

УДК 539.3

© 1997 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО ШАРА

Метод сведения задачи теории упругости к обобщенной по И.Н. Векуа краевой задаче Гильберта [1] распространяется на смешанную осесимметричную задачу для усеченного шара, сферическая поверхность которого жестко заделана, а на срезе заданы нормальные напряжения. Система функциональных уравнений этой задачи преобразуется к системе двух сингулярных уравнений, требующей регуляризации. Затем рассматривается контактная задача о вдавливании кругового в плане штампа в срез усеченного шара, интегральное уравнение которой при помощи метода парных уравнений сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Ранее изучалась [2–4] контактная задача о кручении упругого усеченного шара с закрепленной сферической поверхностью жестким круговым в плане штампом, расположенным на срезе шара. При выводе интегрального уравнения этой задачи применялось интегральное преобразование Мелера – Фока на действительной оси. Ниже, как и в случае второй основной граничной задачи осесимметричной теории упругости для сферической линзы [1], частным случаем которой является усеченный шар, применяется интегральное преобразование Мелера – Фока в комплексной плоскости.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу для упругого усеченного шара, заделанного по сферической поверхности, при действии на срезе шара сосредоточенного нормального усилия. Используем тороидальные координаты ξ, η (фигура), связанные с отнесенными к радиусу сечения R_* цилиндрическими координатами r, z соотношениями

$$r = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \eta}, \quad z = \frac{\sin \eta}{\operatorname{ch} \xi + \cos \eta} \quad (1.1)$$

Граничные условия задачи запишем в виде (G – модуль сдвига)

$$\sigma_z / (2G) = -\delta(\xi - x), \quad \tau_{rz} = 0 \quad (\eta = 0) \quad (1.2)$$

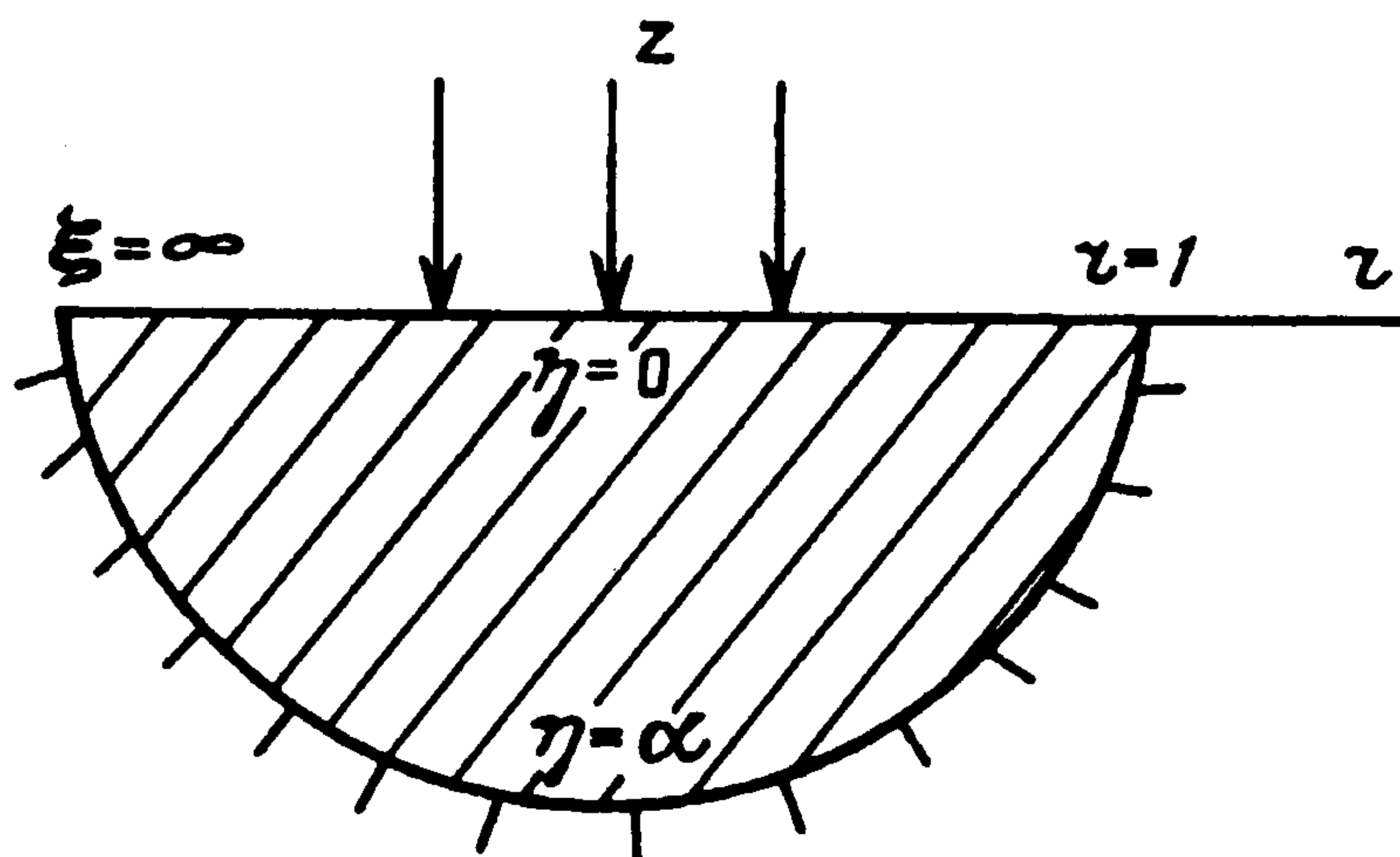
$$u_r = u_z = 0 \quad (\eta = \alpha)$$

Выразим перемещения и напряжения из (1.2) через две гармонические функции Буссинеска Φ_n ($n = 1, 2$) по формулам [5] (ν – коэффициент Пуассона)

$$\frac{u_r}{R_*} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - z \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, \quad \frac{u_z}{R_*} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \epsilon_3 \Phi_2 \quad (\epsilon_3 = 3 - 4\nu) \quad (1.3)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial z} - z \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial z} + \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \quad (\epsilon_1 = 1 - 2\nu)$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - z \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad (\epsilon_2 = 2(1 - \nu))$$



а сами функции Буссинеска представим интегралами Мелера – Фока в комплексной форме [1] ($c > 0$)

$$\Phi_n(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\text{ch } \xi + \cos \eta} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Q_{\mu-1/2}(\text{ch } \xi) [A_n(\mu) \cos \mu \eta + B_n(\mu) \sin \mu \eta] d\mu \quad (n = 1, 2) \quad (1.4)$$

$$A_n(-\mu) = -A_n(\mu), \quad B_n(-\mu) = B_n(\mu)$$

Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial r} = \text{sh } \xi \sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + (1 + \text{ch } \xi \cos \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = (1 + \text{ch } \xi \cos \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} - \text{sh } \xi \sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi}$$

дифференциальное соотношение для сферических функций [6]

$$[Q_{\mu-1/2}(\text{ch } \xi)]' = Q_{\mu-1/2}^1(\text{ch } \xi) \quad (1.6)$$

ряд других соотношений [6], связывающих сферические функции с различными нижними и верхними индексами, разложение δ -функции в интеграл Мелера – Фока

$$\delta(\xi - x) = \frac{1}{\pi i} \text{sh } x \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu P_{\mu-1/2}(\text{ch } x) Q_{\mu-1/2}(\text{ch } \xi) d\mu \quad (1.7)$$

и сдвигая контур интегрирования в интегралах (1.4) в полосе регулярности функций $A_n(\mu)$, $B_n(\mu)$, перейдем от (1.2)–(1.4) к системе четырех функциональных уравнений на трех прямых в плоскости комплексного переменного μ относительно неизвестных функций $A_n(\mu)$, $B_n(\mu)$ ($n = 1, 2$)

$$\varepsilon_2 B_2(\mu) - f(A_1)/2 = W(\mu), \quad \varepsilon_1 A_2(\mu) + f(B_1)/2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \cos \mu \alpha [g(A_1) \cos \alpha - g(A_2) \sin \alpha] + \sin \mu \alpha [g(B_1) \cos \alpha - g(B_2) \sin \alpha] + \\ & + (\mu - 1)^{-1} \cos(\mu - 1) \alpha \{ \varepsilon_2 B_2(\mu - 1) - (\frac{1}{2}) [A_1(\mu - 1) + A_1(\mu)] \} + \\ & + (\mu + 1)^{-1} \cos(\mu + 1) \alpha \{ \varepsilon_2 B_2(\mu + 1) + (\frac{1}{2}) [A_1(\mu) + A_1(\mu + 1)] \} - \\ & - (\mu - 1)^{-1} \sin(\mu - 1) \alpha \{ \varepsilon_1 A_2(\mu - 1) + (\frac{1}{2}) [B_1(\mu - 1) + B_1(\mu)] \} - \\ & - (\mu + 1)^{-1} \sin(\mu + 1) \alpha \{ \varepsilon_1 A_2(\mu + 1) - (\frac{1}{2}) [B_1(\mu) + B_1(\mu + 1)] \} = \\ & = (\mu - 1)^{-1} W(\mu - 1) \cos(\mu - 1) \alpha + (\mu + 1)^{-1} W(\mu + 1) \cos(\mu + 1) \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_2 [2A_2(\mu) \cos \alpha \cos \mu \alpha + (\mu - 1/2)(\mu - 1)^{-1} A_2(\mu - 1) \cos(\mu - 1)\alpha + \\
& + (\mu + 1/2)(\mu + 1)^{-1} A_2(\mu + 1) \cos(\mu + 1)\alpha] + \varepsilon_1 [2B_2(\mu) \cos \alpha \sin \mu \alpha + \\
& + (\mu - 1/2)(\mu - 1)^{-1} B_2(\mu - 1) \sin(\mu - 1)\alpha + (\mu + 1/2)(\mu + 1)^{-1} B_2(\mu + 1) \sin(\mu + 1)\alpha] + \\
& + f(A_2) \sin \alpha \sin \mu \alpha - f(B_2) \sin \alpha \cos \mu \alpha = -2W(\mu) \cos \alpha \sin \mu \alpha - \\
& - (\mu - 1/2)(\mu - 1)^{-1} W(\mu - 1) \sin(\mu - 1)\alpha - (\mu + 1/2)(\mu + 1)^{-1} W(\mu + 1) \sin(\mu + 1)\alpha \\
& f(F) = (\mu - 1)F(\mu - 1) + 2\mu F(\mu) + (\mu + 1/2)F(\mu + 1) \\
& g(F) = F(\mu - 1) + 2F(\mu) + F(\mu + 1) \\
& W(\mu) = -\operatorname{sh} x P_{\mu-1/2}(\operatorname{ch} x) / (\operatorname{ch} x + 1)^{3/2}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

При выводе системы (1.8) граничное условие для τ_{rz} было проинтегрировано по r (при $\eta = 0$), а в граничном условии для σ_z первая производная по z была устранена при помощи последнего соотношения (1.6). Третье и четвертое уравнения (1.8) записаны с учетом первых двух.

Введем новые аналитические функции $A^*(\mu)$, $B^*(\mu)$ по формулам

$$\begin{aligned}
A^*(\mu) &= \mu[A_1(\mu - 1/2) + A_1(\mu + 1/2)] \\
B^*(\mu) &= \mu[B_1(\mu - 1/2) + B_1(\mu + 1/2)]
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Тогда первые два уравнения (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
A^*(\mu - 1/2) + A^*(\mu + 1/2) &= 2[\varepsilon_2 B_2(\mu) - W(\mu)] \\
B^*(\mu - 1/2) + B^*(\mu + 1/2) &= -2\varepsilon_1 A_2(\mu)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В силу четности функции $A^*(\mu)$ и нечетности функции $B^*(\mu)$ (см. (1.4)) функциональные уравнения (1.10) относительно этих функций решаются путем сведения их (полагая в (1.10) $\mu = i\tau$, $\tau \in R$) к задачам Дирихле для функций $\operatorname{Re} A^*(\mu)$, $\operatorname{Im} B^*(\mu)$ в полосе $|\operatorname{Re} \mu| \leq 1/2$. Решение этих задач находится при помощи интегрального преобразования Фурье. Затем функции $\operatorname{Im} A^*(\mu)$, $\operatorname{Re} B^*(\mu)$ восстанавливаются при помощи формул Шварца [7]. После решения уравнений (1.10) аналогично из соотношений (1.9) определяются функции $A_1(\mu)$, $B_1(\mu)$, которые, таким образом, могут быть исключены из системы (1.8).

Рассмотрим систему (1.8), исключив из нее функции $A_1(\mu)$, $B_1(\mu)$, при $\mu = i\tau$, $\tau \in R$. Возникающую при этом обобщенную по И.Н. Векуа краевую задачу Гильберта сведем, используя формулы Шварца, к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно двух новых функций $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, связанных с функциями $A_2(\mu)$, $B_2(\mu)$ соотношениями

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau) &= \operatorname{Im} A_2(1 + i\tau) + \operatorname{th} \pi \tau \omega(\tau) \\
\varphi_2(\tau) &= \operatorname{Re} B_2(1 + i\tau) - \omega(\tau), \quad \omega(\tau) = \operatorname{Re} W(1 + i\tau)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Эту систему после ряда преобразований можно записать в матричном виде ($0 \leq \tau < \infty$)

$$A(\tau)\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{K(\tau, t)\varphi(t)}{\operatorname{ch} \pi t - \operatorname{ch} \pi \tau} d(\operatorname{ch} \pi t) = f(\tau) \tag{1.12}$$

где $A(\tau) = (a_{nm}(\tau))$, $K(\tau, t) = i(k_{nm}(\tau, t))$ — матрицы, $\varphi(\tau) = (\varphi_n(\tau))$, $f(\tau) = (f_n(\tau))$ ($n, m = 1, 2$) — столбцы. Выражения их элементов опускаем ввиду громоздкости.

Система (1.12) имеет точное решение при $\alpha = \pi$, $\nu = 1/2$, когда $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) \equiv 0$. При $\alpha = \pi$, $\nu \neq 1/2$ структура точного решения задачи [8] (гл. 12, п. 76) несколько сложнее. Анализ этой структуры и поведение функций $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, входящих в правую часть системы (1.12), при $\tau \rightarrow \infty$ позволяют утверждать, что замена (1.11) выделяет главные при $\tau \rightarrow \infty$ части функций $\text{Im } A_2(1 + i\tau)$ и $\text{Re } B_2(1 + i\tau)$.

Исследование нормальности характеристической для (1.12) системы, т.е. проверка выполнения условия [9]

$$\det S_{\pm}(\tau) = \det[A(\tau) \pm B(\tau)] \neq 0 \quad (0 \leq \tau < \infty) \quad (1.13)$$

где $B(\tau) = i(h_{nm}(\tau))$ ($n, m = 1, 2$), причем $h_{nm}(\tau) = k_{nm}(\tau, \tau)$, а $S_{\pm}(\tau)$ – основные матрицы, показывает, что при $\alpha \in [\pi/4, 3\pi/4]$ должно выполняться неравенство $\nu \neq \cos^2 \alpha$. При $\alpha = \pi n/8$ и $n = 0, 1, 7, 8$ условие (1.14) выполняется для любого значения ν ; при $n = 4$ – в интервале $\nu > 0,092$; когда $n = 2$ и 6 , то $\nu \neq 1/2$; при $n = 3, 5$ и $\nu = 0,3$ условие (1.13) также удовлетворяется.

Методами, изложенными в [9, 10], регуляризуем систему сингулярных уравнений (1.12), сведя ее к матричному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} & [A_*(\tau)A(\tau) - B_*(\tau)B(\tau)]\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_*(\tau)[K(\tau, t) - B(\tau)] + B_*(\tau)[A(t) - A(\tau)]}{\text{ch } \pi t - \text{ch } \pi \tau} \varphi(t) d(\text{ch } \pi t) - \\ & - \frac{1}{\pi^2} B_*(\tau) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K(t_0, t)}{(\text{ch } \pi t_0 - \text{ch } \pi t)(\text{ch } \pi t_0 - \text{ch } \pi \tau)} \varphi(t) d(\text{ch } \pi t_0) d(\text{ch } \pi t) = \\ & = A_*(\tau)f(\tau) + \frac{1}{\pi} B_*(\tau) \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\text{ch } \pi t - \text{ch } \pi \tau} d(\text{ch } \pi t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$A_*(\tau) = (1/2)[S_+^{-1}(\tau) + S_-^{-1}(\tau)], \quad B_*(\tau) = (1/2)[S_+^{-1}(\tau) - S_-^{-1}(\tau)]$$

На решении уравнения (1.14), которое можно проводить численно, завершается исследование задачи (1.1).

Отметим также, что численное решение системы сингулярных уравнений (1.12) можно получить и без ее регуляризации, применяя известные квадратурные формулы для сингулярных интегралов [11, 12].

2. Изучим теперь осесимметричную контактную задачу о вдавлении силой P в срез усеченного шара с заделанной сферической поверхностью жесткого кругового в плане штампа, форма основания которого описывается функцией $g_*(\xi)$. Пусть b – радиус круговой области контакта по координате ξ . При заданных функции $g_*(\xi)$, величине b и отнесенной к R_* осадке штампа δ требуется определить функцию распределения нормальных контактных давлений под штампом $\sigma_z(\xi, 0) = -\psi(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq b$) и найти значение P .

После решения краевой задачи (1.1) нормальное перемещение на срезе шара находится по формуле

$$u_z(\xi, 0) = \varepsilon_2 \sqrt{\text{ch } \xi + 1} \int_0^{\infty} \text{th } \pi \tau \text{Im } A_2(i\tau) P_{i\tau-1/2}(\text{ch } \xi) d\tau \quad (2.1)$$

При знании функции $u_z(\xi, 0)$ вида (2.1) с учетом формулы Шварца

$$\text{Im } A_2(i\tau) = 2 \text{sh } \frac{\pi \tau}{2} \int_0^{\infty} \text{Im } A_2(1 + it) L(t, \tau) dt \quad (2.2)$$

$$L(t, \tau) = \text{sh}(\pi t / 2)(\text{ch } \pi t + \text{ch } \pi \tau)^{-1}$$

первой формулы (1.11) и являющегося следствием формулы Шварца (2.2) интеграла

$$2 \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} \int_0^{\infty} L(t, \tau) \operatorname{th} \pi t \operatorname{Re} P_{i\tau+1/2}(\operatorname{ch} x) dt = \operatorname{th} \pi \tau P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} x) \quad (2.3)$$

интегральное уравнение рассматриваемой контактной задачи относительно функции $\psi_*(\xi) = \psi(\xi) / [\theta(\operatorname{ch} \xi + 1)^{3/2}]$ ($\theta = G/(1 - \nu)$) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^b \psi_*(x) \operatorname{sh} x dx \left\{ \int_0^{\infty} [(1 - g(\tau)) P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} x) + \right. \\ & \left. + 2 \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} \int_0^{\infty} \varphi_1^*(t, x) L(t, \tau) dt] P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} \xi) d\tau \right\} = f_*(\xi) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $0 \leq \xi \leq b$ и введены обозначения

$$g(\tau) = 1 / \operatorname{ch}^2 \pi \tau, \quad \varphi_1^*(t, x) \operatorname{sh} x = \varphi_1(t) (\operatorname{ch} x + 1)^{3/2} \quad (2.5)$$

$$f_*(\xi) = [\delta - g_*(\xi)] / \sqrt{\operatorname{ch} \xi + 1}$$

Ядро интегрального уравнения (2.4) из механических соображений симметрично. Поменяв в этом ядре переменные x и ξ местами, запишем эквивалентное уравнению (2.4) парное интегральное уравнение в форме

$$\int_0^{\infty} C(\tau) \{ [1 - g(\tau)] P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} \xi) + 2 \operatorname{th} \pi \tau \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} \int_0^{\infty} \varphi_1^*(t, \xi) L(t, \tau) dt \} d\tau = f_*(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq b) \quad (2.6)$$

$$\int_0^{\infty} C(\tau) \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = 0 \quad (b < \xi < \infty)$$

где

$$C(\tau) = \int_0^b \psi_*(x) \operatorname{sh} x P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} x) dx \quad (2.7)$$

Разыскивая функцию $C(\tau)$ и в виде интеграла

$$C(\tau) = \int_0^b \varphi_*(x) \cos \tau x dx \quad (2.8)$$

и используя известную методику ([13], с. 101) и значение интеграла (снова формула Шварца)

$$2 \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{2} \int_0^{\infty} L(t, \tau) \operatorname{th} \pi t \cos \tau x dt = \frac{\operatorname{th} \pi \tau \cos \tau x}{\operatorname{ch} x} \quad (2.9)$$

сведем парное уравнение (2.6) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi_*(x)$

$$\varphi_*(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^b \varphi_*(y) K_*(x, y) dy = F(x) \quad (0 \leq x \leq b) \quad (2.10)$$

$$K_*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x+y}{\operatorname{sh}((x+y)/2)} + \frac{x-y}{\operatorname{sh}((x-y)/2)} \right] - K_1(x, y)$$

$$K_1(x, y) = \frac{2}{\operatorname{ch} y} \frac{d}{dx} \int_0^x \int_0^{\infty} \frac{\varphi_1^*(t, \xi) \operatorname{sh} \xi \operatorname{th} \pi t}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \xi)}} \cos \tau y dt d\xi \quad (2.11)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_*(\xi) \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \xi)}} d\xi$$

Используя формулу

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\operatorname{Re} P_{i\tau+1/2}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi}{\sqrt{2(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \xi)}} d\xi = \operatorname{ch} x \cos \tau x \quad (2.12)$$

вытекающую из представления 8.715 [6] и формулы обращения Абеля, выражение (2.11) для функции $K_1(x, y)$ можно упростить до интеграла

$$K_1(x, y) = 2 \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} y} \int_0^\infty \Phi_1^*(t, x) \operatorname{th} \pi t \cos ty \, dt \quad (2.13)$$

где функция $\Phi_1^*(\tau, x) = \varphi_1(\tau)$ удовлетворяет системе (1.14) в правой части которой вместо функции $\omega(\tau)$ вида (1.11) положено $\omega^*(\tau) = \cos \tau x$.

Механический смысл функции $\varphi_*(x)$ заключается в том, что ее значение в точке $x = b$ характеризует коэффициент при особенности функции искомых контактных давлений $\psi_*(x)$ в этой же точке. Именно, на основании формулы (2.7) получим функцию $\psi_*(x)$ в виде

$$\psi_*(x) = \int_0^\infty C(\tau) \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} x) d\tau \quad (2.14)$$

Подставляя в (2.14) вместо функции $C(\tau)$ ее представление (2.8) и интегрируя по частям, найдем, что

$$\lim_{x \rightarrow b} \sqrt{\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} x} \psi_*(x) = \varphi_*(b) / \sqrt{2} \quad (2.15)$$

В таблице даны значения величины $\chi = 10^3 \times \varphi_*(b) / (\sqrt{2}\delta)$ и отношения κ размерного радиуса круговой области контакта к радиусу сечения R_* для случая $\nu = 0,3$, $g_*(\xi) \equiv 0$ (плоский штамп, $F(x) = \sqrt{2}\delta / [\pi \operatorname{ch}(x/2)]$) при различных b и углах $\alpha = \pi n/6$, характеризующих степень усеченности шара.

b	χ						κ
	$n = 1$	2	3	4	5	6	
0,1	300	302	312	324	324	325	0,050
1	240	146	194	347	350	359	0,462
2	94,3	75,7	127	310	344	359	0,762

Расчеты показывают, что при увеличении b значение $\varphi_*(b)$ может менять знак, т.е. упругая среда шара может отходить от кромки штампа. Это происходит, например, при $b = 3$ (размерный радиус области контакта равен $0,905R_*$) и $n = 1, 3, 6$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского Правительства (J1B100).

ЛИТЕРАТУРА

1. Улитко А.Ф. Обобщенная по И.Н. Векуа краевая задача Гильберта в пространственной теории упругости // Современные проблемы математической физики: Тр. Всес. симпоз. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 2. С. 341–348.

2. *Баблюян А.А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1015–1023.
3. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 1087–1097.
4. *Бабешко В.А., Беркович В.Н., Озерский А.И.* Об одной контактной задаче для сферического сегмента // Изв. Северо-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естест. наук. 1973. № 4. С. 7–9.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
9. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
10. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
11. *Иванов В.В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наука. думка, 1968. 287 с.
12. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
13. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.XII.1994