

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКСЦЕНТРИЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЛАСТИН

С целью обобщения полученных ранее результатов [1–9] методом осреднения [5–9] исследуются уравнения колебаний пластины, подкрепленной эксцентрично расположенными относительно ее срединной поверхности упругими ребрами. Выводится рекуррентная система уравнений, первое приближение которой соответствует конструктивно-ортоотропной теории. Показано, что уже в этом приближении улавливаются особенности несимметричного расположения ребер. Получены поправки на дискретность расположения ребер.

В безразмерных переменных исходные соотношения, описывающие свободные колебания эксцентрично подкрепленной пластины, имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta_1^2} + \frac{\partial}{\partial \eta_1^4} \right) w + \lambda_0 w_{\tau\tau} = 0 \quad (1)$$

$$B_{01} u_{\xi\xi} + u_{\eta_1\eta_1} + (\nu B_{01} + 1) v_{\xi\eta_1} = u_{\tau\tau} \quad (2)$$

$$B_{01} v_{\xi\xi} + v_{\eta_1\eta_1} + (\nu B_{01} + 1) u_{\xi\eta_1} = v_{\tau\tau} \quad (3)$$

$$(w, w_{\eta_1}, u, v)^- = (w, w_{\eta_1}, u, v)^+ \quad (4)$$

$$w_{\eta_1\eta_1}^+ - w_{\eta_1\eta_1}^- = \varepsilon \alpha_k w_{\xi\xi\eta_1} \quad (5)$$

$$w_{\eta_1\eta_1\eta_1}^- - w_{\eta_1\eta_1\eta_1}^+ = \varepsilon \alpha_k w_{\xi\xi\xi\xi} + \gamma u_{\xi\xi\xi} + \lambda_1 w_{\tau\tau} \quad (6)$$

$$u_{\eta_1}^- - u_{\eta_1}^+ = \beta u_{\xi\xi} - \gamma_2 u_{\tau\tau} + \lambda_1 w_{\xi\xi\xi} \quad (7)$$

$$v_{\eta_1}^- - v_{\eta_1}^+ = \alpha_1 v_{\xi\xi\xi\xi} - B_{01} \lambda_2 v_{\tau\tau} \quad (8)$$

$$w = w_{\eta_1} = u = v = 0 \quad \text{при } \eta_1 = 1/2 \quad (9)$$

$$w = w_{\xi\xi} = u = v = 0 \quad \text{при } \xi = 0, L = L_1 / (2L_2) \quad (10)$$

$$v_{\xi} \sum \delta(\varphi - i) = 0 \quad \text{при } \xi = 0, L \quad (11)$$

Здесь

$$\tau = \frac{1}{2L} \left(\frac{B_0}{\rho_1 h_0} \right)^{1/2} t, \quad \lambda_0 = \frac{4B_0 L_2^2}{D}, \quad B_{01} = \frac{B}{B_0}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$\lambda_k \frac{G_0 J_g}{Db}, \quad \gamma = \frac{E_c S}{Db}, \quad \beta = \frac{E_c F}{2B_0 L_2}, \quad \lambda_1 = \frac{2L_2 \rho_c F B_0}{D \rho_0 h}, \quad D = \frac{Bh^2}{12}$$

$$\lambda_2 \frac{\rho_c F}{2L_2 \rho_0 h}, \quad \gamma_1 = \frac{E_c S}{4B_0 L_2^2}, \quad \alpha_1 = \frac{E_c J_1}{8BL_2^3}, \quad \alpha = \frac{E_c J}{Db}, \quad B_0 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}$$

$$(\dots)^{(-)} = \lim_{y \rightarrow h k_{(-)} + 0} (\dots), \quad k = 0 \pm 1, \dots, \pm(N+1)/2$$

$$\Delta^4 = \Delta^2 \Delta^2, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (\dots)_{xy} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\dots)$$

ρ_0 – плотность материала пластины на единицу площади, ρ_c – погонная плотность ма-

териала ребра, F – площадь поперечного сечения ребра, J_g – момент ребра на кручение, S – статический момент ребра относительно срединной поверхности обшивки, J_1 – момент ребра на изгиб из плоскости, J – момент ребра на изгиб в плоскости, w – нормальный прогиб, u, v – перемещения пластины в плоскости в направлении осей x и y соответственно, x, y – координаты в плоскости, t – время, E, E_c – модули Юнга материалов пластины и ребер соответственно, ν – коэффициент Пуассона материала пластины, G_c – модуль сдвига материала ребра, h – толщина пластины, суммирование здесь и всюду далее ведется от $i = -(N+1)/2$ до $i = (N+1)/2$, $\delta(\dots)$ – дельта-функция Дирака, N – число ребер, $L_1, 2L_2$ – длины пластинки в направлении осей x и y соответственно.

Введем медленную η и быструю φ переменные и представим перемещения в виде

$$w = w_0 + \varepsilon^4 w_1 + \varepsilon^5 w_2 + \dots \quad (12)$$

$$u = u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 + \dots$$

где функции нулевого приближения зависят только от медленных переменных.

Считаем, что изменяемость по времени мала, т.е. рассматривается нижняя часть спектра.

Для входящих в краевую задачу (1)–(11) параметров примем оценки

$$\alpha \sim 1, (\gamma, \gamma_1, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_k, \beta) \sim \varepsilon$$

Подставляя разложения (12) в систему уравнений (1)–(3) и учитывая новое выражение для производной

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

получаем после расщепления по ε систему уравнений, интегрируя которую, имеем

$$w = \frac{W_1}{24} \varphi^4 + C_1 + C_2 \varphi + C_3 \varphi^2 + C_4 \varphi^3 \quad (13)$$

$$u_1 = \frac{W_2}{2} \varphi^2 + C_5 + C_6 \varphi, \quad v_1 = \frac{W_3}{2} - \varphi^2 + C_7 + C_8 \varphi$$

Условия сопряжения соседних участков пластины (4)–(8) можно переписать в виде

$$(w_l, w_{l\eta_1}, u_1, v_1)^- = (w_l, w_{l\eta_1}, u_1, v_1)^+ \quad (14)$$

$$w_{1\varphi\varphi}^+ - w_{1\varphi\varphi}^- = \varepsilon^{-1} \alpha_k w_{0\xi\xi\eta} \quad (15)$$

$$w_{1\varphi\varphi\varphi}^- - w_{1\varphi\varphi\varphi}^+ = \alpha w_{0\xi\xi\xi\xi} + \gamma u_{0\xi\xi\xi} + \lambda_1 w_{0\tau\tau} \quad (16)$$

$$u_{1\varphi}^- - u_{1\varphi}^+ = \beta u_{0\xi\xi} - \lambda_2 u_{0\tau\tau} + \gamma_1 w_{0\xi\xi\xi} \quad (17)$$

$$v_{1\varphi}^- - v_{1\varphi}^+ = \alpha_1 v_{0\xi\xi\xi\xi} - B_{01}^{-1} \lambda_2 v_{0\tau\tau} \quad (18)$$

Уравнения (16)–(18) являются по существу условиями разрешимости уравнений первого приближения, и из них непосредственно следует

$$\begin{aligned} W_1 + \alpha w_{0\xi\xi\xi\xi} + \gamma u_{0\xi\xi\xi} + \lambda_1 w_{0\tau\tau} &= 0 \\ W_2 + \beta u_{0\xi\xi} - \lambda_2 u_{0\tau\tau} + \gamma_1 w_{0\xi\xi\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$W_3 + [\alpha_1 v_{0\xi\xi\xi\xi}] - B_{01}^{-1} \lambda_2 v_{0\tau\tau} = 0$$

Система (19) соответствует конструктивно-ортотропной теории. Основная ее особенность – она имеет десятый порядок по ξ , в связи с чем встает вопрос о краевых условиях. Условия (9)–(10) переходят в следующие:

$$w_0 = w_{0\eta} = u_0 = v_0 = 0 \text{ при } \eta = 1/2$$

$$w_0 = w_{0\xi\xi} = u_0 = v_0 = 0 \text{ при } \xi = 0, L$$

Недостающие краевые условия получаются осреднением соотношений (11)

$$v_{0\xi} = 0 \text{ при } \xi = 0, L \quad (20)$$

При симметричном расположении ребер система (19) развязывается и получается, что жесткость ребер на изгиб из плоскости не влияет на нормальное перемещение w_0 . Кроме того, для малых значений жесткости ребер на изгиб из плоскости ($\alpha_1 \sim \varepsilon^p$, $p > 1$) в уравнениях (19) должен быть опущен член в квадратных скобках и отброшено граничное условие (20). В исходных переменных имеем

$$w_1 = - \left[\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + \frac{\rho_0 h}{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right] \frac{2}{3} L^2 \frac{y}{b} \left(3 - 4 \frac{y}{b} \right) + 2 \left(\frac{y}{b} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^3$$

$$u_1 = - \left[B \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (vB + B_0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right] 2 L^2 \frac{y}{b} \left(\frac{y}{b} - 1 \right)$$

Выражение для v_1 отличается от u_1 заменой u_0 на v_0 .

Перейдем к построению физических соотношений. После расщепления исходных соотношений по ε и осреднения получаем

$$M_1^{(0)} = D(\kappa_1^{(0)} + v\kappa_2^{(0)}) + \frac{E_c J}{b} \kappa_1^{(0)} + \frac{E_c S}{b} \varepsilon_1^{(0)}$$

$$M_2 = D(\kappa_2^{(0)} + v\kappa_1^{(0)}), \quad M_{12}^{(0)} = D(1-v)\kappa_{12}^{(0)}$$

$$T_1^{(0)} = B(\varepsilon_1^{(0)} + v\varepsilon_2^{(0)}) + \frac{E_c F}{b} \varepsilon_1^{(0)} + \frac{E_c S}{b} \kappa_1^{(0)}$$

$$T_2^{(0)} = B(\varepsilon_2^{(0)} + v\varepsilon_1^{(0)}), \quad T_{12}^{(0)} = B_0 \varepsilon_{12}^{(0)}$$

$$\kappa_1^{(0)} = -w_{0xx}, \quad \kappa_2^{(0)} = -w_{0yy}, \quad \kappa_{12}^{(0)} = -w_{0xy}$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = u_{0x}, \quad \varepsilon_2^{(0)} = v_{0y}, \quad \varepsilon_{12}^{(0)} = u_{0y} + v_{0x}$$

Здесь $\kappa_1 = -w_{xx}$, $\kappa_2 = -w_{yy}$, $\kappa_{12} = -w_{xy}$, $\varepsilon_1 = u_x$, $\varepsilon_2 = v_y$, $\varepsilon_{12} = u_y + v_x$, M_1, M_2, M_{12} – изгибающие и крутящий моменты соответственно, κ_1, κ_2 – кривизны, κ_{12} – кручение, T_1, T_2 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) – усилия (деформации) в направлении осей, x, y соответственно, T_{12} – сдвигающее усилие, ε_{12} – деформация сдвига.

Таким образом, метод осреднения позволяет получить как последовательные осредненные соотношения, так и обусловленные дискретностью поправки в аналитическом виде.

Работа частично финансировалась в рамках Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук CISSEP, SPU061002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наук. думка, 1973. 248 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 367 с.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1990. С. 132–191.

4. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 374 с.
5. Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
6. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
7. Дюво Ж. Функциональный анализ и механика сплошной среды. Приложение к изучению композиционных упругих материалов с периодической структурой – гомогенизация // Теоретическая и прикладная механика. Тр. междунар. конгр. IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 323–345.
8. Каламкаргов А.Л., Кудрявцев Б.А., Партон В.З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 19. С. 78–147.
9. Lewinski T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure // Intern. J. Solids Structures, 1992. V. 29. N 3. P. 309–326.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
9.VI.1995

УДК 539.3

© 1997 г. И.П. Железко, Н.И. Ободан

ВТОРИЧНЫЕ ВЕТВЛЕНИЯ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Исследуется нелинейное поведение и закритическое поведение тонкостенных оболочек при неоднородных деформациях, обусловленных неравномерностью нагружения или неоднородностью конструкции. Строятся уравнения разветвления и проводится классификация особых точек для нелинейных уравнений в применении к методу Ньютона. Приводятся результаты расчета и анализ закритического поведения для цилиндрических и сферических оболочек с различными видами неоднородности. Показано, что локальные формы потери устойчивости и разрушения связаны с существованием изолированных равновесных ветвей и вторичным ветвлением нелинейных решений.

Экспериментальными исследованиями установлено [1], что закритические равновесные формы тонких оболочек можно подразделить на общие (регулярные) и локальные, когда волнообразование выражено лишь на ограниченной части поверхности. При этом граница области существования локальных закритических форм лежит ниже границы регулярных состояний. Исследование закритических состояний тонкостенных конструкций, находящихся в условиях неоднородной деформации, позволяет оценивать реальную несущую способность конструкции после выпучивания. Известные теоретические исследования закритического поведения тонкостенных конструкций посвящены преимущественно построению начальных отрезков закритических ветвей, причем в качестве форм выпучивания принимаются линейные собственные формы бифуркационной задачи для однородного докритического состояния [2]. Для случая близких критических нагрузок, соответствующих различным линейным формам выпучивания, показано, что взаимодействие соседних форм может проявиться во вторичной бифуркации закритических ветвей [3]. Такие решения получены для модели с двумя степенями свободы, соответствующими двум соседним линейным формам. Исследование вторичного ветвления с позиций полного нелинейного анализа не проводилось. Исследование локального выпучивания ограничивалось рассмотрением случая образования единичной вмятины заданной формы при нагрузках, близких к классическому критическому значению.