие соотношения теории оболочек – уравнения совместности, упругости и равновесия, а также естественные граничные условия.

Компоненты вектора $U = \{u, v, w, T, M\}$ представляются в виде

$$\begin{aligned}
U_i(\xi, \eta) &= \sum_{r=1}^4 U_{2j+r}^i H_r(\xi) \\
U_{2j+r}^i(\eta) &= \begin{cases} U^i(\xi_j, \eta), & r=1,3 \\ \frac{\partial U^i}{\partial \xi}(\xi_j, \eta), & r=2,4 \end{cases} \quad (1.2)
\end{aligned}$$

где ξ_j – координата j -го узла на образующей оболочки, из которого исходит направляющая.

В качестве координатных функций $H_r(\xi)$ выбираются полиномы Эрмита.

Разрешающая система уравнений для функций $U_k(\eta)$ после применения процедуры Канторовича к функционалу (1.1) может быть записана в виде

$$F(U_{2j+r}^i, \eta, \lambda) = 0, \quad r=1, \dots, 4; \quad i=1, \dots, 5 \quad (1.3)$$

при условиях на границах $\eta = \eta_1, \eta_2$

$$G(A) = 0, \quad A = \{U_k^i(\eta)\} \quad (1.4)$$

При известном значении вектора A система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3) может быть проинтегрирована численно путем сведения краевой задачи (1.3), (1.4) к задаче Коши. Так что при предварительном выполнении условий (1.3) решение задачи о минимуме функционала (1.1) сводится к определению A , например методом

Ньютона

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} - \mathbf{G}_A^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{A}^{(k)}) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{G}_A = \{\partial G_i / \partial A_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

где $\mathbf{A}^{(k)}$ – k -е приближение к решению, $\mathbf{G}_A$ – матрица Якоби, n – порядок разрешающей системы уравнений. При предварительном выполнении условий (1.3), условие ветвления краевой задачи, соответствующей вариационной (1.1) имеет вид

$$\det \mathbf{G}_A = 0 \quad (1.6)$$

Тип точки ветвления (предельная точка, точка бифуркации) определяется по обращению в нуль миноров матрицы $\mathbf{G}_\lambda$, которая получается из матрицы Якоби $\mathbf{G}_A$, расширенной столбцом $\partial \mathbf{G} / \partial \lambda$.

Точка бифуркации имеется, когда $\det \mathbf{G}_A = 0$, $\text{rank } \mathbf{G}_\lambda = n$, предельная точка – когда $\det \mathbf{G}_A = 0$, $\det \mathbf{B}_{\lambda n} \neq 0$, где $\mathbf{B}_{\lambda n}$ – любой минор порядка n матрицы $\mathbf{G}_\lambda$.

Таким образом, алгоритм (1.5) одновременно с решением задачи (1.1) дает возможность определить и классифицировать точки ветвления.

2. Численное построение уравнения разветвления. В случаях, когда реализуется особая точка типа предельной, закритическая ветвь решения строится путем смены независимого параметра для продолжения решения. Когда же особая точка является точкой дифуркации, для построения закритической ветви необходимо построить уравнение разветвления [4]. Предположим, что условие $G(\mathbf{A}^\circ, \lambda^\circ) = 0$ выполнено, решение $(\mathbf{A}^\circ, \lambda^\circ)$ известно, и решение $(\mathbf{A}^\circ + \tilde{\mathbf{A}}, \lambda^\circ + \tilde{\lambda})$ соответствует закритическому. Тогда, если rank соответствующей матрицы $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{A}^\circ, \lambda^\circ, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\lambda})$, построенной для решения $(\mathbf{A}^\circ + \tilde{\mathbf{A}}, \lambda^\circ + \tilde{\lambda})$ в точке ветвления $(\mathbf{A}^\circ, \lambda^\circ)$ равен r и $\tilde{\mathbf{A}} = \{\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2\}$, где $\tilde{\mathbf{A}}_1$ – вектор порядка r , $\tilde{\mathbf{A}}_2$ – вектор порядка $n - r$, то уравнение ветвления имеет вид [4]

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{A}}_2) = (\mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \tilde{\lambda} + \mathbf{Q}_1 \mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{11}^{-1} - \mathbf{Q}_2 = 0 \quad (2.1)$$

при

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{B}_{12} \tilde{\mathbf{A}}_2 + \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{C}_1 \lambda + \mathbf{B}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_1 \quad (2.2)$$

где $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ – высшие члены разложения,

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2\}^T = \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_i(\mathbf{A}^\circ, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}}, \quad \mathbf{B}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}_i(\mathbf{A}^\circ, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\lambda})}{\partial \tilde{A}_j} \right)$$

$\mathbf{B}_{11}, \mathbf{B}_{12}$ – миноры матрицы $\mathbf{B}$ порядка r , $\mathbf{B}_{21}, \mathbf{B}_{22}$ – миноры матрицы $\mathbf{B}$ порядка $n - r$.

Полученное уравнение имеет не единственное решение относительно $\tilde{\mathbf{A}}_2$, так как не содержит линейных относительно $\tilde{\mathbf{A}}_2$ членов [4].

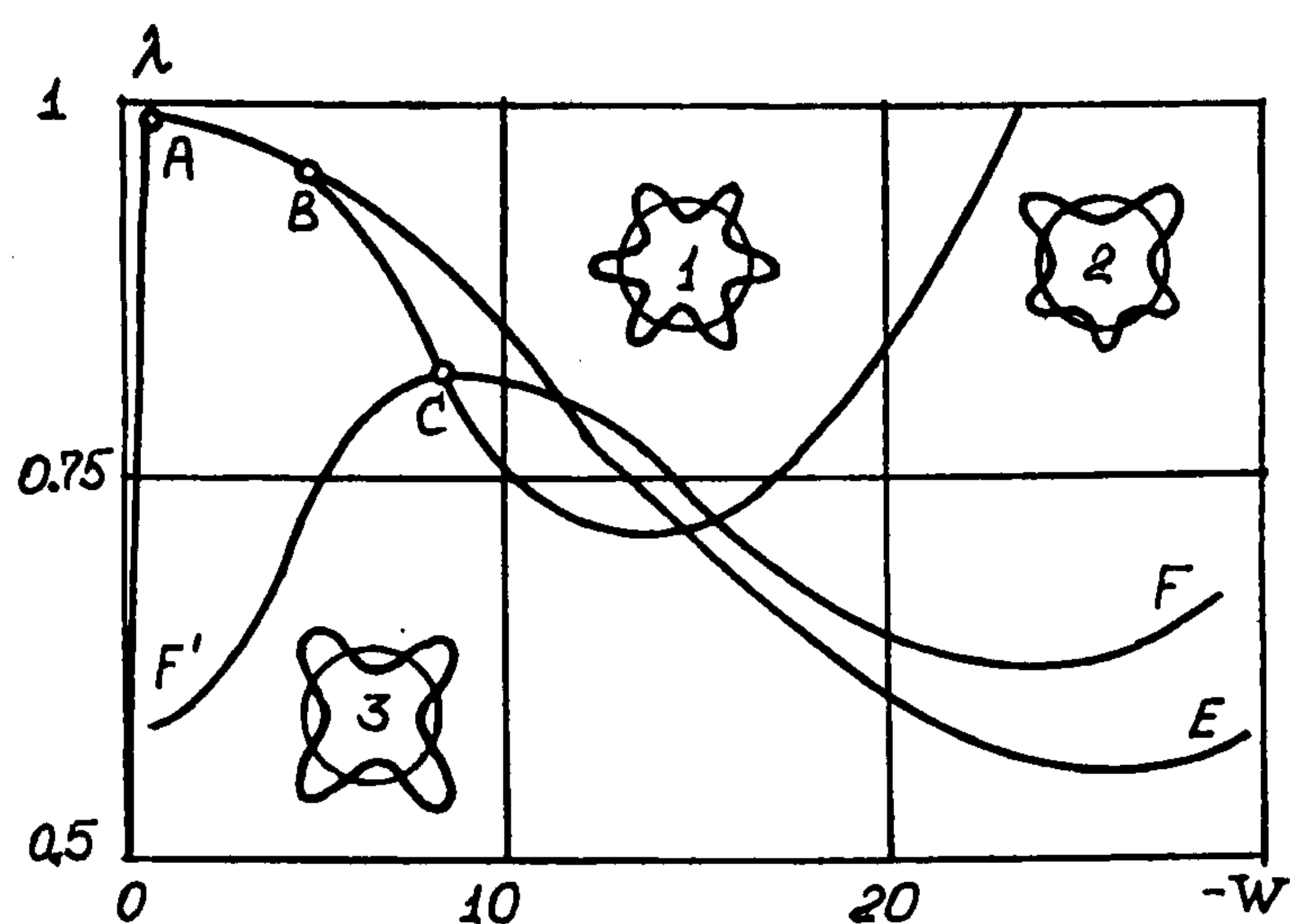
Построение решения, исходящего из точки бифуркации, осуществляется численно. Методом Ньютона из уравнения разветвления определяется вектор $\tilde{\mathbf{A}}_2$. В качестве вектора-аргумента процесса выступает вектор $\tilde{\mathbf{A}}_2$. Вектор $\tilde{\mathbf{A}}_1$ вычисляется по формуле (2.4) без учета членов высшего порядка малости. Вектор $\tilde{\mathbf{A}}_2$ определяется из системы уравнений (2.1) с помощью метода Ньютона

$$\tilde{\mathbf{A}}_2^{(k+1)} = \tilde{\mathbf{A}}_2^{(k)} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{A}}_2^{(k)}) \quad (2.3)$$

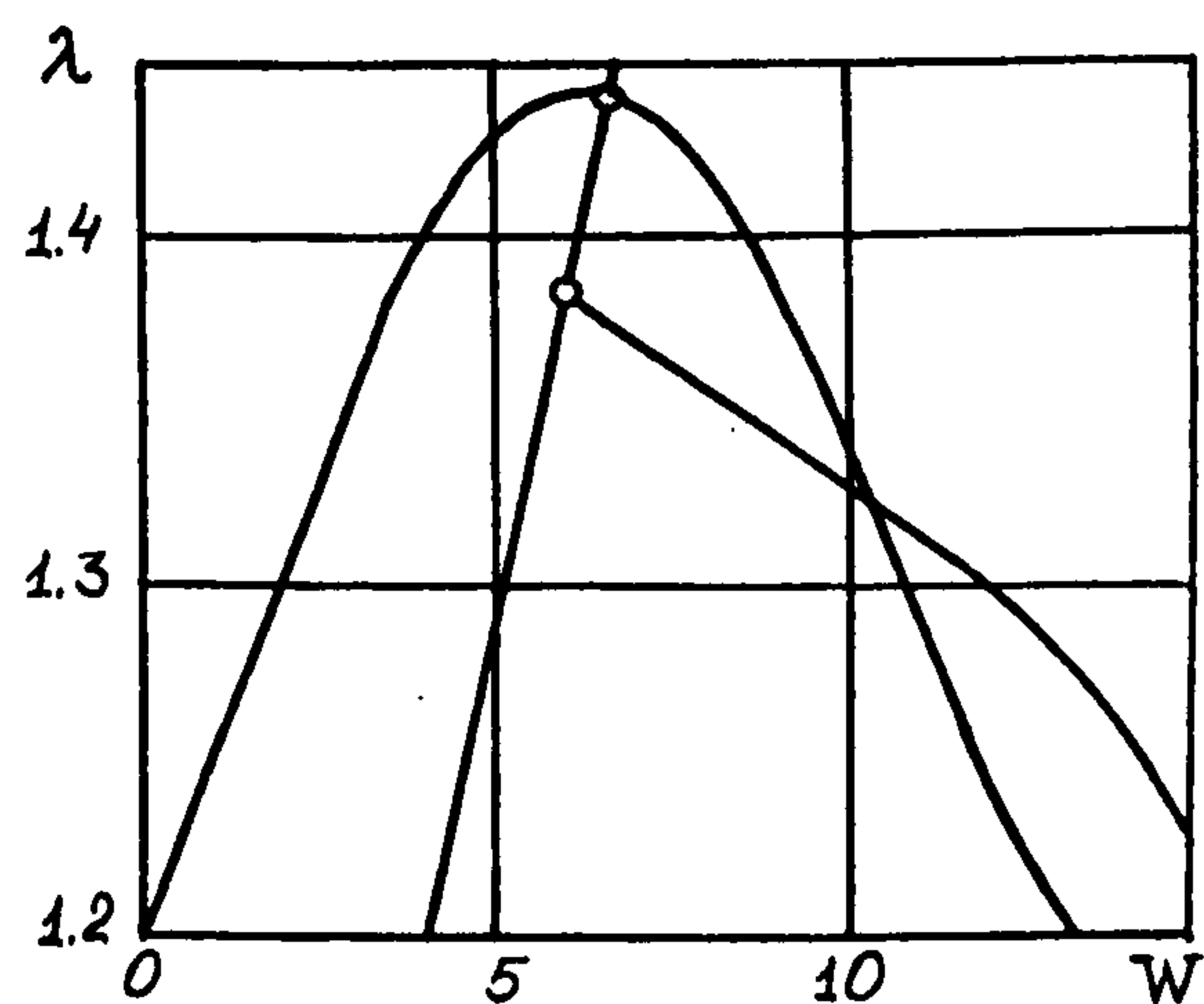
$$\mathbf{P}_{ij} = \left\{ \frac{\partial R_i(\tilde{\mathbf{A}}_2)}{\partial \tilde{A}_{2j}} \right\} \tilde{\mathbf{A}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_2^{(k)}$$

Приращению параметра нагрузки придается фиксированное малое значение.

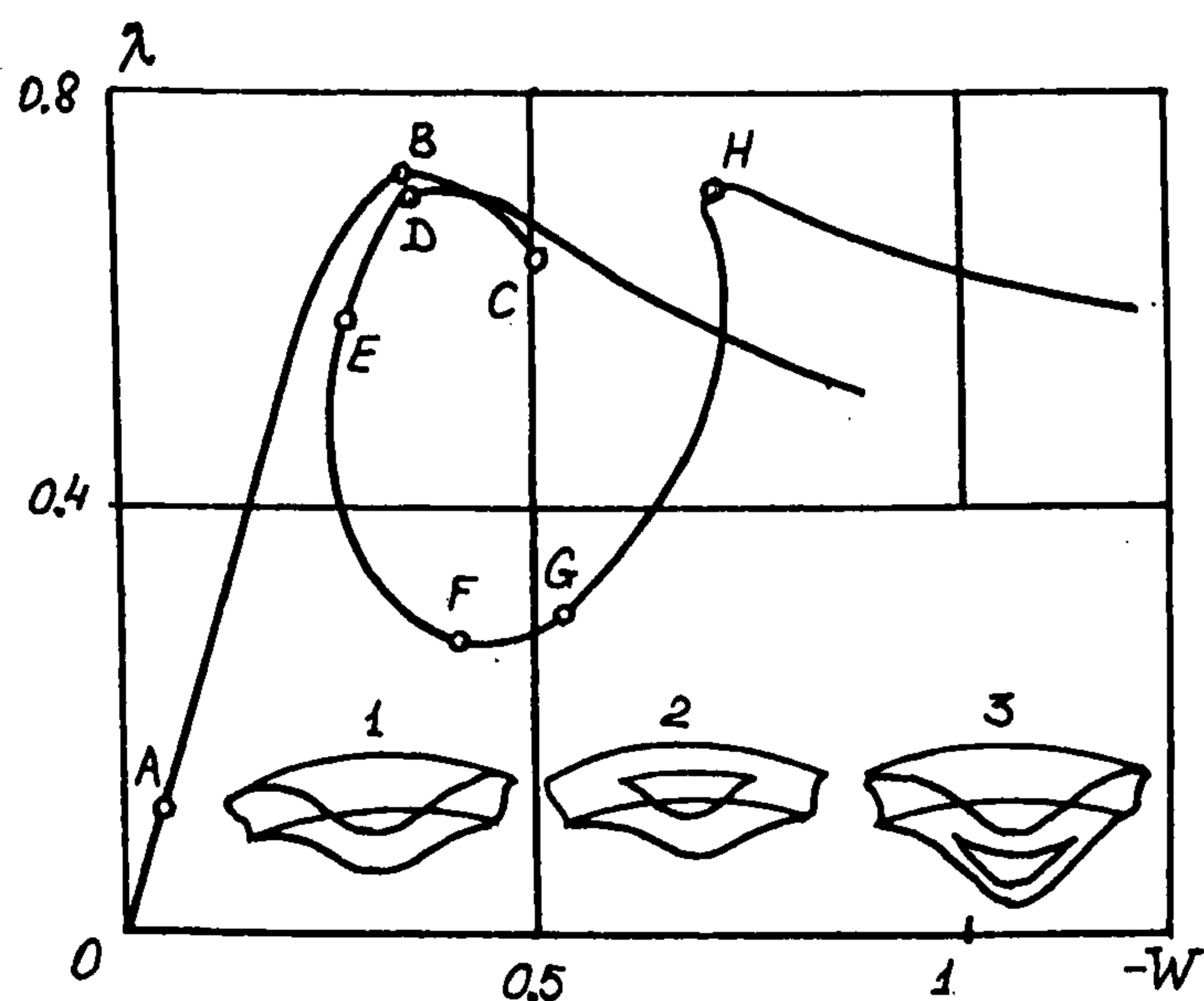
Найденный с заданной точностью вектор $\tilde{\mathbf{A}}_2$ и вычисленный по формуле (2.2) вектор $\tilde{\mathbf{A}}_1$



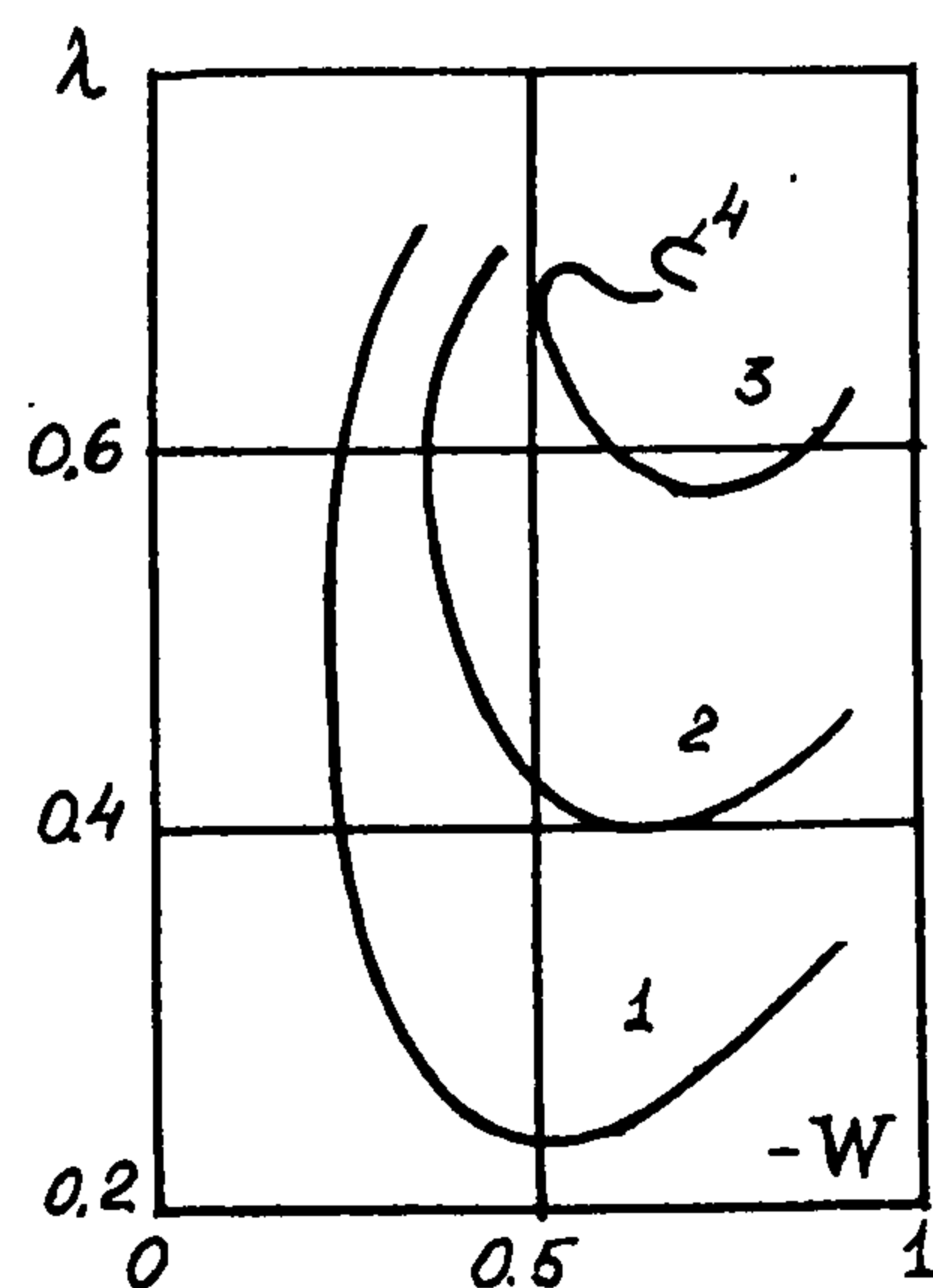
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

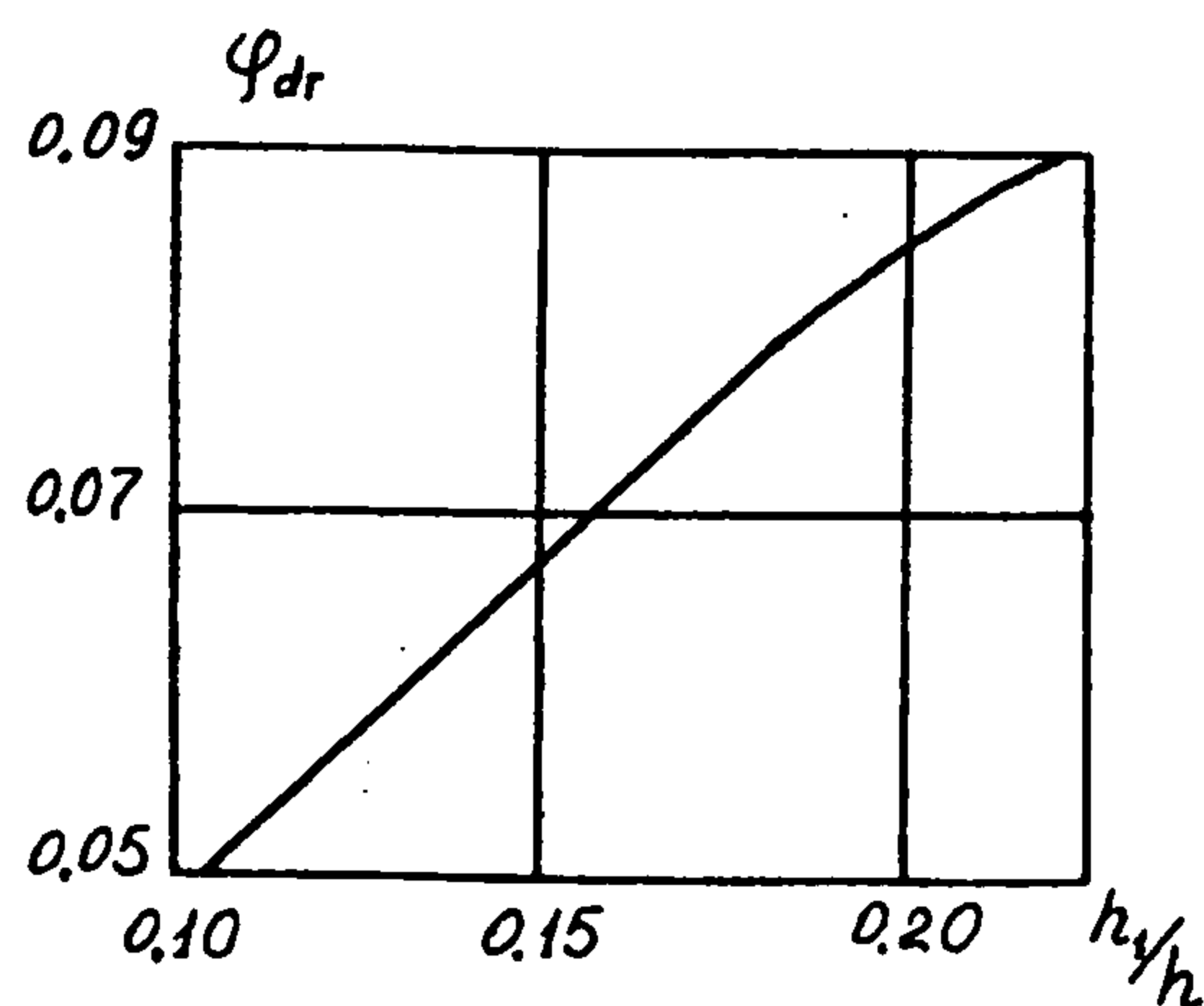
используются для формирования начального приближения для продолжения решения вдоль закритической ветви с помощью алгоритма (1.5).

3. Результаты расчета. Изложенный алгоритм позволил построить решения рассматриваемой задачи для глубокой закритической стадии деформирования оболочек различных типов и установить характер изменения этих решений в зависимости от вида неоднородности деформации.

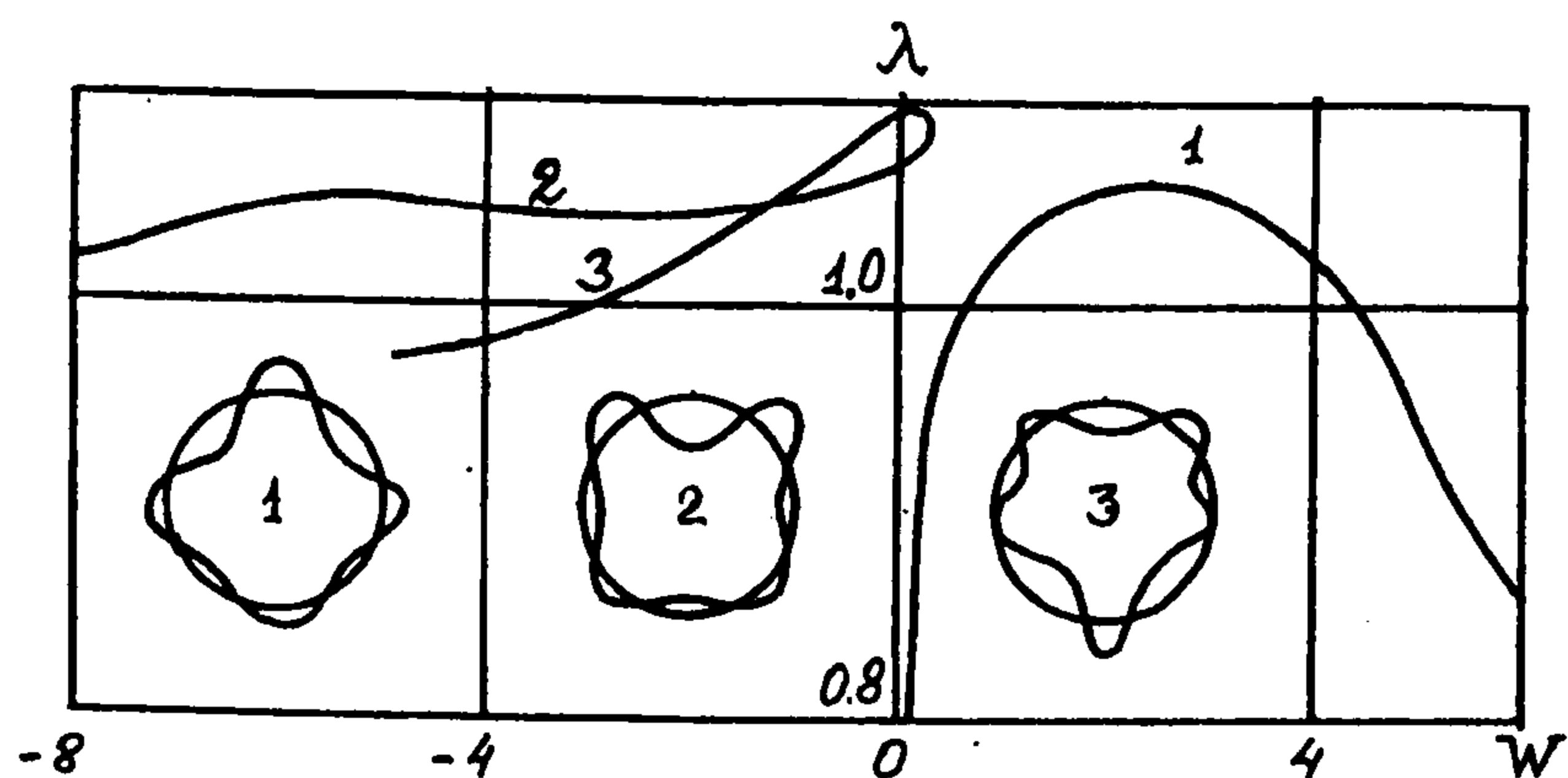
На фиг. 1 приведена картина закритических решений для цилиндрической оболочки при осесимметричном внешнем давлении. Здесь W – максимальный прогиб, отнесенный к толщине оболочки, λ – параметр нагружения, отнесенный к его критическому значению, определенному из линеаризованной задачи.

При нагрузке $\lambda = 1$ на ветви OA , отвечающей исходному осесимметричному состоянию, достигается точка бифуркации A . Ветвь $ABCD$ соответствует закритическому регулярному решению (форма изгиба 1); нижняя граница существования регулярной формы $\lambda = 0,72$. На ветви AD при уровне амплитуды прогиба $W = 4$ фиксируется точка B вторичного ветвления. Форма изгиба оболочки, отвечающая решению BE , носит существенно локальный характер, причем по мере удаления от точки бифуркации B вдоль кривой BE степень локальности – глубина вмятины – увеличивается, а амплитуда регулярной компоненты убывает. Нижней границе существования локальной равновесной формой с одной вмятиной (форма изгиба 2) отвечает нагрузка $\lambda = 0,53$.

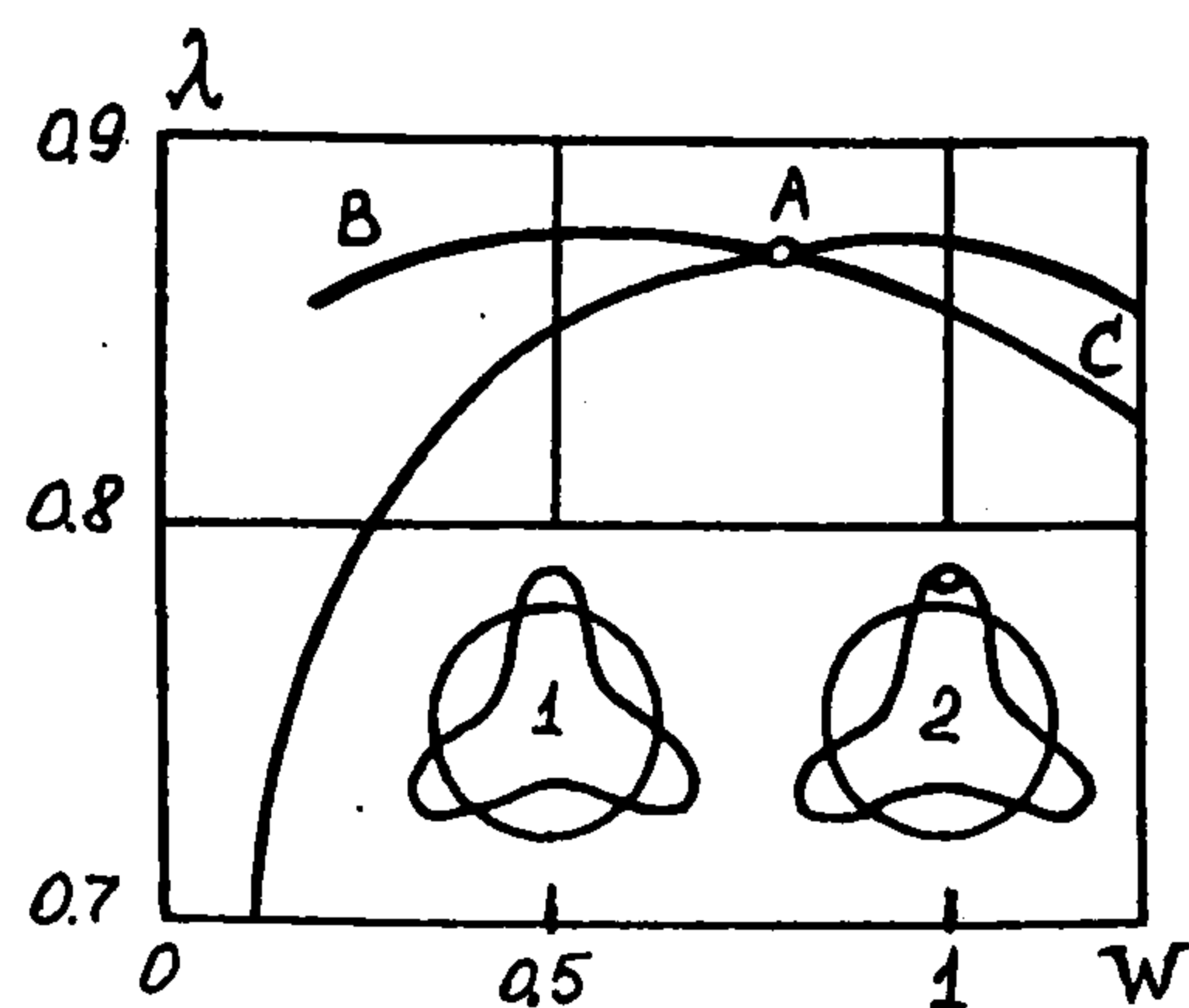
Далее на уровне амплитуд $W = 8$ регулярного решения расположена еще одна точка вторичного ветвления C также с локальной формой ответвляющегося решения, но с образованием группы вмятин, обладающей симметрией относительно двух ортогональных меридиональных плоскостей (форма изгиба 3). Соответствующая ветвь диаграммы FCF , нижняя критическая нагрузка $\lambda = 0,62$. Таким образом, можно выделить зону сущест-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

вождения только регулярной закритической формы и зоны существования форм локального выпучивания, нижние границы которых лежат ниже минимального уровня возмущенных нагрузок при реализации регулярной формы. При появлении в нагрузке неосимметричной составляющей $q = (\lambda/2)(1 + \cos(n\eta))$ картина закритической деформации частично разрушается – точка бифуркации A , становится предельной, а точки дифуркации типа B и C перемещаются на исходную восходящую ветвь (фиг. 2). Например, для случая $n = 8$ в нижней точке бифуркации докритического регулярного решения $\lambda = 1,39$ ответвляется решение с формой изгиба с одной локальной вмятиной; вторая критическая нагрузка $\lambda = 1,42$ соответствует ветвлению по форме с группой локальных вмятин. Характер кривых $\lambda - W$ сохраняется, они остаются нисходящими.

Необходимо подчеркнуть, что решения, описывающие локальный изгиб, существуют в окрестности регулярных изгибных решений, независимо от их природы – развитие закритической или докритической формы. Характер разрушения бифуркационной картины связан с параметром p , равным отношению изменяемости регулярного решения типа 1 к изменяемости функции нагружения n . При $p > 1$ картина ветвления имеет вид, показанный на фиг. 2, при $p \leq 1$ происходит разделение диаграммы на верхнюю и нижнюю ветви, причем нижняя ветвь имеет предельную точку.

Аналогичное явление разрушения картины деформирования отмечалось ранее для сферических сегментов в зависимости от геометрического параметра p [5].

Картина ветвления существенно усложняется для двухслойных оболочек, когда на некоторой части поверхности имеются зоны расслоения и возможно раздельное деформирование слоев.

Так, для двухслойной сферической оболочки, имеющей участок расслоения, картина $\lambda - W$ приведена на фиг. 3. Здесь точка B является одновременно и предельной точкой для решения типа 1 и точкой бифуркации для решения типа 2, причем кривая имеет свою предельную точку, которая соответствует общему выпучиванию оболочки с локальным выпучивающимся слоем (форма изгиба 3). Кривая ABC соответствует процессу деформирования с сохранением контакта между слоями до предельного значения $\lambda = 0,72$. Форма изгиба аналогична закритическим формам изгиба сферического сегмента без участка расслоения, имеющего ту же геометрию. Критическая нагрузка также весьма незначительно отличается от критической нагрузки для монолитной оболочки с той же геометрией.

Ветвь DEF , описывающая равновесные состояния с выпучившимся слоем при изменении параметров расслоения существенно изменяется. Так при увеличении относительной толщины расслоения h_1/h (h_1 – толщина отслоения, h – толщина пакета) ветвь типа DEF вырождается и исчезает (фиг. 4) при $h_1/h = 0,24$.

Значение относительной толщины, при которой локальная потеря устойчивости невозможна, зависит от размера зоны расслоения. Стабилизация величины предельной относительной толщины при углах расслоения $\varphi_d = 0,09$ связана с наличием резонансного угла выщелкивания. Как было показано ранее, при углах расслоения, больших этого резонансного угла φ_{dr} , величины нижних предельных нагрузок и вид изолированных кривых в окрестности этих нагрузок не изменяется. Для больших же φ_d величина этого резонансного угла останется практически постоянной и, как следует из фиг. 5, $\varphi_{dr} = 0,09$ для $h_1/h = 0,25$. Для выбранной геометрии при $\varphi_{dr} = 0,09$ величина предельной относительной толщины не превышает 0,24.

Для цилиндрической оболочки с прямоугольной зоной расслоения, находящейся под действием равномерного внешнего давления область существования форм с выпучившимся нижним слоем значительно уже. Это связано, по всей видимости, с более низким уровнем сжимающих напряжений и иным, чем для сферической оболочки, соотношением критических нагрузок целой оболочки и панели, соответствующей отслоившемуся участку.

Даже в случаях, когда локальная форма потери устойчивости не обнаружена, наличие расслоения приводит к разрушению картины ветвления, показанной на фиг. 1. Для оболочки с $L/R = 4$, $R/h = 150$, $L/x_s = 10$, $R/y_s = 2,5$, $h_1/h = 0,1$ (x_s, y_s – размер расслоения в продольном и окружном направлениях) слои в зоне расслоения движутся параллельно друг другу, а наряду с исходной ветвью 1 (форма изгиба 1) появляется изолированная ветвь 2–3, где реализуются регулярные формы изгиба 2 и 3, соответственно (фиг. 6). Ослабление жесткости приводит к снижению критической нагрузки на исходной ветви до $\lambda = 0,84$.

Решения в выпучившемся нижним слоем получены для оболочки с $L/R = 6$, $R/h = 50$, $L/x_s = 5$, $h_1/h = 0,1$ (фиг. 7). В этом случае исходная ветвь с регулярной формой 1, при которой слои движутся совместно, имеют точку ветвления A с $\lambda = 0,92$ и амплитуде прогиба $W = 2,5$. Форма изгиба оболочки, отвечающая ветви BAC (форма 2), для нерасслоившейся части оболочки аналогична форме 1, локальный прогиб выпучивающегося слоя увеличивается с движением по ветви BC .

ЛИТЕРАТУРА

1. Моссаковский В.И., Маневич Л.И., Прокопало Е.Ф. О закритических формах равновесия цилиндрических оболочек, нагруженных внешним давлением // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. N 3. С. 548–550.
2. Хатчинсон Дж., Койтер В. Теория послекритического поведения конструкций // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1971. № 4. С. 129–149.
3. Supple W.J. On the change in buckle pattern in elastic structures // Intern. J. Mech. Sci. 1968. V. 10. N 9. P. 737–745.
4. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
5. Срубицкий Л.С. Выпучивание и послекритическое поведение оболочек. Ростов: Изд-во Рост. ун-та, 1981. 96 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
10.1.1996