

УДК 531.36

© 1997 г. П. Каподанно

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ЖИДКОСТЬ

Рассматривается задача об устойчивости равновесия или стационарного движения твердого тела, содержащего жидкость. В силу теоремы В.В. Румянцева получено достаточное условие устойчивости, соответствующее минимуму измененной потенциальной энергии, отвечающей преобразованному твердому телу. Указана процедура представления второй вариации измененной потенциальной энергии в виде квадратичной формы параметров, определяющих положение твердого тела. Вычисления значительно упрощаются для задачи устойчивости равновесия или равномерного вращения вокруг неподвижной оси твердого тела, содержащего жидкость, в однородном поле силы тяжести. Снова получены результаты В.В. Румянцева.

1. Вспомогательная формула. Пусть Ω – область, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$. Эта область перейдет в близкое положение Ω' , которое определим при помощи малых перемещений $\mathbf{u}$ точек поверхности $\partial\Omega$.

Обозначим через $\Omega' - \Omega$ область, "заметаемую" поверхностью $\partial\Omega$, – множество точек $\mathbf{M}^\lambda$, определяемое соотношением $\mathbf{OM}^\lambda = \mathbf{OM} + \lambda\mathbf{u}$, где $\mathbf{M}$ – точка $\partial\Omega$, $\mathbf{u} = \mathbf{MM}'$ – перемещение точки $\mathbf{M}$, λ – параметр, $0 < \lambda < 1$; $\mathbf{M}$ и $\mathbf{u}$ зависят, например, от криволинейных координат α и β , определенных на $\partial\Omega$; $\mathbf{M}^\lambda$ зависит от α , β , λ .

Область $\Omega' - \Omega$ отличается от области $(\Omega \cup \Omega') - (\Omega \cap \Omega')$ областями, которые имеют порядок малости не ниже третьего по отношению к $|\mathbf{u}|$.

Для проведения вычислений введем на $\partial\Omega$ ортогональные криволинейные координаты α и β так, чтобы векторное произведение $\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta$ было направлено по нормали к Ω . Здесь и в дальнейшем индексы α и β означают соответствующие частные производные.

Пусть w – достаточно регулярная функция, определенная в области, содержащей Ω и Ω' .

В силу сделанного замечания, если ограничиться членами порядка, меньшего или равного двум относительно $|\mathbf{u}|$, то можно написать

$$\begin{aligned} \int_{\Omega' - \Omega} w d\tau &= \int_{\Omega' - \Omega} w(\mathbf{M} + \lambda\mathbf{u})(\mathbf{M}_\alpha^\lambda, \mathbf{M}_\beta^\lambda, \mathbf{M}_\lambda^\lambda) d\alpha d\beta d\lambda = \int_{\Omega' - \Omega} w(\mathbf{M})(\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta) \cdot \mathbf{u} d\alpha d\beta d\lambda + \\ &+ \int_{\Omega' - \Omega} \lambda \{ (\text{grad } w \cdot \mathbf{u})(\mathbf{M}_\alpha, \mathbf{M}_\beta, \mathbf{u}) + w(\mathbf{M})(\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta) \cdot \mathbf{u} \} d\alpha d\beta d\lambda \end{aligned}$$

(нижний индекс λ означает частную производную по λ).

Замечая, что область $\Omega' - \Omega$ можно отождествить с $\partial\Omega \times]0, 1[$ и что элемент площади dS поверхности $\partial\Omega$ есть $AB d\alpha d\beta$, имеем с точностью до членов выше второго порядка относительно $|\mathbf{u}|$

$$\int_{\Omega' - \Omega} w d\tau = \int_{\partial\Omega} w(\mathbf{M}) u_n dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} [\text{grad } w \cdot \mathbf{u} u_n + w(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1)] dS \quad (1.1)$$

где введены обозначения

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta}{AB}, \quad n_1 = \frac{1}{AB}(\mathbf{M}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{M}_\beta)$$

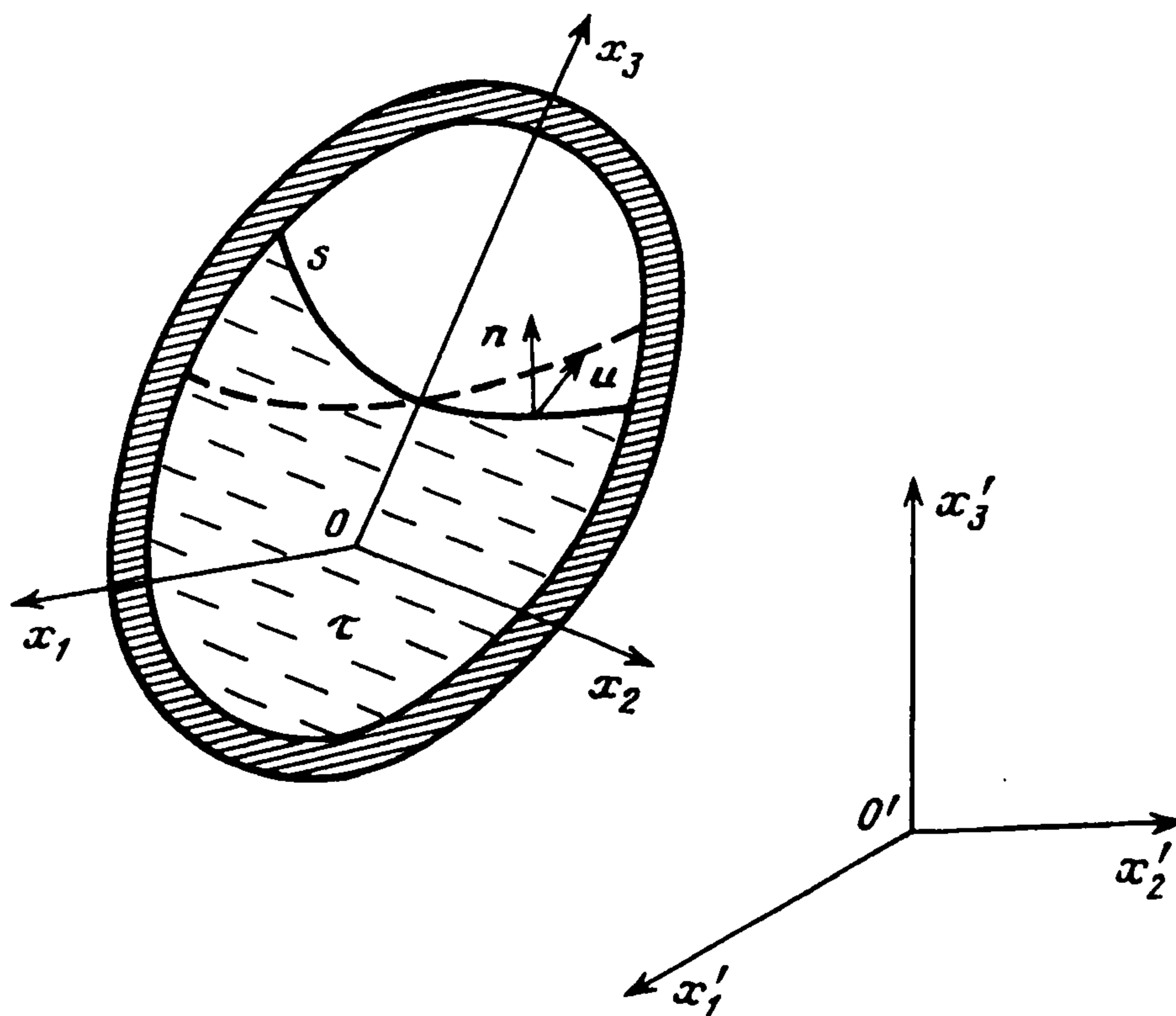
$$A = |\mathbf{M}_\alpha|, \quad B = |\mathbf{M}_\beta|$$

В частности, для $w = 1$ получаем первую и вторую вариацию объема Ω

$$\int_{\partial\Omega} u_n dS + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

Во всем последующем сохраняем принятые ранее обозначения ([1], гл. IV).

2. Вычисление первой и второй вариаций измененной потенциальной энергии для стационарного движения твердого тела, содержащего жидкость. Рассмотрим абсолютно твердое тело с односвязной полостью произвольной формы, содержащей несжимаемую однородную идеальную жидкость (фигура). Положение тела и жидкости относительно неподвижной системы координат $O'x'_1x'_2x'_3$ будем определять координатами тела $q_j (j=1, \dots, n-1)$



и абсолютными x'_1, x'_2, x'_3 или относительными координатами x_1, x_2, x_3 частиц жидкости. Пусть наложенные на систему стационарные связи допускают вращение тела вокруг оси x'_3 , а заданные силы, действующие на частицы жидкости, обладают силовыми функциями $U_1(q_j)$ и $U_2(x_1, x'_2, x'_3)$ и не дают момента относительно оси x'_3 . Тогда существуют интеграл энергии и интеграл площадей для плоскости, ортогональной оси x'_3 , при этом измененная потенциальная энергия есть

$$W = \frac{k_0^2}{2I} - U_1 - \rho \int U_2 d\tau$$

где k_0 – значение постоянной площадей k для равномерного вращения всей системы как одного твердого тела вокруг оси x'_3 с угловой скоростью ω , I – момент инерции системы относительно оси x'_3 , ρ – плотность жидкости; выше и всюду далее объемные интегралы берутся по области τ , занимаемой жидкостью.

Уравнения стационарного движения получим из требования, чтобы $\delta W = 0$ при условии постоянства объема жидкости с точностью до членов первого порядка. Вычислив δW , получим известные уравнения

$$\frac{k_0^2}{2I_0} \frac{\partial I}{\partial q_j} + \frac{\partial U_1}{\partial q_j} + \rho \int \frac{\partial U_2}{\partial q_j} d\tau = 0 \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (2.1)$$

для координат q_j твердого тела в стационарном движении, а также уравнение

$$\frac{1}{2}\omega^2(x_1'^2 + x_2'^2) + U_2(x_1', x_2', x_3') = c_0 \left(\omega = \frac{k_0}{I_0} \right)$$

свободной поверхностью S жидкости в этом движении. Здесь I_0 — значение I для стационарного движения, величина постоянной c_0 определяется количеством жидкости в полости тела.

Вычислим вторую вариацию W при переходе от конфигурации, соответствующей стационарному движению, для которого все $q_j = 0$, к близкой конфигурации. Сообщим системе перемещение как одного твердого тела; свободная поверхность жидкости займет положение S , а затем переместим жидкость в измененное положение (перемещение точки поверхности S обозначим u). В рассматриваемой задаче область, заметаемая поверхностью $\partial\tau$, ограничивающей τ , совпадает с точностью до бесконечно малых величин не ниже третьего порядка с областью, заметаемой поверхностью S ; поэтому в формуле (1.1) $\partial\Omega$ (здесь $\partial\tau$) следует заменить на S . Всюду далее поверхностные интегралы берутся по поверхности S . Итак, имеем

$$\delta^2 W = \frac{k_0^2}{2} \left[\frac{(\delta I)^2}{I_0^3} - \frac{\delta^2 I}{I_0^2} \right] - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j - \frac{1}{2} \rho \int \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j d\tau - \\ - \frac{1}{2} \rho \left[\iint [\text{grad} U_2 \cdot u] u_n + U_2 (u \cdot n_1) \right] dS$$

Вычислим δI и $\delta^2 I$. В силу указанного выше запишем

$$I(q_j, \tau) - I(0, \tau_0) = [I(q_j, \tau_0) - I(0, \tau_0)] + [I(q_j, \tau) - I(q_j, \tau_0)]$$

В положении, в которое жидкость перемещают как твердое тело, имеем с точностью до членов первого порядка

$$x'^2 = x^2 + \sum_j \frac{\partial x'^2}{\partial q_j} q_j \quad (x'^2 = x_1'^2 + x_2'^2, \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2)$$

Следовательно, можно написать

$$\delta I = \sum_j \frac{\partial I}{\partial q_j} q_j + \rho J, \quad J = \iint x^2 u_n dS$$

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \rho \iint \sum_j \frac{\partial x'^2}{\partial q_j} q_j u_n dS + \frac{1}{2} \rho \iint [(\text{grad} x^2 \cdot u) u_n + x^2 (u \cdot n_1)] dS$$

Необходимое условие минимума W есть $\delta^2 W \geq 0$ для всех u , удовлетворяющих условиям постоянства объема жидкости:

$$\iint u_n dS = 0 \text{ в первом приближении} \quad (2.2)$$

$$\iint (u \cdot n_1) dS = 0 \text{ во втором приближении} \quad (2.3)$$

Учитывая условие (2.3), а также, что $f_0 = c_0$ на S и $\text{grad} f_0 = -|\text{grad} f_0| n$, поскольку в установившемся движении жидкость должна быть расположена с той стороны свободной поверхности, где $f_0 > c_0$, получаем

$$\delta^2 W = -\rho \sum_j \iint \frac{\partial f'}{\partial q_j} q_j u_n dS + \frac{k_0^2}{2I_0^3} \left(\sum \frac{\partial I}{\partial q_j} q_j + \rho J \right)^2 - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{k_0^2}{2I_0^3} \frac{\partial^2 I}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_j} + \rho \int \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_i \partial q_j} d\tau \right) q_i q_j + \frac{1}{2} \rho \iint |\text{grad} f_0| u_n^2 dS \quad (2.4)$$

$$f_0 = \frac{k_0^2}{2I_0^2} x^2 + U_2(x_i, 0), \quad f' = \frac{k_0^2}{2I_0^2} x'^2 + U_2(x_i, q_j)$$

Отметим, что $\delta^2 W$ зависит от нормальной составляющей u_n вектора u .

3. Вычисление второй вариации измененной потенциальной энергии для преобразованного твердого тела. Согласно теореме В.В. Румянцева ([1], гл. IV, § 4, теорема VIII) получим достаточное условие устойчивости стационарного движения, отыскивая минимум W для конфигурации, ограниченной поверхностью S' :

$$\frac{k_0^2}{2I(q_j, \tau)} x'^2 + U_2(x_i, q_j) = c$$

где постоянная c определяется количеством жидкости в полости тела, соответствующей преобразованному твердому телу.

Покажем, что если точка x_i описывает S , то в первом приближении точка $x_i + u_n n_i$ описывает S' . Действительно, в первом приближении имеем

$$U_2(x_i + u_n n_i, q_j) = U_2(x_i, 0) + u_n \operatorname{grad} U_2(x_i, 0) \cdot \mathbf{n} + \sum_j \left(\frac{\partial U_2(x_i, q_j)}{\partial q_j} \right)_0 q_j$$

$$x'^2(x_i + u_n n_i, q_j) = x^2 + u_n \operatorname{grad} x^2 \cdot \mathbf{n} + \sum_j \left(\frac{\partial x'^2}{\partial q_j} \right)_0 q_j$$

С другой стороны, можно написать

$$\frac{k_0^2}{2I^2(q_j, \tau)} = \frac{k_0^2}{2I_0^2} - \frac{k_0^2}{I_0^3} \delta I + \dots$$

Внося это в уравнение для S' , получаем

$$c - c_0 = -|\operatorname{grad} f_0| u_n + \sum_j \left(\frac{\partial f'}{\partial q_j} \right)_0 q_j - \frac{k_0^2}{I_0^3} x^2 \left[\sum_j \left(\frac{\partial I}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \rho J \right]$$

Из этого уравнения выразим составляющую u_n , линейно зависящую от $c - c_0$ и интеграла J . Умножая затем на x^2 и интегрируя по S , получим этот интеграл как функцию от q_j и $c - c_0$:

$$J = \frac{I_0^3}{K(x_1, x_2)} \left[-(c - c_0) \iint Q dS + \sum_j \left\{ \iint \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial q_j} \right)_0 - \frac{k_0^2}{I_0^3} x^2 \left(\frac{\partial I}{\partial q_j} \right)_0 \right] Q dS \right\} q_j \right]$$

$$K(x_1, x_2) = I_0^3 + k_0^2 \rho \iint \frac{x^4}{|\operatorname{grad} f_0|} dS, \quad Q(x_1, x_2) = \frac{x^2}{|\operatorname{grad} f_0|}$$

Внося это соотношение в выражение для u_n , получаем

$$u_n = A(x_1, x_2)(c - c_0) + \sum_j B_j(x_1, x_2) q_j$$

Здесь

$$A(x_1, x_2) = \frac{k_0^2 Q}{K(x_1, x_2)} \iint Q dS - |\operatorname{grad} f_0|^{-1}$$

$$B_j(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f''}{\partial q_j} \right)_0 |\operatorname{grad} f_0|^{-1} - \frac{k_0^2 Q}{K(x_1, x_2)} \iint \left(\frac{\partial f''}{\partial q_j} \right)_0 Q dS$$

$$f'' = f' - \frac{k_0^2}{I_0^3} x^2 I$$

и x_3 выражается на S как функция от x_1 и x_2 .

Из (2.2) находим

$$c - c_0 = - \sum_j \frac{\iint B_j dS}{\iint A dS} q_j$$

и окончательно

$$u_n = \sum_j \left[B_j(x_1, x_2) - A(x_1, x_2) \frac{\iint B_j dS}{\iint A dS} \right] q_j$$

Итак, u_n представляет собой линейную форму от q_j , коэффициенты которой являются функциями координат x_1 и x_2 точек поверхности S .

Внося значение u_n в выражение (2.4) для $\delta^2 W$, получим квадратичную форму параметров q_j . Записывая, что она является положительно определенной, получим достаточные условия устойчивости стационарного движения.

4. Пример. Устойчивость равномерного вращения твердого тела с неподвижной точкой и полостью, содержащей жидкость, в поле силы тяжести ([1], гл. IV, § 6). Рассмотрим в однородном поле силы тяжести твердое тело с одной неподвижной точкой O и полостью, содержащей жидкость. Ось x'_3 неподвижной системы координат с началом в точке O направим вертикально вверх. Подвижные оси, жестко связанные с телом, проведем так, чтобы ось x'_3 проходила через центр тяжести тела.

Используя принятые ранее обозначения [1], имеем

$$U = -Mg(x_{c1}\gamma_1 + x_{c2}\gamma_2 + x_{c3}\gamma_3)$$

$$I = A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2D\gamma_2\gamma_3 - 2E\gamma_3\gamma_1 - 2F\gamma_1\gamma_2$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Здесь M — масса системы, x_{ci} ($i = 1, 2, 3$) — координаты ее центра масс, γ — орт восходящей вертикали, A, B, C, D, E, F — моменты инерции системы относительно осей x_i и центробежные моменты инерции.

Уравнения стационарных движений имеют вид

$$\frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial I}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

Будем рассматривать решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1; \quad x_{c1} = x_{c2} = 0, \quad x_{c3} = x_{c3}^0; \quad D = E = 0$$

и предположим, что $F = 0$, так что x_1, x_2, x_3 — главные оси инерции системы в стационарном движении.

В рассматриваемом случае свободная поверхность S жидкости представляет собой параболоид вращения

$$\frac{1}{2}\omega^2 x^2 - gx_3 = c_0$$

причем постоянная c_0 определяется объемом жидкости.

Предположим, что свободная поверхность S проектируется на плоскость $x_1 O x_2$ в круговое кольцо с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$). Вычисление $\delta^2 W$ по формуле (2.4) приводит к выражению, совпадающему с полученным ранее ([1], с. 208, формула (4.71)).

Вычислим теперь $\delta^2 W$ для преобразованного твердого тела.

Сначала имеем

$$u_n = -\frac{1}{\omega^2 G} \left[c - c_0 + (\omega^2 x_3 + g)(x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) + \frac{\rho \omega^2 x^2}{I_0} \iint x^2 u_n dS \right] \quad (4.1)$$

$$(G = (x^2 + \omega^{-4} g^2)^{1/2})$$

Умножая обе части этого равенства на x^2 , интегрируя по S и замечая, что в силу симметрии вращения справедливо равенство

$$\iint (\omega^2 x_3 + g)(x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) G^{-1} dS = 0$$

получаем для интеграла, фигурирующего в (4.1), выражение, внося которое в (4.1),

получим

$$u_n = A(x_1, x_2)(c - c_0) - (\omega^2 x_3 + g)(x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) / (\omega^2 G)$$

Учитывая условие (2.2) и опять используя симметрию вращения, получим $c - c_0 = 0$ и

$$u_n = - \left(\frac{\omega^2}{2g} x^2 - \frac{c_0}{g} + \frac{g}{\omega^2} \right) (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) G^{-1}$$

Вернемся к выражению для $\delta^2 W$.

Вместе с полученным выражением' для u_n имеем $\iint x^2 u_n dS = 0$, и после вычисления соответствующего интеграла (переходом к полярным координатам на плоскости $x_1 O x_2$) приходим к выражению, найденному В.В. Румянцевым [1]

$$\begin{aligned} \delta^2 W = & -\frac{1}{2} \{ [\omega^2 (A - C) + M g x_{c3}^0] \gamma_1^2 + [\omega^2 (B - C) + M g x_{c3}^0] \gamma_2^2 \} + \\ & + \frac{1}{2} \pi \rho g \int_{R_2}^{R_1} \left[\frac{\omega^2}{g^2} \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - c_0 \right) + 1 \right]^2 r^3 dr (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

откуда следует анализ устойчивости стационарного движения.

Рассмотрим, следуя В.В. Румянцеву, случай, когда угловая скорость вращения очень велика. В этом случае свободная поверхность S жидкости в стационарном движении представляет собой круговой цилиндр $x^2 = b^2$, и после вычислений по формуле (2.4) получим выражение, отличающееся от (4.2) тем, что интегральное слагаемое заменено на

$$\rho \omega^2 \iint x_3 (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) u_n dS + \frac{1}{2} \rho \omega^2 b \iint u_n^2 dS$$

Вычислим теперь $\delta^2 W$ для преобразованного твердого тела.

Вычисление u_n упрощается. Полагая на S

$$x_1 = b \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta$$

и считая, что поверхность S пересекается с поверхностью полости по окружностям с центрами на оси x_3 в точках с координатами $x_3 = h \pm d$, аналогично изложенному выше получаем

$$u_n = -x_3 (\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta)$$

Внося это в выражение для $\delta^2 W$, снова получаем результат В.В. Румянцева [1].

5. Случай равновесия. Пример. В случае равновесия вычисления значительно упрощаются.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial q_j} + \rho \int \frac{\partial U_2}{\partial q_j} d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad U_2 = c_0$$

В выражении (2.4) для $\delta^2 W$ и формулах разд. 3 следует положить $k_0 = 0$ и соответственно $f_0 = U_2(x_i, 0)$, $f' = f'' = U_2(x_i, q_j)$.

Возьмем рассмотренный В.В. Румянцевым пример равновесия в поле силы тяжести твердого тела с одной неподвижной точкой и полостью, содержащей жидкость.

Будем рассматривать решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1; \quad x_{c1} = x_{c2} = 0, \quad x_3 = x_3^0$$

Используя выражения

$$U_2 = -g x_3' = -g(x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2 + x_3(1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{1/2}), \quad U_1 = -M_1 g x_{13}(1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{1/2}$$

где M_1 — масса твердого тела, а x_{13} — высота его центра тяжести в положении равновесия,

получаем

$$\delta^2 W = \rho g \iint (x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2) u_n dS - \frac{1}{2} \left[M_1 g x_{13} + \rho g \int x_3^2 d\tau \right] (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \frac{1}{2} \rho g \iint u_n^2 dS$$

Затем вычисляем u_n и аналогично предыдущему вновь приходим к результату В.В. Румянцева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Н.Г. Мазур, В.Н. Николаевский, Г.А. Эль

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ОБМЕН МЕЖДУ СЕЙСМИЧЕСКИМИ И УЛЬТРАЗВУКОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

На основе континуальной упругой нелинейной модели с микровращениями проводится расчет расхода сейсмической энергии в условиях длинно-коротковолнового резонанса в гранулированных геоматериалах (грунтах, нарушенных горных породах).

Воспользуемся уравнениями для одномерных нелинейных волн [1] в градиентно-согласованной упругой среде с микровращениями [2]

$$u_{TT} - c_1^2 u_{XX} - \delta u_{XXXX} - \nu u_X u_{XX} + 2\chi \varphi \varphi_X = 0 \quad (1)$$

$$\varphi_{TT} - c_2^2 \varphi_{XX} + \omega_0^2 \varphi - u_X (c_2^2 \varphi_{XX} - \mu \varphi) = 0$$

для оценки энергетического обмена в условиях длинно-коротковолнового резонанса (ДКР). Здесь u – смещение в сейсмической волне, φ – микроповорот, c_1 и c_2 – номинальные скорости сейсмической и микроротационной волн соответственно, δ , ν , ω_0^2 , χ , μ – упругие и инерционные коэффициенты. На основе более подробного анализа нелинейных коэффициентов, удовлетворяющих принципу [1] градиентного согласования, можно показать, что

$$\mu = \chi \quad (2)$$

Ограничимся далее линейным (по энергии !) анализом. Стандартный подход приводит к следующим выражениям для интенсивности сейсмического потока энергии и соответствующего ультразвукового потока:

$$W_s = c_1^2 \omega_s k_s \rho u^2 / 2, \quad W_{us} = c_2^2 \omega^* k^* \rho j \varphi^2 / 2 \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность, ρj – удельный момент инерции гранул среды, k_s – волновое число сейсмической волны, $\omega_s^2 = c_1^2 k_s^2 + \delta k_s^4$ – дисперсионное соотношение для сейсмических волн, ω^* и k^* – частота и волновое число ультразвука, возбужденного при ДКР [1].

Условие ДКР имеет вид [1]

$$\frac{d\omega_{us}}{dk}(k^*) = c_1$$

где $\omega_{us}^2 = c_2^2 k^2 + \omega_0^2$ служит дисперсионным соотношением для ультразвуковых волн.