

УДК 539.374

© 1997 г. Л.С. Новожилова, С.В. Ураждин

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕЙ ЛИНИЙ СКОЛЬЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Предлагается аналитическая реализация метода линий скольжения (метода характеристик) для статически определимых задач плоской пластической деформации идеальной жесткопластической среды. Решение задачи Римана (начальной характеристической задачи) с граничными условиями, заданными степенными рядами, представляется через обобщенные гипергеометрические функции. Другие краевые задачи (задача Коши, смешанная задача) сводятся к эквивалентным задачам Римана. Рассмотрены смешанная задача с прандтлевым трением на криволинейной поверхности контакта и задача Коши с произвольными гладкими начальными данными. Получено уравнение, определяющее форму свободной поверхности. Полученные аналитические представления радиусов кривизны характеристик в физической плоскости и в плоскости годографа скоростей используются для вычисления мощности диссипации в пластической области. На основе предложенного энергетического подхода в качестве приложения рассматриваются задачи редуцирования через длинную и короткую клиновые матрицы.

Расчет полей линий скольжения в прикладных задачах пластичности [1] производится обычно численными или графическими [2–3] методами. При этом отсутствует контроль точности вычислений. Кроме того, в рамках этого подхода не вычисляется мощность диссипации. Связанная с этой величиной и важная для приложений характеристика – усилие деформирования – определяется из статических условий. При этом возникают технические трудности нахождения произвольной постоянной при интегрировании напряжений вдоль секущей поверхности.

Точные решения известны лишь для немногих задач. Для частного случая полей, образованных круговыми дугами, аналитически найдена [4] мощность диссипации. Ниже этот подход обобщается для произвольных дуг, заданных рядами по степеням угловых (характеристических) координат. Гладкость начальных данных позволяет получить решение задачи Римана в удобной для вычислений форме из известного классического результата [5]. Сведение основных краевых задач к эквивалентной задаче Римана производится для более общих, чем в [6], краевых условий (криволинейная граница в смешанной задаче, задачи Коши с произвольными гладкими начальными данными).

Результаты вычисления усилия для поля линий скольжения, образованного круговыми дугами, совпадают с полученными ранее [4]. Для задачи редуцирования в длинной клиновой матрице вычисленные на основе предложенного энергетического подхода усилия деформирования сопоставляются со значениями, найденными [6] приближенно из статических условий.

1. Основные соотношения. Пусть однородное изотропное тело находится в состоянии плоской пластической деформации; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – поле скоростей, $(x, y) \in D$, D – проекция тела на плоскость xOy ; $\epsilon(\mathbf{u}) = [\epsilon_{ij}(\mathbf{u})]$ – тензор скоростей деформации, $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$; $[\sigma_{ij}]$ – тензор напряжений; σ – гидростатическое давление.

Предположим, что в области D выполнены следующие соотношения:

1) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.1)$$

(используется правило суммирования по повторяющимся индексам);

2) условие текучести Мизеса (k – пластическая постоянная)

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2$$

3) условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

4) условие совпадения направлений площадок максимального касательного напряжения и максимальной скорости деформации сдвига

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})/\sigma_{12} = (\epsilon_{11} - \epsilon_{22})/\epsilon_{12} \quad (1.3)$$

Известно [7], что уравнения (1.1) приводятся к системе квазилинейных уравнений гиперболического типа:

$$\partial\sigma/\partial x - 2k(\cos 2\varphi \partial\varphi/\partial x + \sin 2\varphi \partial\varphi/\partial y) = 0 \quad (1.4)$$

$$\partial\sigma/\partial y - 2k(\sin 2\varphi \partial\varphi/\partial x + \cos 2\varphi \partial\varphi/\partial y) = 0$$

где φ – угол наклона α -линии к оси абсцисс. Характеристики этой системы совпадают с линиями скольжения. Вдоль α - и β -линий соответственно выполнены соотношения Генки

$$\sigma - 2k\varphi = \text{const}, \quad \sigma + 2k\varphi = \text{const} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2), (1.3) также приводятся к системе уравнений гиперболического типа относительно компонент скорости, и характеристики этой системы совпадают с линиями скольжения.

В области, где оба семейства характеристик криволинейны, определим характеристические координаты (α, β) формулами

$$\alpha = \varphi/2 + (\sigma - \sigma_0)/(4k), \quad \beta = \varphi/2 - (\sigma - \sigma_0)/(4k)$$

где σ_0 – значение σ в начале координат. Геометрический смысл координат (α, β) ясен из фиг. 1.

Введем обозначения: $R(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$ – радиусы кривизны соответственно α - и β -линий в физической плоскости, $X(\alpha, \beta)$, $Y(\alpha, \beta)$ – проекции радиус-вектора точки $(x, y) \in D$ на направления линий скольжения в этой точке. Пусть (f_1, f_2) – любая из упорядоченных пар (R, S) , (X, Y) функций. Тогда выполнены соотношения

$$f_1 + \partial f_2 / \partial \alpha = 0, \quad f_2 - \partial f_1 / \partial \beta = 0 \quad (1.6)$$

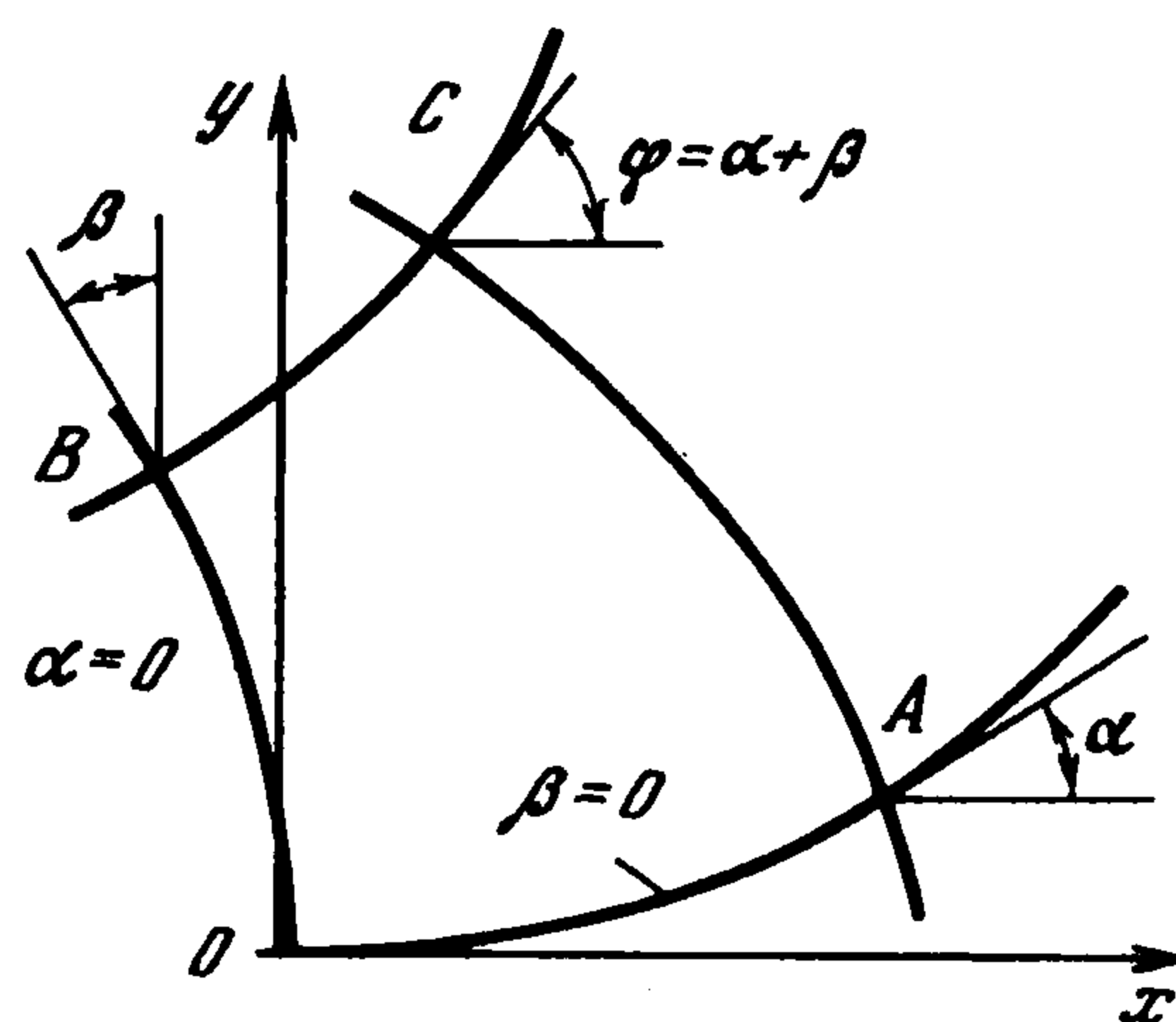
Отсюда следует, что любая из перечисленных функций удовлетворяет в области D телеграфному уравнению

$$\partial^2 f / \partial \alpha \partial \beta + f = 0 \quad (1.7)$$

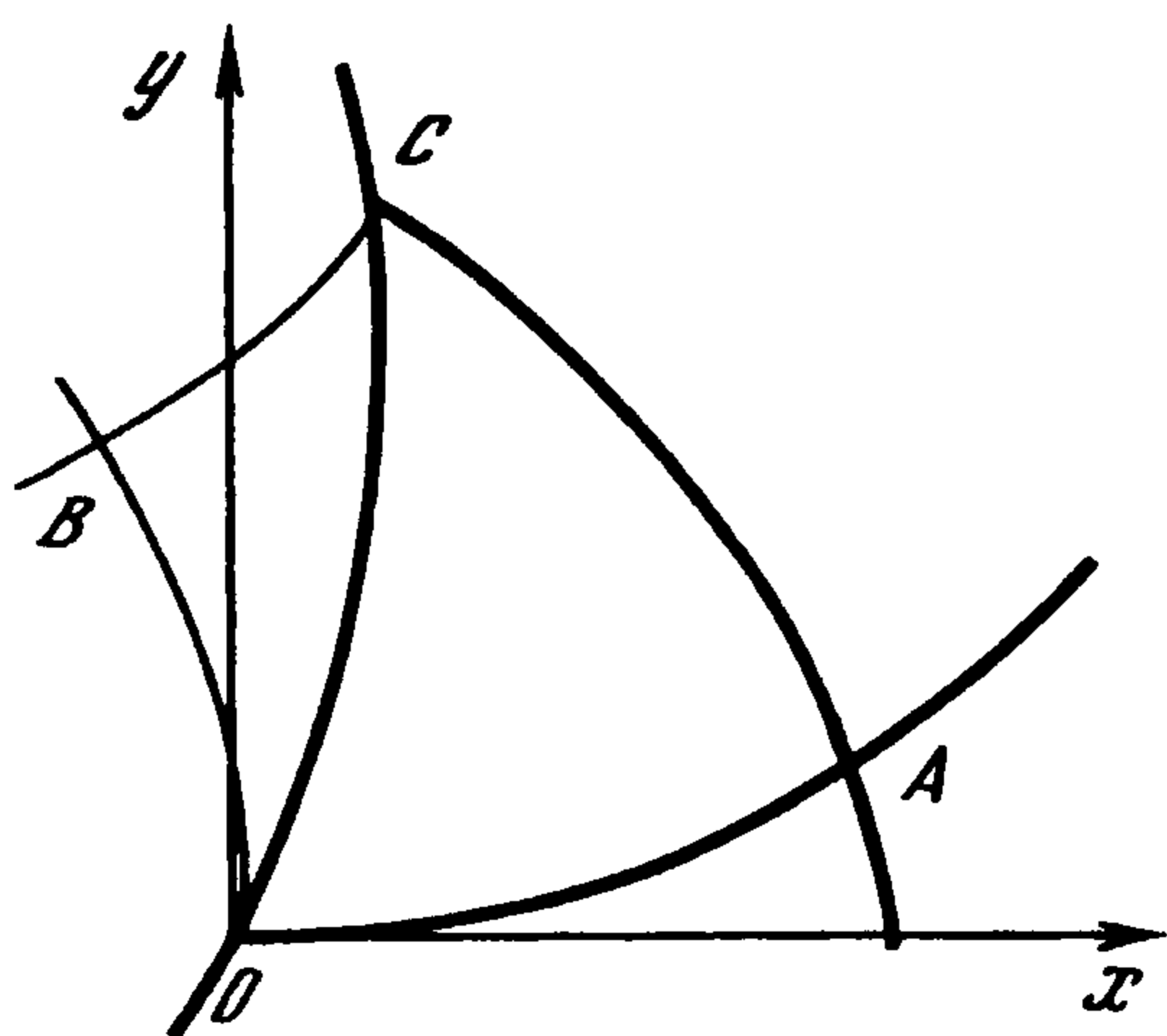
2. Некоторые краевые задачи. Задача Римана. Пусть искомая функция $f(x)$ задана на отрезках линий скольжения OA и OB (фиг. 1)

$$f(\alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad f(0, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \beta_n, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_1 \quad (2.1)$$

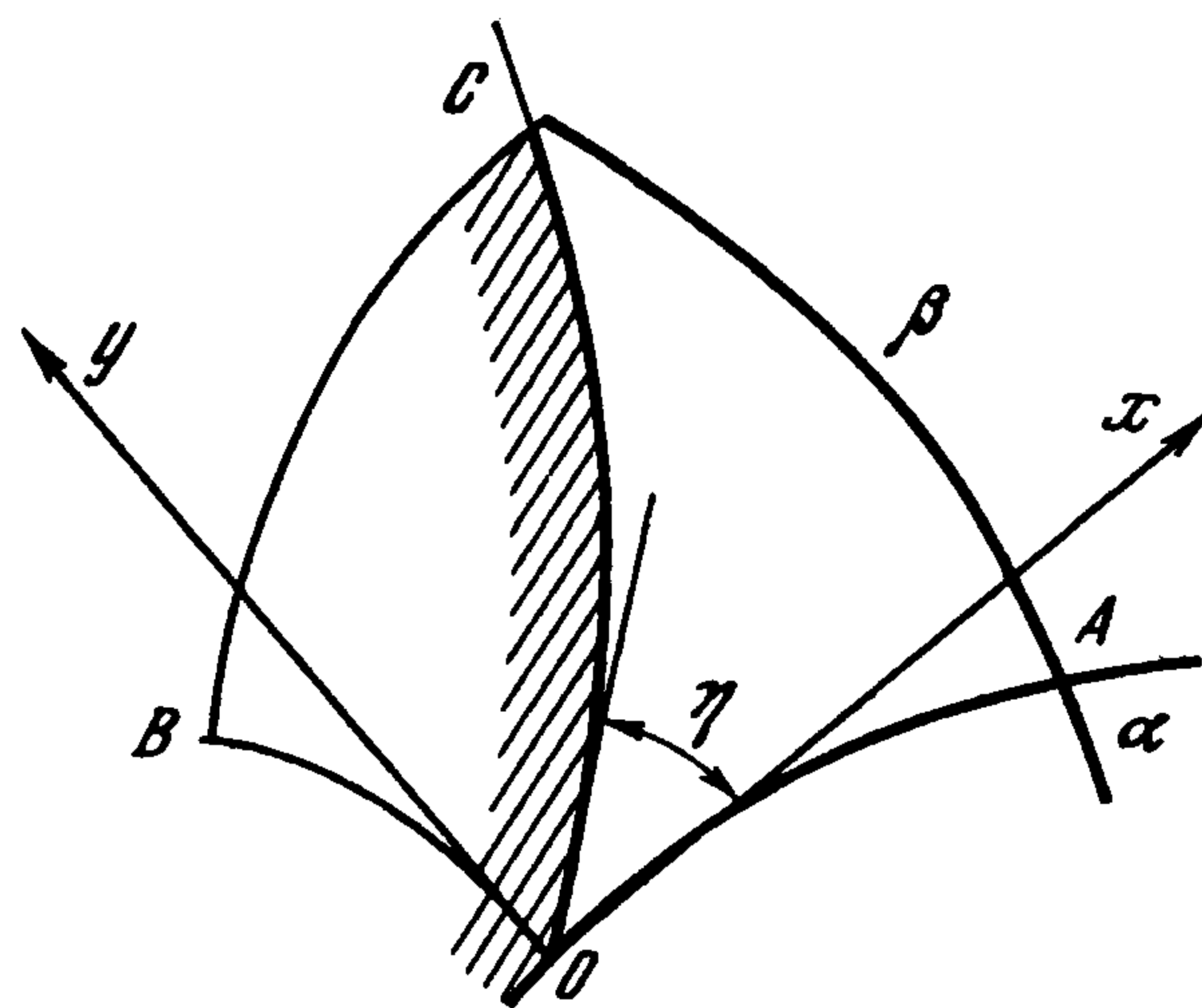
где c_n, d_n – заданные числа, $\alpha_n = \alpha^n/n!$, $\beta_n = \beta^n/n!$. Решение задачи (1.7), (2.1) сущест-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

вует и единственно в характеристическом прямоугольнике $OACB$ [8]. Это решение определяется формулой [5]

$$f(\alpha, \beta) = c_0 J_0(2\sqrt{\alpha\beta}) + \sum_{n>0} c_n \frac{\partial^n I_0(2\sqrt{\alpha\beta} i)}{\partial \beta^n} + d_n \frac{\partial^n I_0(2\sqrt{\alpha\beta} i)}{\partial \alpha^n}$$

где $J_n(z)$, $I_n(z)$ – функции Бесселя соответственно вещественного и мнимого аргумента.

Используя функциональные соотношения для специальных функций [9], последнее равенство можно преобразовать к виду

$$f(\alpha, \beta) = c_{00} F_1(1, -\alpha\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \alpha_n + d_n \beta_n)_0 F_1(n+1, -\alpha\beta) \quad (2.2)$$

$${}_0F_1(k+1, z) = k! \sum_{t=0}^{\infty} z_t / (t+k)!$$

Формула (2.2) остается верной, если координаты α и/или β отрицательны. Пусть теперь характеристики OA и OB заданы своими радиусами кривизны

$$R(\alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad S(0, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta_n, \quad 0 \leq \beta \leq \beta_1 \quad (2.3)$$

Используя (1.6), получим недостающие граничные условия

$$R(0, \beta) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta_{n+1}, \quad S(\alpha, 0) = b_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_{n+1}$$

В силу (2.2) решение задачи Римана для $R(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$ получим в виде

$$R(\alpha, \beta) = a_{00} F_1(1, -\alpha\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_{n-1} \beta_n)_0 F_1(n+1, -\alpha\beta) \quad (2.4)$$

$$S(\alpha, \beta) = b_{00} F_1(1, -\alpha\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \beta_n - a_{n-1} \alpha_n)_0 F_1(n+1, -\alpha\beta)$$

Задача Коши. Пусть на кривой OC , нигде не имеющей характеристического направления (фиг. 2), заданы функции $\sigma = \sigma(\gamma)$, $\varphi = \varphi(\gamma)$. Здесь и далее γ – угол между касательной к кривой OC и осью Ox . Решение системы (1.4) с такими начальными данными существует и единственно в характеристическом треугольнике OAC [8].

Найдем радиусы $R(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$ кривизны характеристик физической плоскости. Из (1.5) можно получить на OC зависимость

$$\sigma(\gamma) = \sigma_0 + 2k(\alpha(\gamma) - \beta(\gamma))$$

Так как $\varphi(\gamma) = \alpha(\gamma) + \beta(\gamma)$, отсюда можно определить $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$. С точностью до

бесконечно малых высшего порядка имеем

$$R(\alpha(\gamma), \beta(\gamma)) d\alpha/\cos \eta = -S(\alpha(\gamma), \beta(\gamma)) d\beta/\sin \eta = r(\gamma) d\gamma \quad (2.5)$$

где $r(\gamma)$ – радиус кривизны OC , $\eta = \gamma - \varphi(\gamma)$ – угол между касательной к OC и α -линией, проходящей через точку касания.

Предположим, что функции $r(\gamma)$, $\alpha(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ – суммы степенных рядов с равномерно ограниченными коэффициентами. Тогда из (2.5) можно получить граничные условия вида (2.3) эквивалентной задачи Римана.

Рассмотрим частный случай. Пусть на OC заданы нормальное и касательное напряжения: $\sigma_n = \text{const}$, $\tau_n = \text{const}$. Тогда имеем на OC

$$\alpha = \beta, \quad \eta = (\pi - \arccos(\tau_n/k))/2 = \text{const}$$

Обозначив $r(\gamma) = r(2\alpha + \eta)$ через $r(\alpha)$, получим из (2.5)

$$R(\alpha, \alpha)/\cos \eta = -S(\alpha, \alpha)/\sin \eta = \pm 2r(\alpha) \quad (2.6)$$

Подставляя сюда (2.4) при $\alpha = \beta$, можно получить рекуррентные соотношения для определения коэффициентов a_k , b_k .

Применим эту схему к модельной задаче о теле с круговым отверстием радиуса a , нагруженным равномерным нормальным давлением. Тогда $\eta = \pi/4$. Из (2.6) при $r(\alpha) = a$ с учетом (2.4) получим формулы

$$a_0 = a\sqrt{2}, \quad b_0 = -a\sqrt{2}$$

$$\sum_{n+2t=k} (-1)^t \frac{a_n + b_{n-1}}{t!(n+t)!} = 0, \quad \sum_{n+2t=k} (-1)^t \frac{b_n - a_{n-1}}{t!(n+t)!} = 0, \quad k > 0$$

Отсюда $a_n = a\sqrt{2}$, $b_n = (-1)^{n+1} a\sqrt{2}$, поэтому $R(\alpha, 0) = a\sqrt{2} e^\alpha$, $S(0, \beta) = -a\sqrt{2} e^{-\beta}$, т.е. линии скольжения – логарифмические спирали.

В приложениях важен случай, когда $\sigma_n = \tau_n = 0$ на OC (свободная от напряжений часть границы), но уравнение OC в физической плоскости неизвестно. Если известна одна из характеристик, например α -линия, то из (2.6) определяются радиус кривизны кривой OC

$$r(\alpha) = R(\alpha, \alpha)/\sqrt{2}$$

и рекуррентные формулы для коэффициентов b_n

$$a_n + b_{n-1} + b_n - a_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

(для упрощения записи введены обозначения $a_{-1} = b_{-1} = 0$).

Смешанная задача. Пусть задан отрезок α -линии OA и угол $\varphi = \gamma - \eta(\gamma)$ на гладкой, нигде не имеющей характеристического направления, кривой OC : $x = x(\gamma)$, $y = y(\gamma)$, $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ (фиг. 3). Такая задача возникает, например, если OC – линия контакта, на которой справедлив закон трения Прандтля: $\tau_n = \mu k$, $0 \leq \mu \leq 1$. Далее полагаем, что на линии контакта действует прандтлево трение. Тогда $\eta = \text{const}$. Пусть $\beta = \beta(\alpha)$ – уравнение кривой OC в $\alpha\beta$ -плоскости. Тогда аналогично (2.6) имеем на OC

$$R(\alpha, \beta(\alpha))/\cos \eta = \pm S(\alpha, \beta(\alpha)) \beta' / \sin \eta = \pm r(\alpha + \beta(\alpha) + \eta)(1 + \beta') \quad (2.7)$$

Рассмотрим частные случаи.

1°. OC – отрезок прямой. Тогда $\alpha + \beta = 0$ на OC . Пусть для определенности $R(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$ одного знака. Аналогично предыдущему из первого уравнения (2.7) с учетом (2.4) получим рекуррентные формулы для коэффициентов b_n

$$(a_n + (-1)^n b_{n-1}) \operatorname{tg} \eta - (-1)^n b_n + a_{n-1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

2°. OC – дуга окружности радиуса a . Пусть уравнение OC в характеристической плоскости есть $\beta = \beta(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \alpha_k$.

Тогда из (2.7) можно получить рекуррентные формулы для коэффициентов b_n, c_k :

$$a_0 / \cos \eta = a(1 + c_1), \quad -a_0 \operatorname{tg} \eta = b_0 c_1$$

$$(a_1 + b_0 c_1) / \cos \eta = a c_2, \quad -(a_1 + b_0 c_1) \operatorname{tg} \eta = (-a_0 + b_1 c_1) c_1 + b_0 c_2 \dots$$

Аналогичный подход можно применить для произвольной кривой в предположении, что $\beta(\alpha)$ есть сумма степенного ряда.

Таким же образом можно получить решения краевых задач для $X(\alpha, \beta), Y(\alpha, \beta)$.

3. Пластическая мощность. Пусть пластическая область D есть объединение областей D_i ($i = 1, 2, \dots, l$), где D_i – одна из следующих областей: 1) криволинейный характеристический прямоугольник; 2) криволинейный характеристический треугольник, гипотенуза которого лежит на линии контакта; 3) криволинейный характеристический треугольник, гипотенуза которого лежит на свободной поверхности; 4) область простого напряженного состояния; 5) область равномерного напряженного состояния [7].

Предположим, что выполнены следующие условия.

1°. В каждой области D_i определены локальные декартовы координаты. Начало координат назовем базовой точкой области D_i . Оси Ox, Oy направлены соответственно вдоль α - и β -линий, проходящих через базовую точку. Одна из локальных систем координат объявляется глобальной.

2°. В каждой области D_i вводятся локальные характеристические координаты, отсчет которых проводится от осей координат локальной декартовой системы координат. Локальные характеристические координаты и радиусы кривизны характеристик сохраняют знак в каждой области D_i .

3°. С каждой точкой $M(\alpha, \beta)$ области D_i связана следящая система координат, начало которой совпадает с базовой точкой, а оси координат повернуты на угол $\alpha + \beta$ относительно осей локальной декартовой системы координат.

4°. Пусть D_i – криволинейный характеристический прямоугольник, C – точка, диагонально противоположная базовой точке, D'_i – образ области D_i в плоскости годографа. Базовой точкой в D'_i является образ точки C , а локальная декартова система координат повернута относительно следящей системы в точке C на угол $\pi/2$. Для областей других видов аналогичные соотношения станут ясны из примеров.

Если для определенности $D_i = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1\}$, то из 4° следует, что локальные характеристические координаты (α', β') в плоскости годографа связаны с характеристическими координатами в физической плоскости формулами

$$\alpha' = \alpha - \alpha_1, \quad \beta' = \beta - \beta_1.$$

Пластическая мощность W в области D определяется формулой [7]

$$W / k = \sum_{i=1}^l \iint_{D_i} H dx dy + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} |[u]_j| dl \quad (3.1)$$

где $H = \sqrt{2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформации сдвига, l_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – линии разрыва скорости, $[u]_j$ – скачок вектора скорости на линии l_j .

Пусть $\rho(\alpha', \beta'), \delta(\alpha', \beta')$ – радиусы кривизны характеристик в плоскости годографа скоростей. Известно [3], что каждая из этих функций удовлетворяет телеграфному уравнению (1.7), в котором переменные α, β можно заменить на α', β' . В характеристических координатах имеем [3]

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$

$$H = 2|\varepsilon_{12}| = |\rho(\alpha', \beta') / R(\alpha, \beta) - \delta(\alpha', \beta') / S(\alpha, \beta)|$$

где (α', β') – образ в плоскости годографа точки (α, β) физической плоскости.

Анализ свойств отображения сетки характеристик в плоскость годографа при выполнении условий 1°–4° показывает, что выражение под знаком модуля в последней формуле сохраняет знак в любой области D_i . Это позволяет вычислить двойные интегралы в (3.1) в локальных характеристических координатах.

Пусть, например, $D_i = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1\}$. Тогда

$$W_i = \pm k \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} (\delta(\alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1) R(\alpha, \beta) - \rho(\alpha - \alpha_1, \beta - \beta_1) S(\alpha, \beta)) d\alpha d\beta$$

Здесь $R(\alpha, \beta)$, $S(\alpha, \beta)$, $\rho(\alpha', \beta')$, $\delta(\alpha', \beta')$ – решения соответствующих задач Римана в физической плоскости и в плоскости годографа, которые имеют вид (2.4). Последний интеграл может быть легко вычислен. Аналогичные вычисления можно проделать, если область D_i – характеристический треугольник, в котором поставлена задача Коши или смешанная задача.

Если D_i – область простого напряженного состояния, заданная для определенности условиями $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = 0$, то $S = \infty$. Пластическую мощность следует в этом случае вычислять в полярной системе координат, согласованной с линиями скольжения (см. разд. 4).

4. Примеры. 1°. Редуцирование полосы сквозь короткую клиновую матрицу. Схема деформации и соответствующий годограф изображены на фиг. 4. Радиусы R_0, S_0 определяются из элементарных соображений, а величина V_1 – условием несжимаемости. Начальные условия для задач Римана имеют вид

$$R(\alpha, 0) = R_0, \quad S(0, \beta) = -S_0$$

$$\rho(\alpha', 0) = \delta(0, \beta') = \rho_0, \quad \rho_0 = |V_1 - V_2| / \sqrt{2}$$

Из (2.4) имеем (для упрощения записи опущены индексы в обозначении ${}_0F_1$ гипергеометрической функции)

$$R(\alpha, \beta) = R_0 F(1, -\alpha\beta) - S_0 \beta F(2, -\alpha\beta) \quad (4.1)$$

$$S(\alpha, \beta) = -S_0 F(1, -\alpha\beta) - R_0 \alpha F(2, -\alpha\beta)$$

$$\rho(\alpha', \beta') = \rho_0 (F(1, -\alpha'\beta') + \beta' F(2, -\alpha'\beta'))$$

$$\delta(\alpha', \beta') = \rho_0 (F(1, -\alpha'\beta') - \alpha' F(2, -\alpha'\beta'))$$

Вычисляя пластическую мощность в характеристическом прямоугольнике, получим

$$\frac{W_1}{k} = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} (\delta R - \rho S) d\beta d\alpha = 2\rho_0 (R_0 (\alpha_1)_2 \beta_1 + S_0 \alpha_1 (\beta_1)_2) F(3, \alpha_1 \beta_1) +$$

$$+ \rho_0 (R_0 + S_0) (2\alpha_1 \beta_1 F(2, \alpha_1 \beta_1) - F(1, \alpha_1 \beta_1) + 1)$$

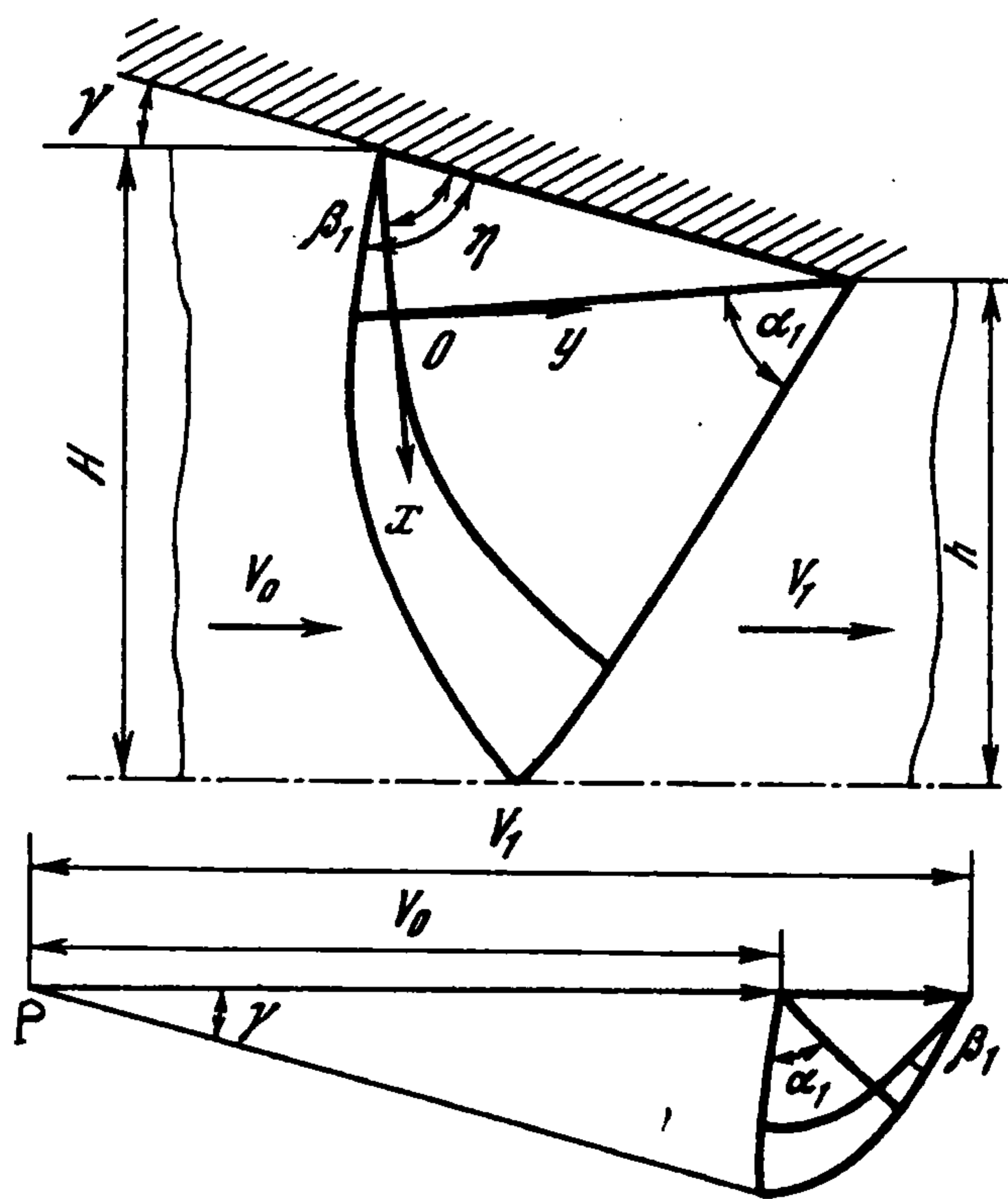
Вычислим пластическую мощность для центрального веера $D_2 = \{(\alpha, \beta): 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = 0\}$ в полярной системе координат. Совместим полюс полярной системы координат с вершиной веера, а полярную ось направим вдоль радиуса. Так как $R(\alpha, r) = r, S = \infty$, то, используя (1.6), (4.1), получим

$$\frac{W_2}{k} = \int_0^{R_0} \int_0^{\alpha_1} \rho(\alpha - \alpha_1, \beta_1) d\alpha dr = -R_0 \int_0^{\alpha_1} \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} d\alpha = R_0 \rho_0 (\alpha_1 F(2, \alpha_1 \beta_1) + F(1, \alpha_1 \beta_1) - 1)$$

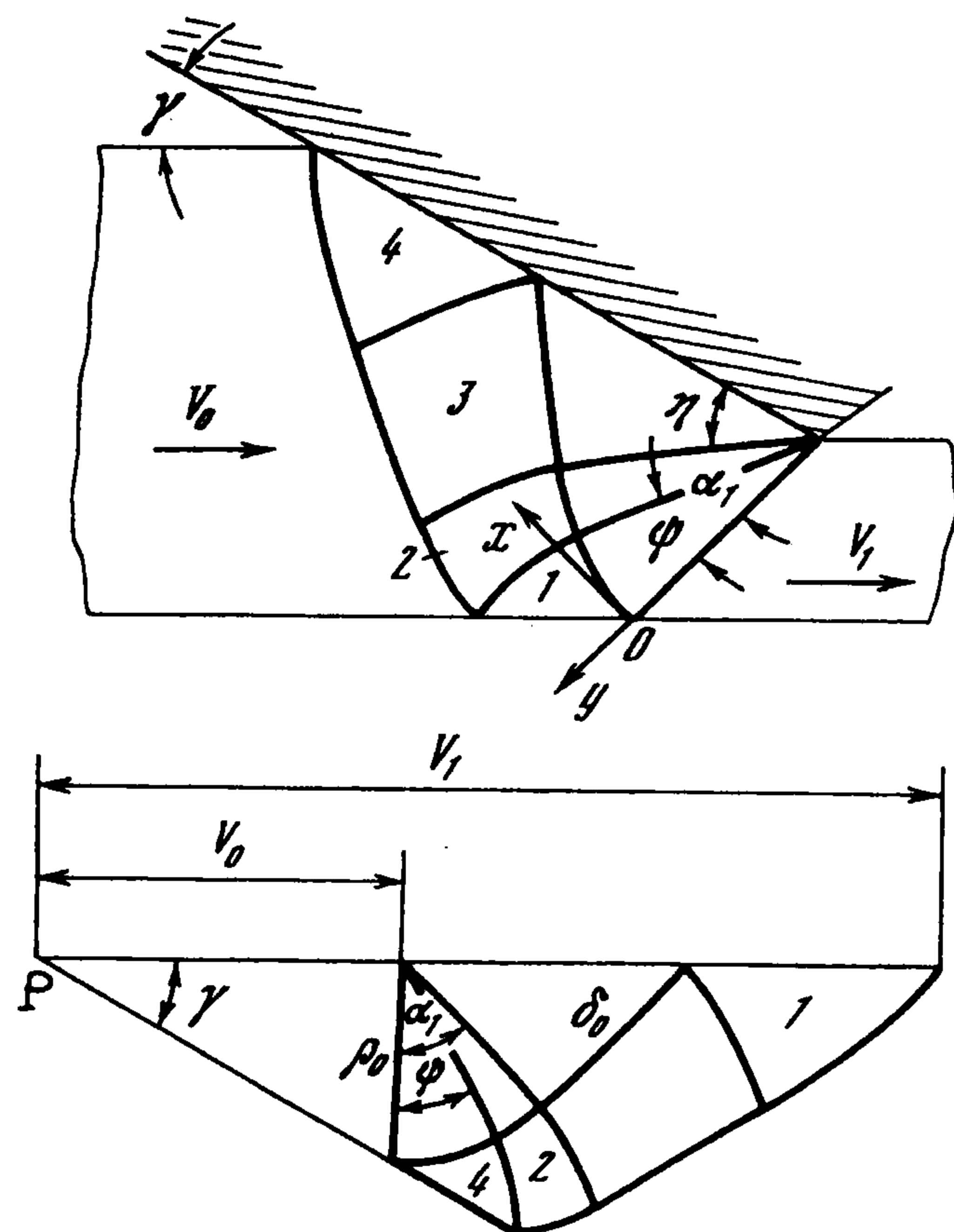
Аналогичное выражение получается для второго веера. Интегрируя скачки скорости вдоль линий, ограничивающих пластическую область, и суммируя все полученные выражения, найдем мощность для всей области D

$$W / (k\rho_0) = \alpha\beta (R_0\alpha + S_0\beta) F(3, \alpha\beta) + 2(R_0\alpha + (R_0 + S_0)\alpha\beta + S_0\beta) F(2, \alpha\beta) + (R_0 + S_0) F(1, \alpha\beta)$$

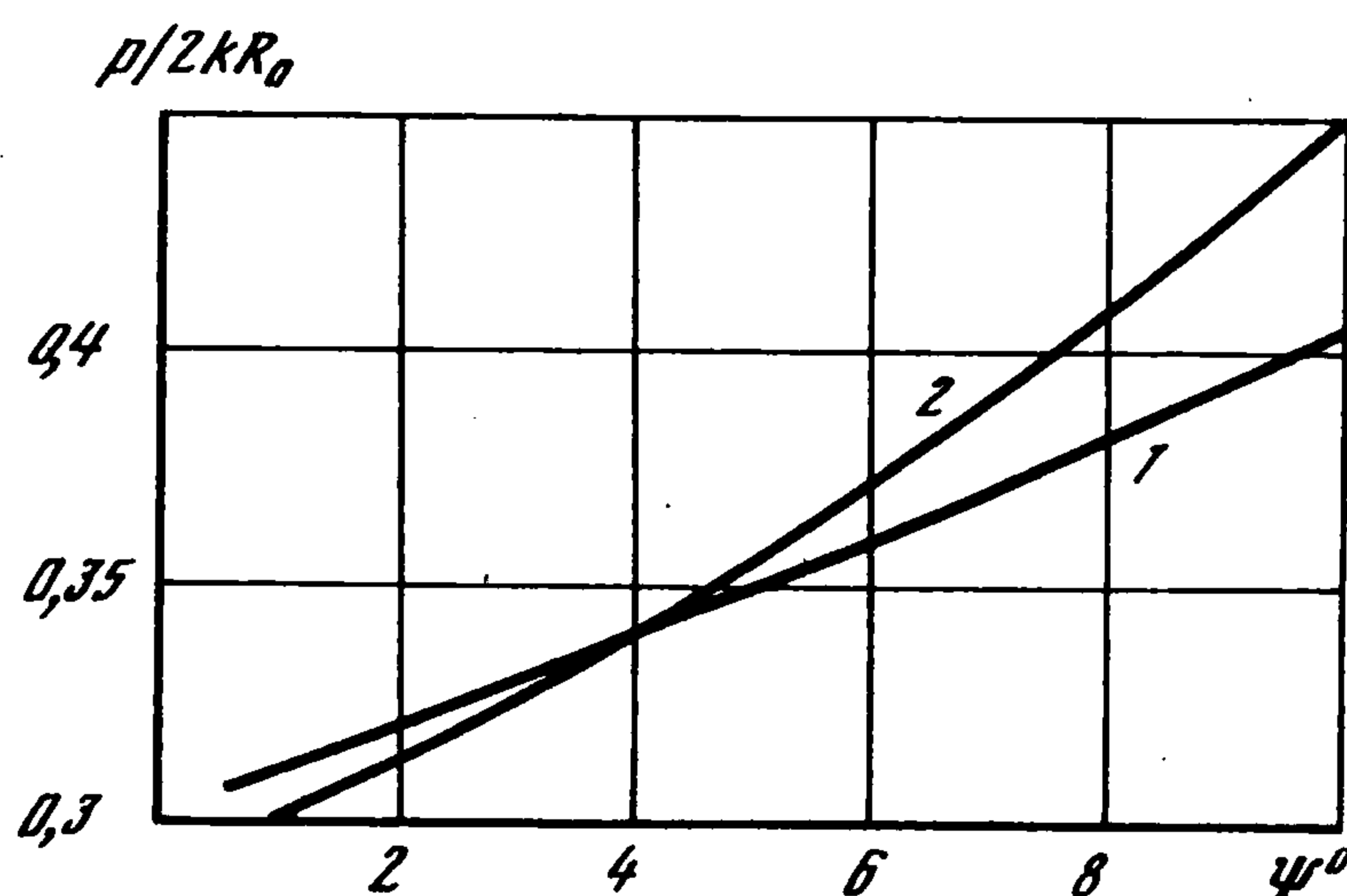
где $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Используя соотношения между гипергеометрическими функциями и функциями Бесселя, последнюю формулу можно привести к виду

$$W/(k\rho_0) = (R_0 + S_0)(\xi_1 |_1(\xi_1) + |_0(\xi_1)) + 2(R_0\alpha_1 + S_0\beta_1)|_0(\xi_1), \quad \xi_1 = 2\sqrt{\alpha_1\beta_1}$$

что совпадает с формулой энергосодержания из [4].

2°. Редуцирование полосы в длинной клиновой матрице. Схема деформации и соответствующий годограф изображены на фиг. 5. В силу симметрии область D_1 в физической плоскости образована круговыми дугами равных радиусов $R_0 = S_0$, D_3 — область простого напряженного состояния. Граничные β -линии в D_3 являются эквидистантными кривыми. На основании результатов разд. 2 последовательно решаются краевые задачи: в физической плоскости (в областях D_1, D_2 — задачи Римана, в D_4 — смешанная задача) и в плоскости годографа. Результаты вычисления мощности в соответствии с разд. 3 можно представить в виде повторных рядов.

Так, например, пластическая мощность в области D_1 представляется рядом вида

$$\sum_{t,s=0}^{\infty} A_{ts} \psi_{t+s+1} \psi_s$$

где коэффициенты A_{ts} зависят от геометрических параметров пластической области и допускают равномерную по s оценку

$$|A_{ts}| \leq C 2^t / (t-1)!$$

Можно показать, что все полученные повторные ряды мажорируются экспоненциальным рядом. На фиг. 6 (кривая 2) представлены результаты вычислений полного усилия деформирования $p = W/N_0$, выполненных с точностью $\epsilon = 10^{-5}$, для редуцирования с нулевым трением в длинной матрице с полууглом конусности $\gamma = 10^\circ$. Для сравнения там же приведены результаты [6] (кривая 1), полученные при тех же исходных данных из статических условий. Усилие нормировано множителем $2kR_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 271 с.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
4. Журавлев А.З., Ураждин В.И. Об энергосиловых зависимостях в поле линий скольжения, образованном круговыми дугами // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 130–134.
5. Geiringer H. Fondements mathematiques de la theorie des corps plastiques isotropes. Paris: Gauthier-Villars, 1937. 89 p.
6. Johnson W., Sowerby R., Venter R.D. Plane Strain Slip – Line Fields for Metal – Deformation Processes. Oxford et all: Pergamon Press, 1982. 364 p.
7. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
9.VI.1995