

УДК 539.3+624.074

© 1997 г. В.Д. Потапов

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Рассматривается устойчивость в среднеквадратичном вязкоупругих систем, находящихся под действием параметрических нагрузок, по отношению к возмущению начальных условий. Эти нагрузки, а также характеристика внешнего демпфирования считаются случайными стационарными широкополосными процессами. Для решения функциональных уравнений, с помощью которых описывается движение указанных систем, используется разложение искомых перемещений в ряд по собственным функциям упругой системы. Интегро-дифференциальные уравнения относительно обобщенных перемещений решаются с помощью метода стохастического усреднения (асимптотического метода) в предположении, что мера релаксации материала, математическое ожидание характеристики внешнего демпфирования являются малыми величинами по сравнению с единицей, а случайные флуктуации рассматриваемых процессов – малыми в среднеквадратичном. Показано, что критическое значение параметра системы может оказаться наименьшим в случае, когда форма возмущений начальных условий отличается от первой формы собственных колебаний.

При исследовании устойчивости "классических" элементов упругих конструкций, таких, например, как стержень, шарнирно опертый по концам и находящийся под действием продольной силы постоянной по его длине, или прямоугольная пластина, свободно опертая вдоль всех кромок и находящаяся под действием равномерно распределенных сжимающих нагрузок, приложенных на кромках в плоскости пластины, и т.п., часто предполагается, что форма прогиба элемента совпадает с первой формой его собственных колебаний. Таким образом, рассмотрение распределенной системы как системы с бесконечным числом степеней свободы заменяется анализом поведения более простой модели – системы с одной степенью свободы.

Как правило, условия устойчивости положения равновесия системы, полученные с помощью такой модели, совпадают с аналогичным условием для распределенной системы. Нередко подобный подход распространяется на системы, материал которых обладает более сложными реологическими свойствами, в частности вязкоупругими. Однако в некоторых ситуациях указанный подход может привести к качественно некорректным выводам, о чем свидетельствует пример, рассматриваемый в настоящей статье.

При анализе устойчивости нулевого решения стохастической системы интегро-дифференциальных уравнений [1] на примере вязкоупругого стержня показано, что возмущения начальных условий, по форме отличающиеся от одной полуволны синусоиды, могут оказаться с точки зрения устойчивости более опасными, нежели те, которые имеют форму одной полуволны синусоиды. Но условия устойчивости найдены с помощью прямого метода Ляпунова и потому являются достаточными, но не необходимыми. Поэтому остается открытым вопрос о том, является ли полученный результат следствием только использованного метода решения задачи или же причина носит более глубокий характер. Чтобы выяснить причины отмеченного отличия, нужно найти условия устойчивости стохастической системы, которые были бы достаточными и необходимыми.

Поскольку в настоящее время отсутствуют точные методы решения стохастических уравнений, параметры которых являются широкополосными стационарными процессами,

воспользуемся для этих целей методом стохастического усреднения [2–8], являющегося развитием асимптотического метода [9–11] решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.

Из работ, посвященных проблеме устойчивости механических стохастических систем, отметим исследования устойчивости вязкоупругого стержня, шарнирно опертого по концам и находящегося под действием случайной продольной силы в виде белого шума [12, 13], где при весьма общих предположениях относительно ядра релаксации материала стержня с учетом и без учета старения получены достаточные условия устойчивости. Показано, что при отсутствии внешнего демпфирования стержень оказывается асимптотически устойчивым в среднеквадратичном, если соблюдается условие устойчивости при возмущении начальных условий, форма которых совпадает с одной полуволной синусоиды. Был дан анализ устойчивости упругих линейных и нелинейных систем с помощью метода стохастического усреднения и показателей Ляпунова [14, 15]. Рассмотрено [16] применение метода максимального показателя Ляпунова при исследовании упругих систем с двумя степенями свободы, возмущаемых случайным белым шумом.

**1. Постановка задачи.** Движение вязкоупругой системы описывается уравнением, которое в операторной форме можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial u}{\partial t} + (1 - R)Bu - Cu = 0 \quad (1.1)$$

$$Ru = \int_{-\infty}^t R(t - \tau)u(x, \tau)d\tau, \quad 0 \leq \int_0^\infty R(\theta)d\theta \ll 1$$

где  $u(t, x)$  – перемещение системы,  $x$  – вектор пространственных координат,  $R$  – интегральный оператор,  $R(t - \tau)$  – ядро релаксации материала,  $A, B, C$  – дифференциальные операторы с частными производными по пространственным координатам.

Решение уравнения (1.1) должно удовлетворять соответствующим начальным и граничным условиям.

Слагаемые  $A \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $Bu$ ,  $Cu$  учитывают внешнее демпфирование, жесткость упругой системы и действие параметрических нагрузок соответственно.

Если  $\varphi_i(x)$  – собственные функции краевой задачи  $B\varphi = \omega_i^2 \varphi$ , то  $u$  можно разложить в ряд Фурье по этим функциям

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)\varphi_i(x) \quad (1.2)$$

Для функций  $\varphi_i(x)$  справедливы соотношения

$$\int_V \varphi_i \varphi_j dV = \delta_{ij}, \quad \int_V (B\varphi_i) \varphi_j dV = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (1.3)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\omega_i$  – частота собственных колебаний системы,  $V$  – объем системы.

Если оператор  $A$  учитывает только внешнее трение, то можно положить

$$\int_V (A\varphi_i) \varphi_j dV = 2\varepsilon^* \delta_{ij} \quad (1.4)$$

Здесь  $\varepsilon^*$  – характеристика внешнего демпфирования.

В некоторых случаях можно также допустить выполнение равенства

$$\int_V (C\varphi_i) \varphi_j dV = \omega_i^2 \alpha_i \delta_{ij} \quad (1.5)$$

где  $\alpha_i$  – безразмерный параметр, характеризующий параметрическую нагрузку.

Равенство (1.5) справедливо, например, для стержня постоянного поперечного

сечения, шарнирно опертого по концам и находящегося под действием продольных сил, приложенных на его концах. То же самое можно сказать о прямоугольной пластине, шарнирно опертой вдоль всех кромок, при действии равномерно распределенных нагрузок в плоскости пластины и параллельных кромкам, круговой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии и т.д.

С учетом соотношений (1.3)–(1.5) из уравнения (1.1) получим уравнения для обобщенных перемещений  $f_i$

$$\ddot{f}_i + 2\varepsilon^* \dot{f}_i + (1 - \mathbf{R})\omega_i^2 f_i - \omega_i^2 \alpha_i f_i = 0 \quad (1.6)$$

(точка означает производную по времени  $t$ ).

**2. Решение стохастических интегро-дифференциальных уравнений.** Далее будем полагать, что характеристики внешнего демпфирования  $\varepsilon^*$  и параметрической нагрузки  $\alpha_i$  являются некоррелированными стационарными процессами

$$\varepsilon^*(t) = \varepsilon_0^* + \varepsilon_1^*(t), \quad \alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}(t)$$

$$\varepsilon_0^* = \langle \varepsilon^*(t) \rangle = \text{const}, \quad \alpha_{i0} = \langle \alpha_i(t) \rangle = \text{const}, \quad \alpha_{i0} < 1$$

причем параметр  $\varepsilon_0^*/\omega_1$  мал по сравнению с единицей, а функции  $\varepsilon_1^*(t)/\omega_1$ ,  $\alpha_{i1}$  малы в среднеквадратичном.

Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция математического ожидания. Представим уравнение (1.6) в виде системы

$$\dot{f}_i = \psi_i \quad (2.1)$$

$$\dot{\psi}_i = -2\varepsilon^* \psi_i - \Omega_i^2 f_i + \omega_i^2 \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f_i(\tau) d\tau + \omega_i^2 \alpha_{i1} f_i$$

где  $\Omega_i^2 = \omega_i^2 (1 - \alpha_{i0})$ .

Решение уравнений (2.1) ищем в виде [2–9]

$$f_i = A_i \sin \theta_i, \quad \psi_i = \Omega_i A_i \cos \theta_i, \quad \theta_i = \Omega_i t + v_i \quad (2.2)$$

Проделявая обычные для асимптотического метода преобразования, выразим производные функций  $\dot{A}$  и  $\dot{v}$ . Усредняя нефлуктуационные члены по периоду колебаний  $T = 2\pi/\omega_i$  и введя безразмерное время  $t_1 = \omega_1 t$ , придем к уравнениям

$$A_i' = F_1(A_i, v_i) + g_{11}\eta_1 + g_{12}\eta_2, \quad v_i' = F_2(A_i, v_i) + g_{21}\eta_1 + g_{22}\eta_2 \quad (2.3)$$

Здесь

$$F_1(A_i, v_i) = -\varepsilon_0 A_i + \mu_i^2 z A_i, \quad F_2(A_i, v_i) = -\mu_i^2 x, \quad \mu_i^2 = \omega_i^2 / (\omega_1 \Omega_i)$$

$$z = -\frac{1}{2} \int_0^\infty R(y) \sin \Omega_i y dy, \quad x = \frac{1}{2} \int_0^\infty R(y) \cos \Omega_i y dy$$

$$g_{11} = -2A_i \cos^2 \theta_i, \quad g_{12} = -\frac{1}{2} \mu_i^2 A_i \sin 2\theta_i, \quad g_{21} = \sin 2\theta_i$$

$$g_{22} = -\mu_i^2 \sin^2 \theta_i, \quad \eta_1 = \varepsilon_1, \quad \eta_2 = \alpha_{i1}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0^* / \omega_1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1^* / \omega_1$$

Штрихом обозначена производная по времени  $t_1$ .

В дальнейшем для удобства вместо  $t_1$  вновь будем пользоваться обозначением  $t$ .

Далее проведем усреднение флуктуационных членов, в результате чего случайные

процессы  $A_i$  представляются диффузионными марковскими процессами

$$A_i' = a_i + b_i \xi_i \quad (2.4)$$

где  $\xi_i$  – эквивалентный стационарный белый шум с равным нулю математическим ожиданием и корреляционной функцией  $K(\tau) = \delta(\tau)$ ,  $\delta(\tau)$  – дельта-функция.

Найдем функции  $a_i$ ,  $b_i$  так, как это предлагается в [2–4].

После всех преобразований получим

$$a_i = F(A_i) + A_i \int_{-\infty}^0 \left[ 1 + \frac{3}{2} \cos\left(2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu\right) \right] K_{11}(\nu) d\nu + \frac{3}{8} \mu_i^4 A_i \int_{-\infty}^0 \cos\left(2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu\right) K_{22}(\nu) d\nu \equiv c_i A_i$$

$$b_i^2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cos\left(2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu\right) \right] K_{11}(\nu) d\nu + \frac{1}{8} \mu_i^4 \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu\right) K_{22}(\nu) d\nu \right\} A_i^2 \equiv \beta_i^2 A_i^2$$

Здесь  $K_{11}(\nu)$ ,  $K_{22}(\nu)$  – корреляционные функции процессов  $\varepsilon_1$  и  $\alpha_{i1}$  соответственно.

Из выражений для  $a_i$ ,  $b_i^2$  видно, что амплитуда  $A_i$  не зависит от фазы колебаний  $\nu_i$ . На оценку устойчивости она не будет оказывать влияния, и потому уравнение, из которого определяется функция  $\nu_i$ , из дальнейших рассуждений можно исключить.

Таким образом, уравнение (2.4) может быть записано в виде

$$A_i' = c_i A_i + \beta_i A_i \xi_i$$

С помощью формулы дифференцирования Ито (или с помощью уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова) получим уравнение относительно дисперсии  $\langle A_i^2 \rangle$

$$\langle A_i^2 \rangle' = 2c_i \langle A_i^2 \rangle + \beta_i^2 \langle A_i^2 \rangle \equiv \lambda_i \langle A_i^2 \rangle \quad (2.5)$$

**3. Устойчивость вязкоупругой системы.** Введем норму в пространстве функций  $u(\mathbf{x}, t)$

$$\|u(t)\|^2 = \int_V u^2(\mathbf{x}, t) dV$$

Назовем положение равновесия системы ( $u \equiv 0$ ) устойчивым в среднеквадратичном по отношению к возмущению начальных условий, если для любого сколь угодно малого  $\Delta > 0$  найдется такое  $\delta(\Delta) > 0$ , что из условия  $\langle \|u(0)\|^2 \rangle < \delta$ , справедливого для начального момента времени  $t = 0$ , следует неравенство  $\langle \|u(t)\|^2 \rangle < \Delta$ , которое удовлетворяется в любой момент времени  $t > 0$ .

Положение равновесия системы называется асимптотически устойчивым в среднеквадратичном, если соблюдается предыдущее условие и, кроме того, найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $\langle \|u(0)\|^2 \rangle < \delta$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \|u(t)\|^2 \rangle = 0$$

Учитывая разложения (1.2) и принимая во внимание первое равенство (2.2), для дисперсии  $\langle \|u(t)\|^2 \rangle$  получим неравенство

$$\langle \|u(t)\|^2 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i^2(t) \rangle \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle A_i^2(t) \rangle$$

Дисперсия  $\langle A_i^2(t) \rangle$  оказывается монотонно убывающей функцией, если соблюдается

условие

$$\lambda_i = 2c_i + \beta_i^2 < 0$$

Подставляя выражения для  $c_i$  и  $\beta_i^2$ , окончательно запишем

$$\begin{aligned} \lambda_i = & \int_0^\infty \left[ 2 + 2 \cos \left( 2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu \right) \right] K_{11}(\nu) d\nu + \frac{\mu_i^4}{2} \int_0^\infty \cos \left( 2 \frac{\Omega_i}{\omega_1} \nu \right) K_{22}(\nu) d\nu - \\ & - \varepsilon_0 - \frac{\mu_i^2}{2} \int_0^\infty R(y) \sin \left( \frac{\Omega_i}{\omega_1} y \right) dy < 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Это условие можно рассматривать как условие асимптотической устойчивости в среднеквадратичном для системы при возмущении начальных условий, форма которых совпадает с  $i$ -й формой собственных колебаний  $\varphi_i(x)$ .

Очевидно, что при возмущении начальных условий произвольной формы система будет асимптотически устойчивой в среднеквадратичном, если условие (3.1) будет соблюдаться для любого  $i$ .

**4. Пример.** Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, шарнирно опертый по концам и находящийся под действием продольной силы  $F(t)$ . Уравнение (1.1) в этом случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon^* \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{EI}{m} (1 - \mathbf{R}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{F}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Здесь  $w$  – прогиб стержня,  $x$  – координата, отсчитываемая вдоль оси стержня от одного из его концов,  $EI$  – изгибная жесткость стержня,  $m$  – его погонная масса.

Граничные условия при  $x = 0$  и  $x = l$  ( $l$  – длина стержня) имеют вид  $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ . Функции  $\varphi_i(x)$ , собственные частоты  $\omega_i$ , величины  $\mu_i^2$ ,  $\alpha_{i0}$  и случайная функция  $\alpha_{i1}$  определяются в этом случае выражениями

$$\varphi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad \omega_i^2 = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{m}, \quad \mu_i^2 = \frac{i^2}{\sqrt{1 - \alpha_{i0}}}$$

$$\alpha_{i0} = \frac{\alpha_{10}}{i^2}, \quad \alpha_{i1} = \frac{\alpha_{11}(t)}{i^2}$$

Допустим, что ядро релаксации материала стержня и корреляционные функции стационарных процессов  $\varepsilon_1$  и  $\alpha_{11}$  являются экспоненциальными функциями и имеют вид

$$R(t - \tau) = M e^{-\chi(t-\tau)}, \quad K_{11}(\tau) = s^2 e^{-\rho|\tau|}, \quad K_{22}(\tau) = \sigma^2 e^{-\gamma|\tau|} / i^4$$

где  $M$ ,  $\chi$ ,  $s$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  – положительные постоянные (безразмерные величины, так же как  $t$  и  $\tau$ ).

Тогда

$$z = -\frac{1}{2} M \frac{\Omega_i}{\omega_1} \left( \frac{\Omega_i^2}{\omega_1^2} + \chi^2 \right)^{-1}$$

В итоге величина  $\lambda_i$  (3.1) определяется выражением

$$\lambda_i = P_i + Q_i s^2 \quad (4.1)$$

$$P_i = -2\varepsilon_0 - M \left( 1 + \frac{\chi^2}{i^4} - \alpha_{i0} \right)^{-1} + \frac{\sigma^2 \gamma}{1 - \alpha_{i0}} [\gamma^2 + 4i^4 (1 - \alpha_{i0})]^{-1}$$

$$Q_i = \frac{8 \rho^2 + 2i^4(1 - \alpha_{i0})}{\rho \rho^2 + 4i^4(1 - \alpha_{i0})}$$

Отмечалось [1], что вязкоупругий стержень при  $\alpha_{i1} \equiv 0$  устойчив в среднеквадратичном, если соблюдается условие

$$2\langle |\varepsilon_1| \rangle < \varepsilon_0 + M/2 \quad (4.2)$$

которое получено при  $i \rightarrow \infty$ .

Полагая  $\varepsilon_1$  гауссовским процессом с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией  $s^2$ , найдем  $\langle |\varepsilon_1| \rangle = \sqrt{2/\pi} s$ , в результате чего неравенство (4.2) принимает вид

$$s < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \varepsilon_0 + \frac{M}{2} \right) \quad (4.3)$$

Для сравнения обратимся к неравенству (3.1). С учетом выражения (4.1) для  $\lambda_i$ , выразим из него дисперсию  $s^2$

$$s^2 < S^2, \quad S^2 = -P_i / Q_i \quad (4.4)$$

Для примера в таблице во втором и третьем столбцах представлены некоторые из значений  $S^2$  при  $\alpha_{i0} = 0,5$ ;  $\varepsilon_0 = 0,1$ ;  $M = 0,01$ ;  $\chi = 0,1$ ;  $\sigma^2 = 0$ .

Анализ приведенных данных свидетельствует о том, что минимальное (критическое) значение величина  $S^2$  может принимать при  $i \neq 1$ . Последнее означает, что с точки зрения устойчивости в среднеквадратичном более опасными могут оказаться формы начального прогиба стержня, отличающиеся от первой формы собственных колебаний. В этом смысле достаточное условие устойчивости в среднеквадратичном (4.3), полученное при  $i \rightarrow \infty$ , подтверждается, по крайней мере при некоторых сочетаниях параметров, неравенством (4.4).

| $i$      | $S^2 \times 10^5$ при $\rho = 0,1$ | $S^2 \times 10^5$ при $\rho = 0,01$ | $\beta_1^2 \times 10^5$ |
|----------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------|
| 1        | 546                                | 54.9                                | 10 943                  |
| 2        | 528                                | 52.9                                | 10 438                  |
| $\infty$ | 525                                | 52.5                                | 10 500                  |

**5. Стационарные процессы типа белого шума.** Для сравнения рассмотрим устойчивость стержня в случае, когда функции  $\varepsilon_1(t)$  и  $\alpha_{i1}(t)$  – стационарные гауссовские белые шумы.

При экспоненциальном ядре релаксации  $R(t - \tau) = M \exp[-\chi(t - \tau)]$  система интегродифференциальных уравнений (2. 1) с помощью подстановки

$$X_i(t) = \int_{-\infty}^t M e^{-\chi(t-\tau)} f_i(\tau) d\tau$$

может быть заменена следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка [17]

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \psi_i \\ \dot{\psi}_i &= -2\varepsilon^* \psi_i - \Omega_i^2 f_i + \omega_i^2 X_i + \omega_i^2 \alpha_{i1} f_i \\ \dot{X}_i &= \omega_i (M f_i - \chi X_i) \end{aligned} \quad (5.1)$$

С помощью формулы Ито отсюда получается замкнутая система дифференциальных уравнений относительно статистических моментов  $\langle f_i^2 \rangle$ ,  $\langle f_i \psi_i \rangle$ ,  $\langle f_i X_i \rangle$ ,  $\langle \psi_i^2 \rangle$ ,  $\langle \psi_i X_i \rangle$ ,  $\langle X_i^2 \rangle$  [17] с постоянной матрицей коэффициентов.

Из анализа характеристического уравнения найдем условие асимптотической устойчивости в среднеквадратичном нулевого решения уравнений (5.1).

Если белые шумы понимаются в смысле Ито, то это условие записывается следующим образом:

$$4(\beta_1^2 - \varepsilon_0) \left( 1 - \alpha_{i0} + \xi \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \right) + \left( \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2} + \frac{\xi}{\delta} \right) \beta_{2i}^2 < 2M$$

$$\xi = \chi(2\varepsilon_0 + \chi), \quad \delta = 1 - \alpha_{i0} - M/\chi$$
(5.2)

где  $\beta_1^2, \beta_{2i}^2$  – интенсивности некоррелированных белых шумов  $\varepsilon_1(t)$  и  $\alpha_{i1}(t)$ .

Неравенство (5.2) справедливо при соблюдении условий  $\varepsilon_0 > \beta_1^2$  и  $\delta > 0$ . Последнее является условием асимптотической устойчивости детерминированной системы (при  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0, \alpha_i \equiv \alpha_{i0}$ ).

Из соотношения (5.2) при  $\beta_{2i}^2 = 0$  в случае стержня получим

$$\beta_1^2 < \varepsilon_0 + \frac{M}{2} \left( 1 - \frac{\alpha_{10}}{i^2} + \frac{\xi}{i^4} \right)^{-1}$$

В четвертом столбце таблицы представлены значения правой части неравенства при тех же значениях параметров  $\varepsilon, \chi, M, \alpha_{10}$ , для которых были найдены ранее значения  $S^2$ .

Как видно, и в случае белого шума более опасными могут оказаться формы возмущений начальных условий, насчитывающие число полуволн большее единицы. Интересно, что зависимость между параметром  $\beta_1^2$  и числом полуволн может быть немонотонной, поскольку значения  $\beta_1^2$  при  $i = 2$  оказались меньше, чем при  $i = 1$  и  $i \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что замена белых шумов в смысле Ито белыми шумами в трактовке Стратоновича не меняет сделанных качественных выводов.

Заметим также, что результаты, найденные асимптотическим методом, справедливы только при малых значениях величин  $M/\chi, s$  и  $\sigma$ , в то время как при рассмотрении белых шумов подобных ограничений на  $M/\chi, \beta_i$  и  $\beta_{2i}$  не накладывалось, кроме требования  $M/\chi < 1$ . Последнее ограничение обусловлено ограниченностью вязкости материала системы.

Необходимо иметь в виду, что при записи уравнения движения стержня не были учтены инерционные силы обусловленные сдвиговыми деформациями и поворотом поперечных сечений. Поэтому значения величины  $S^2$ , найденные с помощью выражения (4.3) при больших значениях  $i$ , являются приближенными. Вместе с тем нужно иметь в виду, что учет сдвига и инерции вращения, уточняя количественные результаты, не изменяет качественного вывода о том, что критическое значение параметра  $s^2$  может соответствовать синусоидальной форме начальных искривлений, число полуволн которой больше единицы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-01522).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов В.Д.* Устойчивость решения некоторых интегродифференциальных уравнений, описывающих динамику вязкоупругих систем, при случайном возмущении их параметров // Дифференциальные уравнения, 1995. Т. 31. №9. С. 1518–1524.
2. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

3. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 2. С. 240–259.
4. Ariaratnam S.T. Dynamic stability of a column under random loading // Dynamic Stability of Structures. London: Pergamon Press, 1967. P. 255–265.
5. Ariaratnam S.T. Stability of mechanical systems under stochastic parametric excitation // Stability of Stochastic Dynamical Systems: Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1972. № 294. P. 291–302.
6. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
7. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
8. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругих конструкций при действии стационарных случайных сжимающих нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 153–159.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
10. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
11. Филатов А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971. 279 с.
12. Дроздов А.Д., Колмановский В.Б. Устойчивость вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке // ПМТФ. 1991. № 5. С. 124–131.
13. Drozdov A. Stability of a class of stochastic integro-differential equations // Stoch. Anal. Appl. 1995. V. 13. № 5. P. 517–530.
14. Ariaratnam S.T., Xie Wei-Chau. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real noise excitation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. № 3. P. 664–673.
15. Ariaratnam S.T., Xie Wei-Chau. Lyapunov exponents and stochastic stability of two-dimensional parametrically excited random systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1993. V. 60. № 3. P. 677–682.
16. Namachchivaya N.Sri, Van Roessel H.J., Talwar S. Maximal Lyapunov exponent and almost-sure stability for coupled two-degree-of-freedom stochastic systems // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61. № 2. P. 446–452.
17. Потапов В.Д. Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 105–110.

Москва

Поступила в редакцию  
25.I.1996