

получаем

$$\delta^2 W = \rho g \iint (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) u_n dS - \frac{1}{2} \left[M_1 g x_{13} + \rho g \int x_3^2 d\tau \right] (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \frac{1}{2} \rho g \iint u_n^2 dS$$

Затем вычисляем u_n и аналогично предыдущему вновь приходим к результату В.В. Румянцева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Н.Г. Мазур, В.Н. Николаевский, Г.А. Эль

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОБМЕН МЕЖДУ СЕЙСМИЧЕСКИМИ И УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

На основе континуальной упругой нелинейной модели с микровращениями проводится расчет расхода сейсмической энергии в условиях длинно-коротковолнового резонанса в гранулированных геоматериалах (грунтах, нарушенных горных породах).

Воспользуемся уравнениями для одномерных нелинейных волн [1] в градиентно-согласованной упругой среде с микровращениями [2]

$$u_{TT} - c_1^2 u_{XX} - \delta u_{XXXX} - \nu u_X u_{XX} + 2\chi \varphi \varphi_X = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_{TT} - c_2^2 \varphi_{XX} + \omega_0^2 \varphi - u_X (c_2^2 \varphi_{XX} - \mu \varphi) = 0$$

для оценки энергетического обмена в условиях длинно-коротковолнового резонанса (ДКР). Здесь u – смещение в сейсмической волне, φ – микроповорот, c_1 и c_2 – номинальные скорости сейсмической и микроротационной волн соответственно, δ , ν , ω_0^2 , χ , μ – упругие и инерционные коэффициенты. На основе более подробного анализа нелинейных коэффициентов, удовлетворяющих принципу [1] градиентного согласования, можно показать, что

$$\mu = \chi \quad (2)$$

Ограничимся далее линейным (по энергии !) анализом. Стандартный подход приводит к следующим выражениям для интенсивности сейсмического потока энергии и соответствующего ультразвукового потока:

$$W_s = c_1^2 \omega_s k_s \rho u^2 / 2, \quad W_{us} = c_2^2 \omega^* k^* \rho j \varphi^2 / 2 \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность, ρj – удельный момент инерции гранул среды, k_s – волновое число сейсмической волны, $\omega_s^2 = c_1^2 k_s^2 + \delta k_s^4$ – дисперсионное соотношение для сейсмических волн, ω^* и k^* – частота и волновое число ультразвука, возбужденного при ДКР [1].

Условие ДКР имеет вид [1]

$$\frac{d\omega_{us}}{dk}(k^*) = c_1$$

где $\omega_{us}^2 = c_2^2 k^2 + \omega_0^2$ служит дисперсионным соотношением для ультразвуковых волн.

В явном виде имеем

$$c_2^2 k^* [c_2^2 (k^*)^2 + \omega_0^2]^{-1/2} = c_1, \quad \omega^* = \omega_{us}(k^*)$$

Напомним [1, 3], что переменные u, φ при анализе ДКР представляются в виде рядов по степеням малого параметра

$$\varepsilon = \lambda_{us}^* / \lambda_s = k_s / k_{us}^* \ll 1$$

где $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны. «Медленные» переменные ξ, τ связаны с начальными «быстрыми» переменными X, T следующими равенствами:

$$\xi = \varepsilon(X - c_g T), \quad \tau = \varepsilon^2 T, \quad c_g = d\omega_{us} / dk$$

Таким образом, при учете разложений по малому параметру [1, 3]

$$u = \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2), \quad \varphi = \varepsilon^q \varphi_1 + O(\varepsilon^{q+1}) \approx \varepsilon^q (A e^{i\varphi} + \text{с.с.})$$

интенсивности потоков энергий (3) представляются в виде

$$W_s = \varepsilon^2 \rho c_1^2 \omega_s k_s u_1^2 / 2, \quad W_{us} = \varepsilon^{2q} \rho j c_2^2 \omega^* k^* |A|^2 / 2$$

Известно [1, 3], что уравнения КДР включают в себя сейсмическую деформацию $V = \partial u_1 / \partial \xi \approx u_1 k_s$ вместо смещения u_1 , причем оценка, содержащая волновое число, также следует из асимптотических разложений [4]. Поэтому, используя при $c_2 > c_1$ выражения

$$k^* = \frac{c_1 \omega_0}{c_2 \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}, \quad \omega^* = \frac{c_2 \omega_0}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$$

$$\omega^* k^* = \frac{c_1 \omega_0^2}{c_2^2 - c_1^2}, \quad \frac{\omega^*}{k^*} \equiv c_{us} = \frac{c_2^2}{c_1}$$

для ультразвуковых волн имеем

$$W_{us} = \frac{1}{2} \rho j \omega_0^2 \frac{c_1 c_2^2}{c_2^2 - c_1^2} \frac{\varepsilon^3}{\chi_1} |A|^2$$

где [1]

$$\chi_1 = |\chi| c_1^{-2}, \quad \varepsilon^{2q} = \varepsilon^3 \chi_1^{-1} \quad (4)$$

и χ_1 – приведенный коэффициент нелинейности. Укажем, что исходный коэффициент нелинейности (2) считается малым, а показатель степени q выбран так, чтобы обеспечить выполнение преобразования (4).

Если $k_s^4 \ll k_s^2 c_1^2 / \delta$, то для сейсмических волн имеем

$$W_s = \varepsilon^2 \rho c_1^2 \omega_s k_s V^2 k_s^{-2} / 2 = \varepsilon^2 \rho c_1^3 V^2 / 2$$

Таким образом, искомое отношение интенсивностей потоков энергии высоких и низких частот представляется в виде

$$\frac{W_{us}}{W_s} = \frac{j \omega_0^2}{c_1^2} \frac{c_2^2}{c_2^2 - c_1^2} \frac{\varepsilon}{\chi_1} \frac{|A|^2}{V^2} \quad (5)$$

Комплексная амплитуда $A(\xi, \eta)$ и деформация $V(\xi, \eta)$ удовлетворяют следующим результирующим уравнениям ДКР (с исправлением некоторых опечаток в [1, 3]):

$$\partial_\tau V = \pm c_1 \partial_\xi |A|^2, \quad 2i \omega^* \partial_\tau A + (c_2^2 - c_1^2) \partial_{\xi\xi} A = [(k^*)^2 c_2^2 + \mu] V A$$

Для оценок значений A и V перейдем к «канонической» системе ДКР

$$\partial_t L = \pm \partial_x |S|^2, \quad 2i\partial_t S + \partial_{xx} S = 2LS \quad (6)$$

для чего произведем масштабную замену переменных

$$t = \alpha\tau, \quad x = \beta\xi, \quad A = \kappa S, \quad V = \lambda L$$

Здесь (с учетом исправления опечаток в работах [1, 3])

$$\alpha = \frac{\omega_0 c_*^2}{c_2 \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}, \quad \beta = \frac{\omega_0 c_*}{c_2^2 - c_1^2}, \quad \lambda = 2, \quad \kappa^2 = \frac{2c_* \sqrt{c_2^2 - c_1^2}}{c_1 c_2}$$

$$c_*^2 = (1 - \mu_1)c_1^2 + \mu_1 c_2^2, \quad \mu_1 = \mu \omega_0^{-2}$$

Значения коэффициентов (2) были приняты малыми: $\mu = \chi \ll 1$, а потому можно использовать более простую связь: $c_* = c_1$.

Окончательно имеем

$$\frac{W_{us}}{W_s} = K \frac{|S|^2}{L^2}, \quad K = \frac{j}{2} \frac{\omega_0^2}{c_1^2} \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}} \frac{\varepsilon}{\chi_1} \quad (7)$$

где K – коэффициент энергетического обмена.

Для количественного выражения значений K зададимся следующими типичными (для пористых горных пород) данными:

$$c_1 = 10^3 \text{ м/с}, \quad c_2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad \lambda_s = 10 \text{ м}, \quad \lambda_{us} \sim d = 10^{-3} \text{ м}$$

$$\omega_0 = 10^3 \text{ с}^{-1}, \quad j \approx d^2 = 10^{-6} \text{ м}^2, \quad \chi_1 = 10^{-7}, \quad \varepsilon = \lambda_{us} / \lambda_s = 10^{-4}$$

(d – характерная длина гранул). Это дает оценку $K \sim 10^{-3}$, которая соответствует постепенному накоплению рассматриваемого нелинейного эффекта (ультразвуковой энергии) на больших расстояниях, характерных для пробега реальных сейсмических волн. Ультразвук, как известно [5], эффективно воздействует на микросостояние двухфазной смеси (например, нефти с водой) в поровом пространстве гранулированных сред, переводя смесь в состояние микроэмульсии и увеличивая тем самым нефтеотдачу месторождений.

Теперь аналитически оценим коэффициент $|S|^2/L^2$, содержащийся в выражении (7). Замена переменных [1] $S = I^{1/2} e^{i\varphi}$, $\partial_x \varphi = w$ придает уравнениям (6) вид, известный в гидродинамике

$$\partial_t I + \partial_x (Iw) = 0, \quad \partial_t L + \partial_x I = 0$$

$$\partial_t w + \partial_x \left(\frac{w^2}{2} + L \right) + \frac{1}{4} \partial_x \left[\frac{(\partial_x I)^2}{2I^2} - \frac{\partial_{xx} I}{I} \right] = 0 \quad (8)$$

В пределе слабой дисперсии $\partial_x I / I \ll 1$ можно пренебречь производными второго и третьего порядков. Тогда систему (8) можно представить в римановой форме [1]

$$\partial_t r_i + V_i(\mathbf{r}) \partial_x r_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)) \quad (9)$$

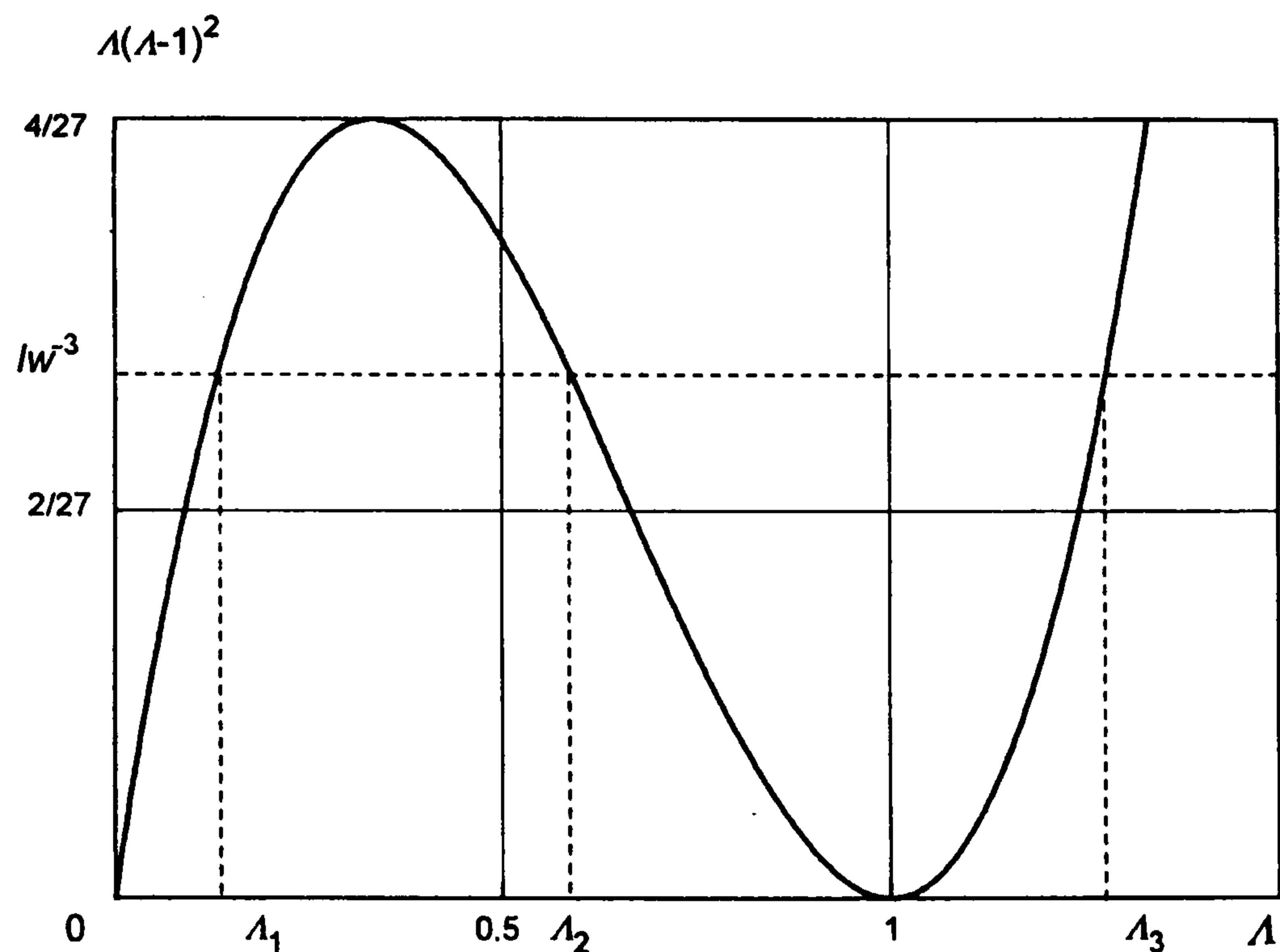
если ввести новые переменные

$$r_i = L + w^2 (3\Lambda_i - 2)\Lambda_i / 2 \quad (10)$$

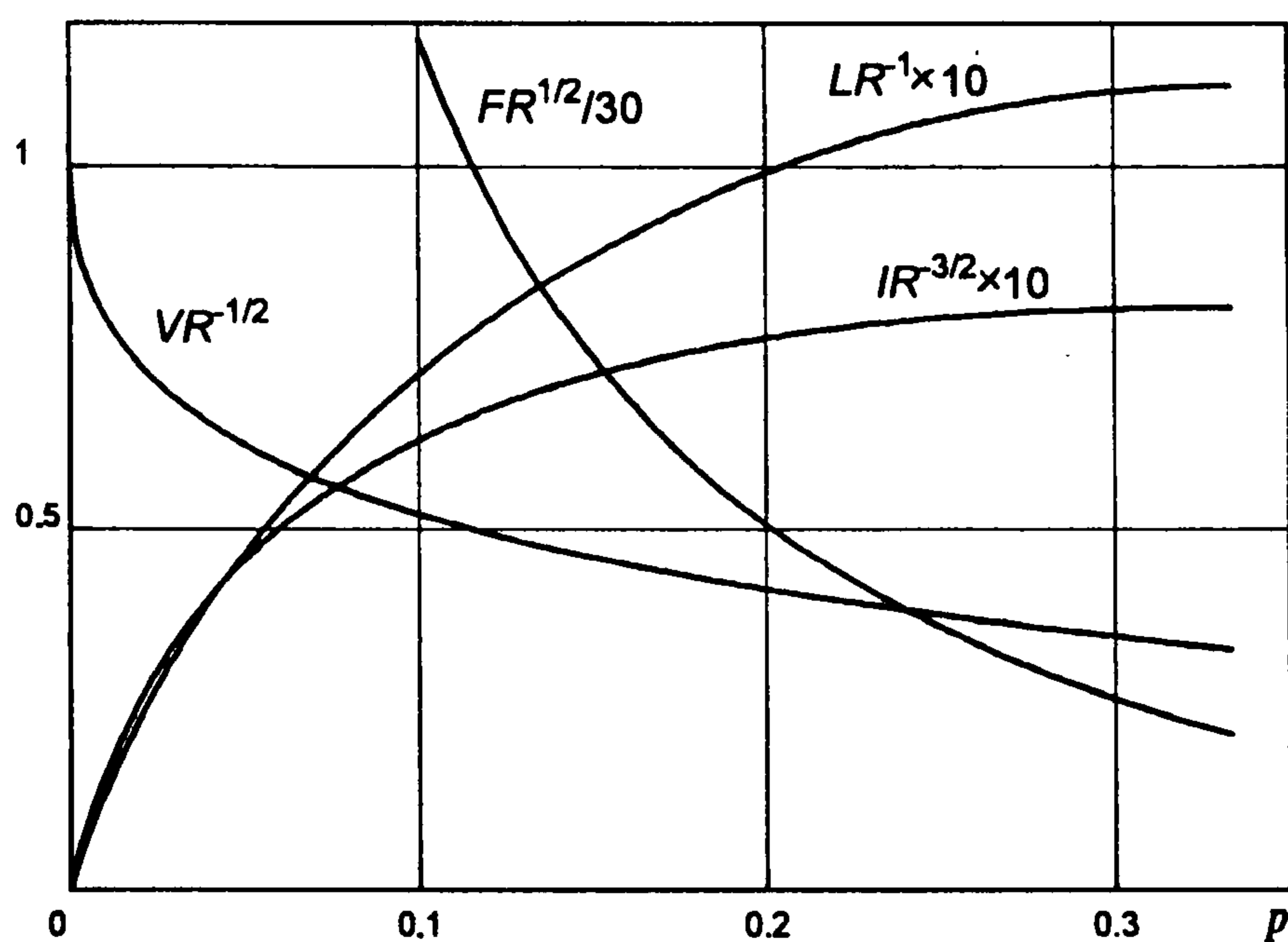
где Λ_i – корни уравнения

$$\Lambda(\Lambda - 1)^2 = Iw^{-3} \quad (11)$$

(фиг. 1), а $V_i = w\Lambda_i$. Если $0 < Iw^{-3} < 4/27$, то уравнение (11) имеет все действительные корни и система (9) гиперболична.



Фиг. 1



Фиг. 2

Воспользуемся комбинацией $p = \Lambda_1 (lw^{-3})$ как параметром. При заданном p корни Λ_2, Λ_3 удовлетворяют квадратному уравнению, а потому

$$\Lambda_{2,3} = 1 - p/2 \mp \sqrt{p(4-3p)}/2$$

Подставляя эти выражения в (10), получим

$$r_i = L + w^2 h_i(p), \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

$$h_1(p) = \frac{(3p-2)p}{2}, \quad h_{2,3}(p) = \frac{1}{4} [2 + 2p - 3p^2 \mp (4-3p)\sqrt{p(4-3p)}]$$

Рассмотрим частные решения (9) при $r_1 = 0, r_3 = R = \text{const}$. Это так называемые простые волны Римана, в которых все величины – функции одной переменной, например p , находимой из уравнения $\partial_t p + V(p) \partial_x p = 0$, где $V(p) = V_2(0, r_2(p), R) = w(p) \Lambda_2(p)$

Искомые значения в (12), выраженные через p (при условиях, что $r_1 = 0$, $r_3 = R$), таковы:

$$w^2 = RD^{-1}, \quad L = -Rh_1 D^{-1}, \quad I = R^{3/2} p(p-1)^2 D^{-3/2}$$

$$r_2 = R(h_2 - h_1) D^{-1}$$

$$V = \frac{1}{2} R^{1/2} [2 - p - \sqrt{p(4-3p)}]^{1/2} D^{-1/2}$$

$$F \equiv \frac{|S|^2}{L^2} = \frac{I}{L^2} = 4R^{-1/2} \frac{(p-1)^2}{p(3p-2)^2} D^{1/2}$$

$$D = h_3 - h_1 = \frac{1}{4} [2 + 6p - 9p^2 + (4-3p)\sqrt{p(4-3p)}]$$

Графики функций $L(p)$, $I(p)$, $V(p)$, $F(p)$ представлены на фиг. 2.

Отметим, что неограниченный рост F при $p \rightarrow 0$ (или $L \rightarrow 0$) не имеет физического смысла, поскольку разложения [1], требуемые для ДКР, становятся при этом несправедливыми.

Уменьшение значений $V(p)$ (естественно, и $V(L)$) приводит к устойчивости переднего фронта волны, вступающей в среду с возрастающей амплитудой, тогда как хвостовая часть волны разрушается. В этом случае следует учесть дисперсионные члены в системе ДКР.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01-453).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (NP 1000 и RIE 300).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А.Л., Мазур Н.Г., Николаевский В.Н., Эль Г.А. Градиентно-согласованная нелинейная модель генерации ультразвука при распространении сейсмических волн // ПММ, 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 100–109.
2. Brulin O., Hjalmar S. Linear grade-consistent micropolar theory // Intern. J. Engng. Sci. 1981. V. 19. No 12. P. 1731–1738.
3. Крылов А.Л., Николаевский В.Н., Эль Г.А. Математическая модель нелинейной генерации ультразвука сейсмическими волнами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6. С. 1340–1344.
4. Николаевский В.Н. Нелинейные волны в грунтах и трещиноватых горных породах // Физ.-тех. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1988. Вып. 6. С. 31–38.
5. Николаевский В.Н. Вибрации горных массивов и конечная нефтеотдача пласта // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 110–120.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1995