

УДК 539.3 : 539.4

© 1997 г. Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ ТЕРМОУПРУГИХ ЗАДАЧ РАЦИОНАЛЬНОГО АРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Ставится задача армирования плоских конструкций равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения с учетом теплового воздействия. Исследуются свойства решения такой задачи, определяемые управлением теплопроводности и условием постоянства поперечных сечений волокон. Анализируется влияние температурного поля на структуру армирования.

Ранее [1] была дана постановка задачи рационального армирования (РА) плоских композитных конструкций двумя семействами высококомодульных равнонапряженных волокон постоянного поперечного сечения без учета теплового воздействия. Соответствующая система уравнений обладает рядом особенностей, затрудняющих исследование свойств ее решений в общем случае. Ниже исследуются некоторые свойства решений задач РА, поставленных при менее стеснительных, чем в [1], ограничениях и с учетом температурного поля.

1. Исходные уравнения. Полная система уравнений, описывающая поведение плоских конструкций, нагруженных и армированных N семействами волокон в своей плоскости, имеет вид (материалы связующего и волокон предполагаются изотропными, а их поведение – линейно-упругим):

уравнения равновесия и дифференциальные соотношения Коши

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = -b_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.2)$$

соотношения Дюгамеля – Неймана [2]

$$\sigma_{ij} = a\sigma_{ij}^c + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ii}^c = Ea_1(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)\theta), \quad \sigma_{ij}^c = Ea_2\varepsilon_{ij}$$

$$j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \quad a_1 = 1/(1 - \nu^2), \quad a_2 = 1/(1 + \nu)$$

$$l_{k1} = \cos \alpha_k, \quad l_{k2} = \sin \alpha_k, \quad a = 1 - \Omega, \quad \Omega = \sum_k \omega_k$$

условие равнонапряженности волокон

$$\sigma_k = E_k \varepsilon_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{11}l_{k1}^2 + \varepsilon_{22}l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12}l_{k1}l_{k2} - \alpha_{ak}\theta$$

условия постоянства поперечных сечений волокон [1]

$$(\omega_k l_{k1})_{,1} + (\omega_k l_{k2})_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

Наличие теплового воздействия не только влияет на структуру РА, но и само тем-

пературное поле в конструкции существенно зависят от параметров РА, что приводит к связанным задачам определения структуры армирования и температурного поля. При решении столь сложной проблемы, как РА конструкций равнонапряженными волокнами, естественно ориентироваться на такие модели теплопроводности, которые описывают основные термические свойства композиции и имеют в то же время наиболее простой вид для последующего анализа.

Для однонаправленно армированного материала интегральный коэффициент продольной теплопроводности в первом приближении хорошо описывается законом простой смеси, определение же интегральных коэффициентов поперечной теплопроводности требует привлечения специального математического аппарата [3]. На основе гипотез, подобных использованным [4] для вывода компонент тензора податливости однонаправленно армированного упругого материала, получим: величина, обратная интегральному коэффициенту поперечной теплопроводности, определяется по правилу смесей величин, обратных коэффициентам теплопроводности волокна и связующего. (Образованные таким путем усредненные коэффициенты теплопроводности являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы). Для композитного материала, армированного N семействами волокон в параллельных плоскостях, интегральные коэффициенты теплопроводности определим за счет осреднения (пропорционально функциям ω_k) коэффициентов теплопроводности однонаправленно армированных слоев. Усредненные таким образом коэффициенты теплопроводности всего пакета (Λ_{ij}) будут коэффициентами положительно определенной квадратичной формы, если выполняются физические ограничения

$$0 < \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad \Omega < 1 \quad (1.6)$$

а уравнение плоской стационарной теплопроводности принимает вид

$$(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})_{,2} = -w \quad (1.7)$$

$$\Lambda_{ij} = \Omega^{-1} \sum_k \omega_k \{ [\Omega(\lambda_k - \lambda_c) + \lambda_c] l_{ki} l_{kj} + (-1)^{i+j} l_{kl} l_{km} \lambda_k \lambda_c [\Omega(\lambda_c - \lambda_k) + \lambda_k]^{-1} \},$$

$$l = 3 - i, \quad m = 3 - j, \quad i, j = 1, 2$$

В уравнениях (1.1)–(1.7) использованы обозначения: $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ – компоненты усредненных напряжений и деформаций; σ_{ij}^c – компоненты напряжений в связующем; σ_k, ϵ_k – напряжение и механическая деформация в арматуре k -го семейства; ω_k – интенсивность армирования волокном k -го семейства; α_k – угол между касательной к траектории волокна k -го семейства и осью x_1 ; a – интенсивность прослоек связующего (при некоторых дополнительных предположениях можно принять $a = \text{const}$, как сделано, например, в [1]); E, E_k – модули Юнга материалов связующего и арматуры k -го семейства, ν – коэффициент Пуассона связующего; u_i, b_i – компоненты перемещения и массовой распределенной нагрузки по направлениям x_i прямоугольной декартовой системы координат; причем $b_i = \left(a\rho_c + \sum_k \omega_k \rho_k \right) F_i \quad (i = 1, 2)$; ρ_c, ρ_k – массовые плотности материалов связующего и волокон k -го семейства; F_i – компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы; α_c, α_{ak} – коэффициенты линейного теплового расширения связующего и арматуры k -го семейства; λ_c, λ_k – коэффициенты теплопроводности связующего и арматуры k -го семейства; θ – отклонение текущей температуры конструкции от температуры ее естественного состояния; w – интенсивность внутренних источников тепла; суммирование (здесь и далее) производится по указанному индексу от 1 до N , если не проставлены пределы; нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате x_i .

На одной части контура конструкции (Γ_p) могут быть заданы статические граничные условия

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s) \quad (1.8)$$

$$(\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s)$$

на другой (Γ_u) – кинематические,

$$u_i(\Gamma_u) = u_{i0}(s), \quad i = 1, 2 \quad (1.9)$$

и на всем контуре Γ – тепловые,

$$\chi_0[(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})n_1 + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})n_2 + q_0] + \chi_1(\theta - \theta_0) = 0 \quad (1.10)$$

(каждое из условий (1.8), (1.9) может быть задано также на всем контуре Γ , ограничивающем область G , занимаемую конструкцией в плане). Здесь $n_1 = \cos \beta$, $n_2 = \sin \beta$, β – угол, задающий направление внешней нормали к Γ ; p_n, p_τ – нормальное и касательное напряжение на контуре соответственно; u_{i0} – перемещения на контуре; $q_0(s)$ – тепловой поток через поверхность, ограничивающую конструкцию; $\theta_0(s)$ – разность между температурой окружающей среды на контуре и температурой конструкции в естественном состоянии; χ_0, χ_1 – функции переключения, позволяющие выбрать тот или иной тип тепловых граничных условий; s – параметр, определяющий контур.

Так как уравнения (1.5) являются следствиями интегральных законов сохранения поперечных сечений волокон [1], то функции ω_k можно задавать только на той части контура (Γ_ω), на которой волокна входят в конструкцию. Поэтому на Γ_ω нужно выбрать начальные условия

$$\omega_k(\Gamma_\omega) = \omega_{nk}(s), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.11)$$

(не путать с начальными условиями в нестационарных задачах механики).

2. Система разрешающих уравнений. Для приведения системы (1.1)–(1.5), (1.7) и граничных условий (1.8) к разрешающему виду необходимо соотношения (1.2) подставить в (1.3), (1.4), а результат – в (1.1), (1.8), после чего получится замкнутая система уравнений и граничных условий, содержащая в качестве неизвестных перемещения u_i , параметры армирования ω_k, α_k и температуру θ :

$$\begin{aligned} & (-1)^i \sum_k \sigma_k \omega_k l_{kj} \partial_{sk}(\alpha_k) + E \left\{ a a_1 [u_{i,ii} + \nu u_{j,ij} + \frac{1}{2}(1-\nu)(u_{j,ij} + u_{i,jj})] - \right. \\ & \left. - a \alpha_c \theta_{,i} (1-\nu)^{-1} - \sum_k \{ a_1 [u_{i,i} + \nu u_{j,j} - \alpha_c (1+\nu) \theta] \omega_{k,i} + \frac{1}{2} a_2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \omega_{k,j} \} \right\} = -b_i \\ & j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\partial_{sk}(\alpha_k) + \omega_k \partial_{nk}(\alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

$$\partial_{sk}(u_1) \cos \alpha_k + \partial_{sk}(u_2) \sin \alpha_k - \alpha_{ak} \theta = \varepsilon_k = \text{const} \quad (2.3)$$

$$(\Lambda_{11}\theta_{,1} + \Lambda_{12}\theta_{,2})_{,1} + (\Lambda_{21}\theta_{,1} + \Lambda_{22}\theta_{,2})_{,2} = -w \quad (2.4)$$

где $\partial_{sk}, \partial_{nk}$ – операторы дифференцирования по направлениям, касательным и нормальным к траектории армирования k -го семейства:

$$\partial_{sk}(f) = f_{,1}l_{k1} + f_{,2}l_{k2}, \quad \partial_{nk}(f) = -f_{,1}l_{k2} + f_{,2}l_{k1} \quad (2.5)$$

f – произвольная дифференцируемая функция.

Граничные условия (1.8) принимают вид $((x_1, x_2) \in \Gamma_p)$:

$$\sum_k \sigma_k \omega_k \cos^2(\alpha_k - \beta) + E a a_1 [n_1^2 (u_{1,1} + \nu u_{2,2}) + n_2^2 (\nu u_{1,1} + u_{2,2}) + (1 - \nu)(u_{1,2} + u_{2,1}) n_1 n_2 - \alpha_c \theta a_2^{-1}] = p_n(s) \quad (2.6)$$

$$\sum_k \sigma_k \omega_k \sin 2(\alpha_k - \beta) + E a a_2 [2 n_1 n_2 (u_{2,2} - u_{1,1}) + (n_1^2 - n_2^2)(u_{1,2} + u_{2,1})] = 2 p_\tau(s)$$

Остальные условия (1.9)–(1.11) оставим без изменения.

Система разрешающих уравнений (2.1)–(2.4) и граничные условия (1.10), (2.6) показывают, что задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции, поля температур и параметров РА связаны и решать их необходимо совместно.

Для определения типа системы (2.1)–(2.4) воспользуемся детерминантным методом [5]. Так как уравнения (2.3) не содержат старших производных от неизвестных функций, то характеристический определитель этой системы тождественно равен нулю. Поэтому для выяснения ее типа необходимо каждое уравнение (2.3) продифференцировать, например, применив операторы ∂_{sk} . Характеристическое уравнение преобразованной системы имеет вид

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{11} x_2'^2 - 2 \Lambda_{12} x_2' + \Lambda_{22}) \left\{ \frac{1}{2} E^2 a^2 a_1 a_2 (1 + x_2'^2)^2 + \frac{1}{2} E a a_1 a_2^{-1} \sum_k s_k \xi_k^3 \eta_k - \right. \\ & \left. - \sum_{i,j} s_i s_j \xi_i^2 \xi_j^2 \sin^2(\alpha_i - \alpha_j) + \sum_{n=1,2} (\sigma_{n2}^c - \sigma_{1n}^c x_2') \left[\sum_j \omega_j \eta_j (l_{jm} [-\frac{1}{2} E a a_1 a_2^{-1} x_2' + \right. \right. \\ & \left. \left. + (-1)^n \sum_k l_{kn}^2 \xi_k^2 s_k] - \left[E a a_1 \kappa_n + (-1)^n \sum_k l_{k1} l_{k2} \xi_k^2 s_k \right] l_{jn} \right) \Delta_j^{-1} \right] \right\} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_N = 0, \quad m = 3 - n \quad (2.7) \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi_k = l_{k2} - l_{k1} x_2', \quad \eta_k = l_{k1} + l_{k2} x_2', \quad \kappa_1 = 1 + \frac{1}{2} (1 - \nu) x_2'^2$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} (1 - \nu) + x_2'^2, \quad s_k = \sigma_k \omega_k \Delta_k^{-1}, \quad \Delta_k = l_{k2} \partial_{sk}(u_1) - l_{k1} \partial_{sk}(u_2) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

производная $x_2'(x_1) = dx_2 / dx_1$ задает направление характеристики. Сомножители, стоящие в (2.7) после фигурной скобки, указывают на то, что преобразованная система разрешающих уравнений имеет N действительных характеристик, совпадающих с траекториями армирования. Трехчлен, стоящий в выражении (2.7) перед фигурными скобками, имеет только комплексные корни x_2' .

Действительно, в разд. 1 отмечалось, что при выполнении ограничений (1.6) коэффициенты Λ_{ij} при произвольных параметрах армирования являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы, а значит, для них выполняется неравенство

$$D = (-2 \Lambda_{12})^2 - 4 \Lambda_{11} \Lambda_{22} < 0 \quad (2.8)$$

В силу этого указанный трехчлен в (2.7) имеет только комплексные корни.

Следовательно, система разрешающих уравнений при учете теплового воздействия имеет два комплексных характеристических направления. Выражение, заключенное в (2.7) в фигурных скобках, является алгебраическим многочленом четвертого порядка

относительно x'_2 , который в зависимости от значений неизвестных функций и их произвольных может иметь различное количество действительных корней, поэтому система разрешающих уравнений (2.1)–(2.4) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [6].

3. Некоторые свойства решения системы (2.1)–(2.4). В настоящее время теория уравнений смешанно-составного типа разработана весьма неполно [6], чтобы можно было аналитически исследовать свойства решения системы (2.1)–(2.4) в общем виде. Однако некоторые свойства решения этой системы можно указать.

Отрицательное значение дискриминанта D в (2.8) означает, что уравнение (2.4), записанное в дивергентной форме, относительно функции θ при произвольных параметрах армирования α_k, ω_k ($1 \leq k \leq N$) при учете ограничений (1.6) удовлетворяет условиям эллиптичности [5]. Значит, функция температуры θ при отсутствии внутренних источников тепла ($w = 0$) может достигать своих наибольшего и наименьшего значений только на контуре Γ . В частности, отсюда следует, что при $w = 0$ и при задании в граничных условиях (1.10) на всем контуре Γ постоянного значения θ_0 ($\chi = 0, \chi_1 = 1$) или нулевого теплового потока $q_0 = (\chi_0 = 1, \chi_1 = 0)$ функция θ во всей конструкции будет также постоянна и равна θ_0 . Следовательно, в этом случае задачу теплопроводности можно считать решенной независимо от решения задачи РА, хотя структура РА по-прежнему будет существенно зависеть от уровня нагрева или охлаждения конструкции.

Исследуем теперь некоторые свойства функций интенсивности армирования ω_k , удовлетворяющих условиям постоянства поперечных сечений волокон (2.2). Предположим, что в конструкции каким-то образом уложены волокна, т.е. известны траектории армирования. Тогда, интегрируя уравнения (2.2) вдоль траекторий армирования, начиная от контура Γ_ω , на котором заданы начальные условия (1.11), получим

$$\omega_k = \omega_{ik} \exp\left(-\int_0^{l_k} \partial_{nk}(\alpha_k) dl_k\right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

где l_k – переменная длина дуги вдоль выбранной траектории армирования k -го семейства. Из равенства (3.1) следует, что знак функции ω_k полностью определяется знаком начального значения ω_{ik} . Поэтому, если задать функции ω_{ik} так, чтобы они удовлетворяли первым N неравенством (1.6), то эти неравенства будут справедливы для ω_k во всех точках конструкции. Кроме того, если $\omega_{ik} = 0$, то функция ω_k будет равна нулю вдоль всей формальной траектории армирования. Следовательно, при решении задачи РА нужно фактически контролировать выполнение лишь последнего неравенства (1.6). (Нарушение этого неравенства физически означает "выпучивание" волокон из плоскости армирования).

Оказывается, что семейство траекторий волокон постоянного поперечного сечения не может иметь огибающей.

Для доказательства воспользуемся формой условия постоянства поперечных сечений волокон [1]

$$\oint_L \omega_k \mathbf{n}_L dl = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

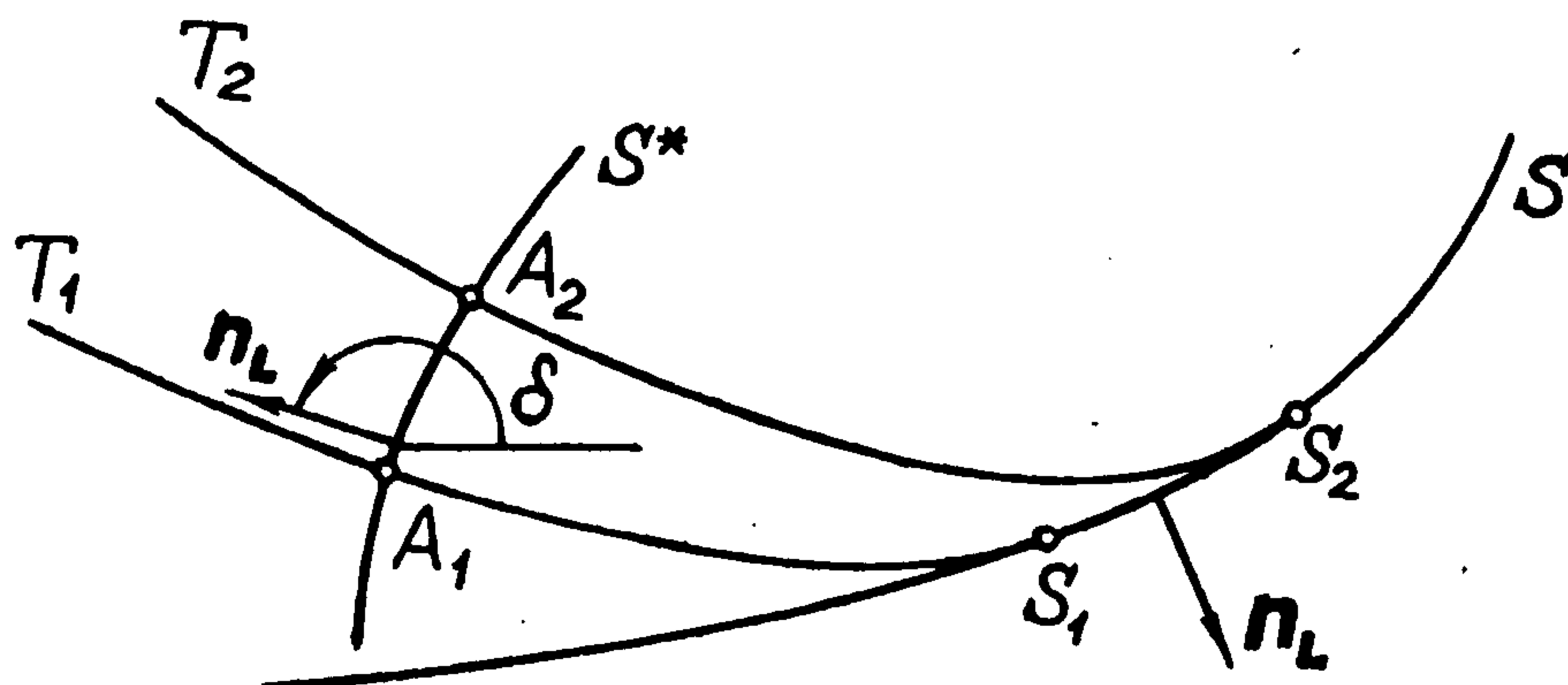
где ω_k – вектор с компонентами $\omega_{ki} = \omega_k l_{ki}$ ($i = 1, 2$), $\mathbf{n}_L$ – единичный вектор внешней нормали к контуру L , ограничивающему произвольную односвязную область $V \subset G$.

Доказательство проведем от противного. Пусть k -е семейство волокон огибается некоторой кривой S . Следовательно, каждая траектория касается кривой S в некоторой точке (фиг. 1). Выделим из этого семейства две траектории T_1, T_2 , которые имеют с S точки касания S_1, S_2 . На траектории T_2 зададим точку A_2 , отличную от S_2 , и из нее проведем кривую S^* так, чтобы касательные к ней были перпендикулярны к семейству траекторий армирова-

ния. Точку пересечения кривой S^* с траекторией T_1 обозначим через A_1 (все эти условия можно выполнить, если выбрать две близкие траектории T_1, T_2). Для замкнутого кусочно-гладкого контура $L = A_1 S_1 S_2 A_2 A_1$ имеет место условие (3.2), которое перепишем в виде

$$\oint_L \omega_k \cos(\alpha_k - \delta) dl = \int_{S_1 S_2} \omega_k \cos(\alpha_k - \delta) dl + \int_{A_2 A_1} \omega_k \cos(\alpha_k - \delta) dl = 0 \quad (3.3)$$

где δ – угол, задающий направление вектора n_L ; интегралы по криволинейным отрезкам $A_1 S_1$ и $S_2 A_2$ равны нулю из-за ортогональности на них векторов ω_k, n_L . В силу самого пост-



Фиг. 1

роения кривой S^* на отрезке $A_2 A_1 \subset S^*$ $\alpha_k - \delta = \pi$, поэтому, при выполнении на этом отрезке условия $\omega_k > 0$ можно (3.3) переписать в виде

$$\int_{S_1 S_2} \omega_k \cos(\alpha_k - \delta) dl = \int_{A_2 A_1} \omega_k dl = c > 0 \quad (3.4)$$

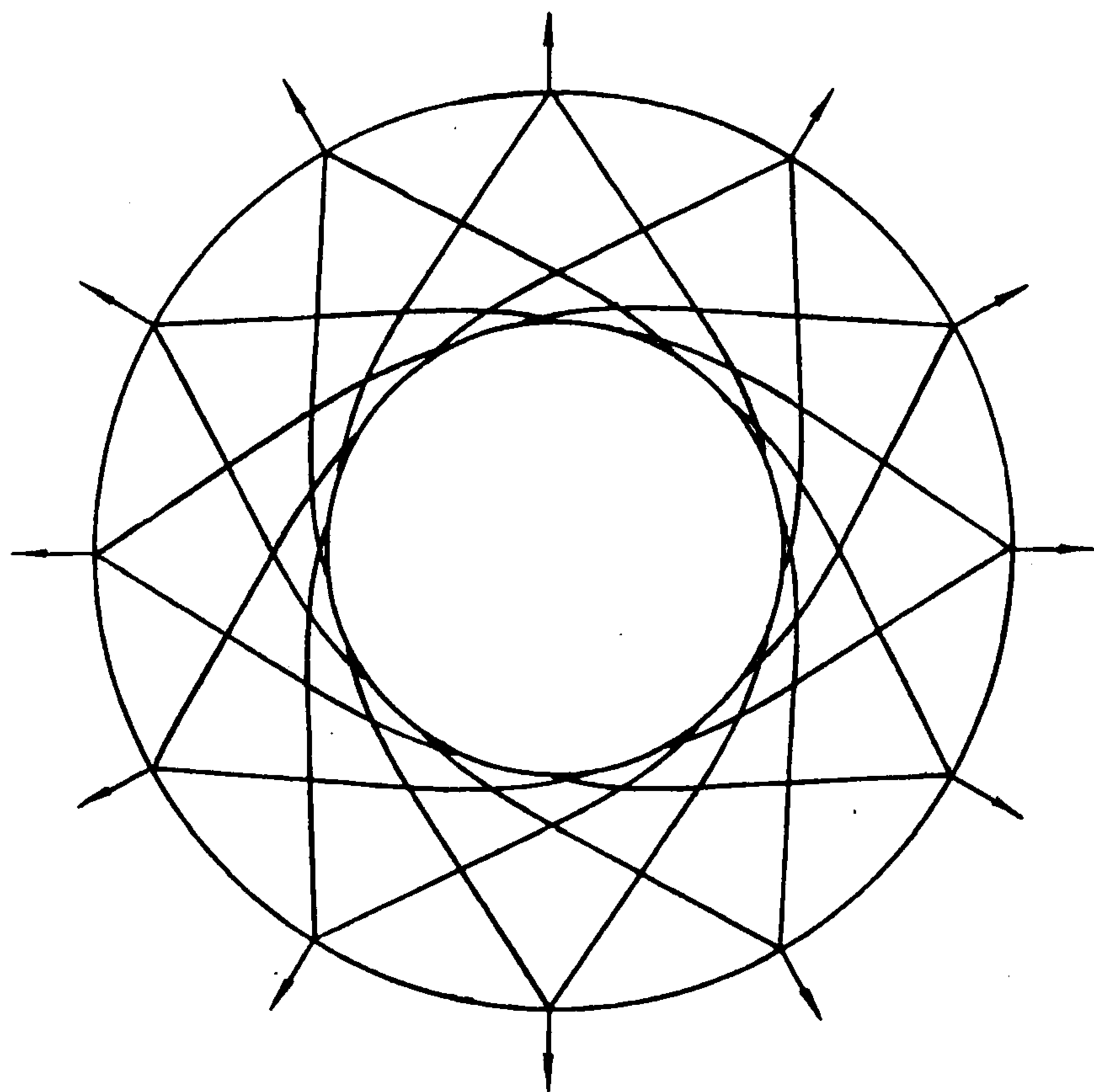
Но так как кривая S – огибающая k -го семейства волокон, то на криволинейном отрезке $S_1 S_2 \subset S$ имеет место равенство $\cos(\alpha_k - \delta) = 0$. Следовательно, чтобы левый интеграл в (3.4) был положителен, необходимо неограниченное возрастание функции ω_k с приближением к кривой S , а значит, вблизи огибающей семейства траекторий армирования будет нарушаться последнее условие (1.6). Таким образом, полученное противоречие показывает, что семейство волокон постоянного поперечного сечения не может иметь огибающей; в частности, траектории армирования таких волокон не могут по касательным направлениям приближаться к контуру конструкции.

Пусть теперь область G , занимаемая армированной конструкцией, двусвязна и ограничена внешним контуром Γ_1 и внутренним контуром Γ_2 . Допустим, что на некотором криволинейном отрезке $A_1 A_2 \subset \Gamma_1$, ограниченном точками A_1 и A_2 , волокна k -го семейства входят в область G , а на криволинейном отрезке $S_1 S_2 \subset \Gamma_2$, ограниченном точками S_1 и S_2 , эти же волокна выходят из области G ; причем точки A_1 и S_1 принадлежат одной траектории армирования, а точки A_2 и S_2 – другой. При этом вновь будет справедливо равенство (3.3). Начнем стягивать внутренний контур Γ_2 в некоторую точку, тогда длина криволинейного отрезка $S_1 S_2$ (вместе с длиной контура Γ_2) будет стремиться к нулю. Так как интеграл по отрезку $A_2 A_1$ в (3.3) остается постоянным и отличным от нуля, а длина отрезка $S_1 S_2$ стремится к нулю, то функция ω_k на этом отрезке должна неограниченно возрастать при стягивании контура Γ_2 в точку, что нарушает последнее неравенство (1.6). Следовательно, если в двусвязной конструкции волокна постоянного поперечного сечения входят в конструкцию на одном контуре, а выходят на другом, то нельзя получить армированную односвязную конструкцию путем стягивания внутреннего контура в точку.

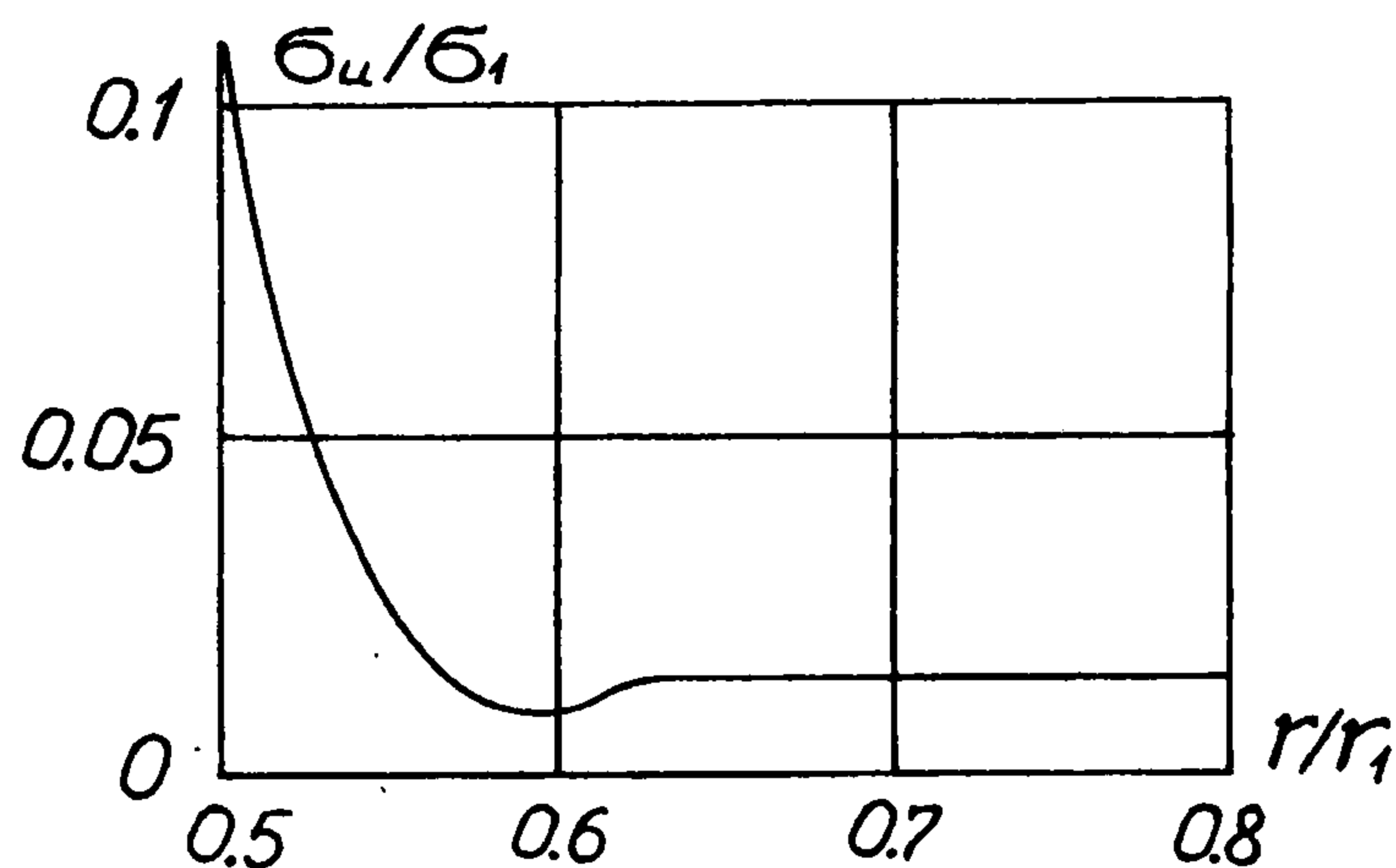
Во многих задачах РА в двусвязных конструкциях выполняются именно такие условия укладки волокон. Поэтому для односвязной конструкции, в которую волокна

входят на всем контуре, ее ограничивающем, необходимо вводить замкнутую линию разрыва решения, на которой волокна выходили бы из армированной подобласти, а внутри области, ограниченной этой линией разрыва решения, структура материала должна быть известной (например, выполнена из изотропного материала). Такие задачи можно называть задачами РА с подкреплением, механические характеристики которого известны.

Приведенный выше математический аппарат можно применить к доказательству следующего факта: волокна постоянного поперечного сечения одного и того же семейства не могут пересекаться и не могут асимптотически приближаться к одной и той же кривой, так как при этом будет нарушаться последнее неравенство (1.6).



Фиг. 2



Фиг. 3

Полученные выше результаты, основанные на условии постоянства поперечных сечений волокон, остаются справедливыми для любых плоских конструкций и пластин, армированных такими волокнами, а не только для плоских композитных конструкций с рациональной укладкой арматуры.

Остановимся на вопросе неединственности решения задачи РА. Действительно, статические, кинематические и тепловые граничные условия (1.9), (1.10), (2.6) естественны в задачах механики деформируемого твердого тела и определяются конкретными условиями эксплуатации конструкции. Начальные же условия для интенсивностей армирования (1.11) являются "технологическими" условиями, задающимися количеством волокон k -го семейства, внедряемых в конструкцию на данном участке контура. Выбор количества внедряемых волокон в определенной степени произволен, он удовлетворяет лишь ограничениям (1.6) и условиям существования соответствующего проекта РА. Следовательно, задача РА обладает функциональными произволами, связанными с начальными условиями (1.11), и чем больше количество

семейств волокон, тем больше количество этих произволов. Варьируя начальные условия (1.11), можно получать целые "пучки" решений задачи РА, из которых можно выбирать проекты с определенными свойствами, например с наименьшим расходом армирующих волокон или с наименьшей интенсивностью напряжений в связующем, или с наименьшей податливостью, или наиболее удобные с точки зрения технологической реализации. Это означает, что рациональными проектами можно управлять. Более того, в силу существенной нелинейности статических и тепловых граничных условий относительно функций α_k , ω_k , задача РА может иметь несколько решений даже при фиксированных начальных условиях (1.11). Все это еще больше расширяет "спектр" решений задачи РА, из которого можно выбрать наиболее практически осуществимые проекты.

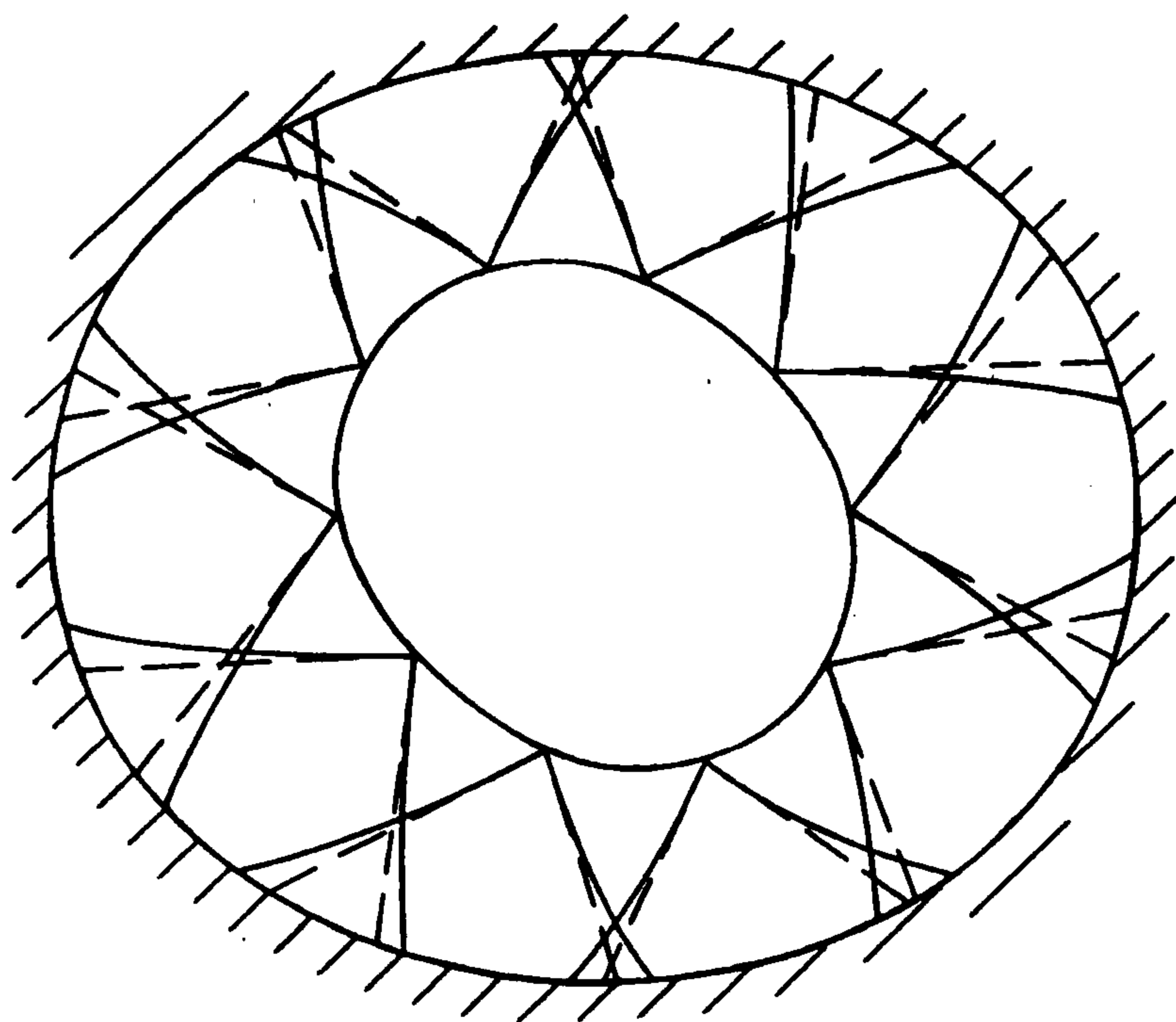
4. Анализ некоторых решений задачи РА. В плоских конструкциях несущие элементы воспринимают соизмеримые напряжения на площадках, различного ориентированных по двум направлениям, поэтому с практической точки зрения в плоских задачах РА вполне достаточно внедрять в конструкцию два семейства равнонапряженных волокон. По этой причине в приведенных ниже примерах примем $N = 2$.

Рассмотрим сначала задачу РА кольцевой пластины, ограниченной окружностями радиусов r_0, r_1 : $r_0 = 0,5r_1$. Внутренний контур свободен от нагружения: $p_n = p_\tau = 0$, а к внешнему – приложена равномерная нормальная нагрузка: $p_n = 0,08\sigma_1$, $p_\tau = 0$. Распределенные массовые нагрузки и тепловое воздействие не учитываются: $b_1 = b_2 = \theta = 0$. Механические характеристики материалов связующего и волокон определяются равенствами: $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$, $E_1 = E_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_{a1} = \alpha_{a2}$, $E = 0,01E_1$, $\lambda_1 / \lambda_c = \alpha_{a1} / \alpha_c = 1,5$, $\nu = 0,25$, т.е. волокна выполнены из одного материала. Начальные условия для интенсивности армирования выберем на внешнем контуре: $\omega_{n1}(r_1) = \omega_{n2}(r_1) = 0,05$. Для этих осесимметричных входных данных был получен проект РА; траектории армирования, ему соответствующие, и график интенсивности напряжений в связующем ($\sigma_u(r)$) приведены на фиг. 2, 3.

Эта задача вызывает особый интерес по следующим соображениям. Внутренний контур свободен от нагружения, поэтому нормальные к нему усредненные напряжения σ_{nn} будут равны нулю, но напряжения в фазах композиции, составляющие σ_{nn} , при этом отличаются от нуля. Действительно, как видно из фиг. 2, траектории армирования равнонапряженных волокон подходят к внутреннему контуру по направлениям, близким к касательным (они не могут быть касательными, как было показано в разд. 3). Близость траекторий к касательным существенно снижает вклад напряжений в волокнах в усредненные напряжения σ_{nn} , но в силу некоторого отличия траекторий от касательных этот вклад не равен нулю, поэтому он при $r = r_0$ должен быть компенсирован напряжениями в связующем. С другой стороны, как показано в разд. 3, близость траекторий армирования к линиям, касательным к внутреннему контуру, приводит к резкому увеличению функций ω_1, ω_2 при $r \rightarrow r_0 + 0$, а это влечет за собой резкое уменьшение интенсивности прослоек связующего $a = (1 - \omega_1 - \omega_2)$ при $r \rightarrow r_0 + 0$. Малое значение отношения E/E_1 и резкое уменьшение a приводят к тому, что для компенсации в σ_{nn} вклада от напряжений в волокнах деформации вблизи внутреннего контура должны достигать по модулю больших значений. Этот факт нашел наглядное отражение на графике функции $\sigma_u(r)$ (фиг. 3): интенсивность напряжений в связующем быстро нарастает при $r \rightarrow r_0 + 0$. На порядок превышая значения $\sigma_u(r)$ в удаленных от внутреннего контура точках конструкции. (Для сравнения здесь уместно отметить, что в изотропной пластине с теми же размерами и тем же нагружением отношение интенсивности напряжений на внутреннем контуре к той же величине на внешнем контуре равно $\sigma_u(r_0)/\sigma_u(r_1) = 1,84$.)

Если провести асимптотический анализ системы (2.1)–(2.6), приняв в качестве малого параметра отношение E/E_1 , то при отсутствии массовых распределенных нагрузок первые приближения для траекторий армирования будут прямыми линиями. Траектории армирования, приведенные на фиг. 2, согласуются с этим выводом, так как почти во всей конструкции они близки к прямым. Яркая выраженная кривизна у них наблюдается лишь в окрестности внутреннего контура, что вызвано, очевидно, большими деформациями в этой окрестности.

Приведенный пример наглядно отражает тот факт, что требование выполнения условий равнонапряженности высокомодульных волокон во всей конструкции с заданными уровнем напряжений является очень жестким. Это требование, с одной стороны, не может быть реализовано в ряде конструкций даже с математической точки зрения, а с другой стороны, может приводить к таким проектам РА, в которых связующее будет разрушаться. Следовательно, для смягчения условий рационального проектирования целесообразно рассматривать задачи РА с разрывными решениями, когда в разных подобластях конструкции волокна изготовлены из разных материалов, или же вводить подкрепления, структура материала которых уже известна. Так, в



Фиг. 4

Распределенные массовые нагрузки не учитываются: $h_1 = h_2 = 0$. Механические характеристики материалов связующего и волокон, такие же, как в предыдущем примере. Начальные условия для интенсивностей армирования выберем на внутреннем контуре: $\omega_{n1}(\eta) = \omega_{n2}(\varphi) = 0,4$.

Для этих входных данных был получен проект РА без учета теплового воздействия. Структура армирования, ему соответствующая, изображена на фиг. 4 штриховыми линиями; причем траектории армирования визуально не отличаются от прямых линий.

Пусть тепловой поток через торцевые поверхности конструкции и интенсивность внутренних источников тепла равны нулю, а в некоторой точке контура задано безразмерное значение температуры: $E_1 \alpha_c \theta_0 / \sigma_1 = 6$. Согласно результатам разд. 3, при таком тепловом воздействии температурное поле будет постоянным и равным θ_0 . Следовательно, задачу теплопроводности в этом примере можно считать решенной независимо от решения задачи РА. Структура РА, соответствующая такому равномерному нагреву, изображена на фиг. 4 сплошными линиями. Сравнение проектов РА, приведенных на фиг. 4, показывает, что нагрев конструкции приводит к сгущению траекторий армирования и появлению ярко выраженной их кривизны. Кроме того, тепловое воздействие существенно влияет на НДС конструкции; так, наибольшее значение интенсивности напряжений в связующем в нагретой конструкции в 11,8 раза больше, чем в бестемпературном проекте.

Серии расчетов, проведенные авторами, показали, что разным типам нагрева конструкции могут соответствовать близкие структуры армирования. Если коэффициенты линейного теплового расширения волокон больше соответствующего коэффициента связующего, то при совпадении знака температуры со знаком напряжения в равнопрочных волокнах траектории РА сгущаются, а при расхождении этих знаков – разреживаются (картина меняется на противоположную, если указанные коэффициенты волокон меньше коэффициента связующего). Результаты, полученные для различных тепловых граничных условий, подтверждают тот факт, что тепловое воздействие существенно влияет на структуру РА и НДС конструкции и пренебрегать этим воздействием недопустимо.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-01016).

рассмотренном примере следовало бы на внутреннем контуре ввести кольцевое подкрепление, изготовленное, например, из изотропного материала.

На следующем примере продемонстрируем влияние температурного поля на структуру РА. Плоская конструкция ограничена двумя контурами, которые в полярной системе координат задаются равенствами. Внутренний контур $r_0(\varphi) = D(0,5 - 0,05 \cos(2\varphi - \pi/2))$, внешний – $r_1(\varphi) = D(1 + 0,08 \cos 2\varphi)$, где D – характерный размер конструкции. По внешнему контуру конструкция закреплена, а к внутреннему приложена равномерная нормальная нагрузка: $p_n = 0,5\sigma_1$, $p_t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушманов С.Б., Немировский Ю.В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. 1983. N. 2. С. 278–284.
2. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с.
3. Ванин Г.А. Микромеханика композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1967. 398 с.
5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
6. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
16.VI.1995