

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. А.М. Филимонов

КОНТИНУАЛЬНЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ОГРАНИЧЕННЫХ ✓ ОДНОМЕРНЫХ СРЕД В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Обсуждается взаимосвязь между дискретной и непрерывной моделями одномерной вязкоупругой среды. Если в качестве исходной принята дискретная модель, то в линейном случае показано, как построить серию уравнений с частными производными, которые можно рассматривать в качестве промежуточных между дифференциально-разностным уравнением для цепочки дискретных масс и уравнением для сплошной среды. Для этих промежуточных уравнений (в частности, одним из таких уравнений будет уравнение колебаний сплошной среды), показано, при каких условиях можно считать оправданной замену исходной континуальной модели дискретной цепочкой. В нелинейном случае рассмотрен аналог проблемы Ферми – Паста – Улама (ФПУ) при сильно нелинейных связях. Показано, как упомянутый вариант проблемы ФПУ может быть распространен на цепочки с нелинейной вязкоупругостью.

1. Непрерывные модели. Продольные колебания одномерных систем с релаксацией и ползучестью обычно изучаются с помощью непрерывной модели, т.е. изучаются колебания соответствующей сплошной среды, описываемые уравнением

$$\rho u_{tt} = \sigma_x - \eta u_t + f, \quad \eta = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

и некоторым определяющим соотношением (связью между неизвестными функциями ε и σ). Здесь $\varepsilon(x, t) = u_x(x, t)$, а $u(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ – соответственно продольное перемещение и напряжение одномерной сплошной среды в сечении x в момент времени t ; $\rho = \text{const} > 0$ и $f(x, t)$ – соответственно линейные плотности массы и внешней распределенной нагрузки.

Линейные определяющие соотношения часто иллюстрируются на дискретных механических моделях, состоящих из комбинаций элементов Гука, Ньютона и т.п. [1–3]. Например, в случае "стандартного" вязкоупругого материала после преобразований определяющее соотношение приобретает вид [4]

$$L_0 \sigma + L_1 \sigma_t = b_0 \varepsilon + b_1 \varepsilon_t$$

где L_0, L_1, b_0, b_1 – некоторые постоянные, а $\varepsilon = u_x$.

В общем случае, в линейной теории вязкоупругости часто рассматривают [1] определяющее соотношение вида

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \sigma = \sum_{r=0}^{R_2} b_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \varepsilon \quad (1.2)$$

где L_r, b_r – некоторые постоянные коэффициенты. В этом случае, исключив из (1.1), (1.2) функцию σ , приходим к следующему уравнению [1] для функции u :

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} (\rho u_{tt} + \eta u_t - f) = \sum_{r=0}^{R_2} b_r \frac{\partial^{r+2}}{\partial t^r \partial x^2} u \quad (1.3)$$

Если изучаются ограниченные среды, то для уравнения (1.3) можно поставить

краевые условия, например вида

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad l > 0 \quad (1.4)$$

Что же касается начальных условий, то определяющее соотношение (1.3) означает, что рассматриваемая сплошная среда обладает памятью [3, 4]. Поэтому для однозначного построения решения, помимо обычных начальных условий для функции $(x, t) \rightarrow u(x, t)$

$$u(x, 0) = \beta_0(x), \quad u_t(x, 0) = \beta_1(x) \quad (1.5)$$

где $x \rightarrow \beta_0(x)$, $x \rightarrow \beta_1(x)$ – заданные функции, нужно еще либо указать эволюцию среды при $t < 0$, либо задать начальное состояние среды, указав, например, функции

$$x \rightarrow \sigma(x, 0), \dots, x \rightarrow \partial^{R_1-1} \sigma(x, 0) / \partial t^{R_1-1} \quad (1.6)$$

Зная функции (1.5), (1.6), из пары уравнений (1.1), (1.2) однозначно определяются все необходимые начальные условия для функции $(x, t) \rightarrow u(x, t)$:

$$u(x, 0) = \beta_0(x), \dots, \frac{\partial^{R-1}}{\partial t^{R-1}} u(x, 0) = \beta_{R-1}(x), \quad R = \max\{R_1 + 2, R_2\} \quad (1.7)$$

(Как правило [1], в механике рассматриваются случаи, когда либо $R_1 = R_2$, либо $R_1 = R_2 - 1$.)

2. Дискретные модели. Изучение колебаний механической модели в виде дискретной цепочки материальных точек, соединенных связями с релаксацией и ползучестью, приводит к рассмотрению системы двух дифференциально-разностных уравнений (ДРУ), состоящей из уравнения

$$m\ddot{y} = s_{j+1} - s_j - \xi\dot{y}_j + F_j, \quad \xi = \text{const} > 0 \quad (2.1)$$

(m – масса j -й точки, F_j – внешняя продольная сила, приложенная к j -й точке, s_j – сила, с которой j -я точка воздействует на $(j-1)$ -ю точку) и уравнения

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{d^r}{dt^r} s_j = \sum_{r=0}^{R_2} B_r \frac{d^r}{dt^r} \Delta_j, \quad \Delta_j = y_j - y_{j-1} \quad (2.2)$$

играющего роль определяющего соотношения. Здесь L_r, B_r – некоторые постоянные.

Исключив, например, s_j из (2.1) и (2.2), получаем дифференциально-разностное уравнение ("цепочку"):

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{d^r}{dt^r} (m\ddot{y}_j + \xi\dot{y}_j - F_j) = \sum_{r=0}^{R_2} B_r \frac{d^r}{dt^r} (y_{j+1} - 2y_j - y_{j-1}) \quad (2.3)$$

Замечание. Иногда дифференциально-разностными называют уравнения, содержащие операции дифференцирования и взятия разности по одному и тому же аргументу (см., например, [5]). Однако, следуя классической традиции [6], будем использовать термин дифференциально-разностное уравнение для уравнений, содержащих операции дифференцирования и взятия разности по разным аргументам.

Для уравнения (2.3) также можно поставить краевые условия, например, вида

$$y_0(t) = y_N(t) = 0 \quad (2.4)$$

и начальные условия, аналогичные условиям (1.7):

$$y_j(0) = \alpha_0(j), \dots, y_j^{(R-1)}(0) = \alpha_{R-1}(j), \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (2.5)$$

Наборы $\{\alpha_0(j)\}, \dots, \{\alpha_{R-1}(j)\}$ предполагаются заданными.

3. Взаимосвязь между непрерывными и дискретными моделями в линейном случае. Задачу (2.3), (2.4), (2.5) можно рассматривать как одну из возможных схем метода прямых [7, 8] для задачи (1.3), (1.4), (1.7), если положить

$$m = \rho h, \quad B_r = b_r/h, \quad \xi = \eta h, \quad N = lh \quad (3.1)$$

(параметр $h > 0$ играет роль расстояния между материальными точками в статически равновесном состоянии) и связать тем или иным способом функции $(x, t) \rightarrow f(x, t)$, $x \rightarrow \beta_r(x)$ ($r = 0, \dots, R-1$) с функциями $t \rightarrow F_j(t)$ и наборами $\{\alpha_r(j)\}$, $r = 0, \dots, R-1$. Можно поставить вопрос о сходимости решения такой системы к решению задачи для уравнения (2.3).

В одних задачах, например в теории вязкоупругости, более естественно в качестве исходной принять непрерывную модель, а в некоторых других, например в физике твердого тела или в обобщенной задаче Жуковского [9], естественнее исходить из дискретной модели.

Однако, оставаясь только в математических рамках, нельзя решить, какую модель – дискретную или непрерывную следует считать исходной, а какую – ее аппроксимацией. Будем считать обе эти модели в этом смысле равноправными.

Естественно возникает и вопрос, в некотором смысле двойственный к вопросу о сходимости метода прямых: насколько хорошо непрерывная модель отражает свойства решений дискретной цепочки, если такую цепочку принять в качестве исходной?

Кроме того, в методе прямых точность приближения функций $y_j(t)$ к решению $u(x, t)$ при $x = jh$ можно пытаться повысить за счет увеличения числа точек N и тем самым уменьшения величины h при сохранении величин ρ , L_r , b_r , η и функций $(x, t) \rightarrow f(x, t)$, $x \rightarrow \beta_r(x)$. Однако если исходная дискретная цепочка фиксирована (т.е. фиксированы величины N , h , m , L_r , B_r , ξ и заданы функции $t \rightarrow F_j(t)$, и наборы $\{\alpha_r(j)\}$), то естественно возникает и вопрос: за счет чего можно уменьшить величину $|y_j(t) - u(jh, t)|$?

Из теории разностных схем (см., например, [10]) известно, что для заданного уравнения с частными производными можно построить много схем метода прямых, аппроксимирующих исходное уравнение. При этом уравнение (2.3), рассматриваемое как одна из возможных таких схем, характерно тем, что оно допускает непосредственные физические интерпретации.

Однако и для заданного ДРУ (2.3) можно построить не единственное уравнение с частными производными, решения которого аппроксимировали бы решения исходного уравнения (2.3). При этом, конечно, не каждое из таких уравнений с частными производными может допускать непосредственную физическую интерпретацию. В нелинейном случае примерами могут служить уравнения Буссинеска (относительно функции u_x)

$$\rho u_{tt} = E_1 \left(u_{xx} + \frac{h^2}{12} u_{xxxx} \right) + 3bh^2 u_x^2 u_{xx} \quad (3.2)$$

рассмотренное в [11], и уравнение (1.1) (при $\eta = 0$, $f(x, t) = 0$) с определяющим соотношением

$$\sigma = E_1 \varepsilon + b |\varepsilon|^p \operatorname{sgn}(\varepsilon) \quad (E_1 \geq 0, \quad b > 0, \quad p = 3) \quad (3.3)$$

рассмотренное в [12]. Эти уравнения соответствуют континуальным моделям для уравнения (2.1) (при $\xi = 0$, $F_j(t) = 0$) с определяющим соотношением

$$s_j = c_1 \Delta_j + B |\Delta_j|^p \operatorname{sgn}(\Delta_j) \quad (c_1 > 0, \quad B > 0, \quad p = 3) \quad (3.4)$$

(задача отыскания периодических решений уравнения (2.1) с нелинейным определяющим соотношением известна как проблема Ферми – Паста – Улама [13]).

4. Континуальные модели дискретных цепочек. Поскольку вопрос о способах построения различных схем метода прямых для уравнений с частными производными хорошо изучен, несколько бóльший акцент сделаем на некоторых приемах построения континуальных аналогов дискретных цепочек.

Один из наиболее распространенных приемов построения таких аналогов состоит в следующем. Дискретная переменная $j \in \mathbb{Z}$ формально заменяется на непрерывную переменную $x \in \mathbb{R}^1$, а функция $(j, t) \rightarrow y_j(t)$ на функцию $(x, t) \rightarrow Z(x, t)$, такую, что $Z(jh, t) = y_j(t)$, где $h > 0$ некоторая постоянная, имеющая смысл расстояния между соседними точками в равновесном состоянии. После этого, предположив аналитичность функции $(x, t) \rightarrow Z(x, t)$ по x , производят ее разложение по переменной x в каждой точке $x = jh$ и подставляют в уравнение цепочки. Затем, ограничившись слагаемыми не выше некоторого порядка $d > 0$ по h , получают соответствующее уравнение с частными производными, которое и считают континуальным аналогом цепочки. Именно таким путем было получено уравнение (3.2) [11].

Проследим детали такого способа получения континуального аналога на примере цепочки (2.3). Введем функцию $(x, t) \rightarrow Z(x, t)$, такую, что $Z(jh, t) = y_j(t)$. Формальное разложение в каждой точке $x = jh$ приводит к уравнению

$$m\ddot{Z}(jh, t) + \xi Z(jh, t) = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} Z(jh, t) + F_j(t) \quad (4.1)$$

Ограничившись в правой части уравнения (4.1) слагаемыми, порядка по h не большего, чем некоторое фиксированное $d \geq 0$, и заменив функции $t \rightarrow F_j(t)$ некоторой функцией $(x, t) \rightarrow hf(x, t)$, получаем приближенную континуальную модель цепочки (2.3) в виде

$$mu_{tt}(x, t) + \xi u_t(x, t) = c \sum_{n=1}^M \frac{2h^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} u(x, t) + hf(x, t) \quad (4.2)$$

где $2M = d$.

Определение. Уравнение типа (4.2), получающееся после отбрасывания слагаемых большего чем d порядка по h , будем называть промежуточной континуальной моделью порядка d для исходной цепочки. Полагая, в частности, в (4.2) $d = 2$, приходим к обычному волновому уравнению, а положив $d = \infty$, формально приходим к дифференциально-разностному уравнению для цепочки. Подчеркнем разницу между уравнением (4.1) и уравнением (4.2), которая имеет место даже при $d = \infty$: уравнение (4.2) выполняется при всех $x \in [0, l]$, тогда как уравнение (4.1) выполняется только при конечном числе значений $x = jh \in [0, l]$, $j = 0, \dots, N$.

Поэтому, вообще говоря, неоднозначным является не только распространение значений функций $t \rightarrow F_j(t)$ на все значения $x \in [0, l]$ (т.е. выбор функции $(x, t) \rightarrow f(x, t)$), но и условие того, какое должно выполняться уравнение при $x \neq jh$ вместо уравнения (4.1). Обычно принимается, что и при $x \neq jh$ выполняется то же самое уравнение, хотя в принципе можно рассматривать и другие возможности.

Распространено мнение, что если число материальных точек велико, а расстояния между ними малы, то движения такой системы точек похожи на движения соответствующей сплошной среды (см., например, [14–16]). Такая точка зрения высказывалась еще во время знаменитого спора между Даламбером, Эйлером, Д. Бернулли и Лагранжем о колебаниях струны.

Однако при выводе уравнения (1.1) (в отличие от уравнения (4.1)) с самого начала предполагается, что оно выполняется при всех $x \in [0, l]$ (последнее вытекает из самого представления о сплошной среде). По-видимому, это одна из причин, объясняющая возможную принципиальную разницу в характере решений для цепочки и для сплошной среды (см., например, [17, 18]).

В связи с оценкой близости решений дискретной и непрерывной моделей естественно возникают две проблемы.

Проблема 1. Можно ли при заданной фиксированной дискретной цепочке так подобрать соответствующую ей континуальную модель, чтобы величина $|y_j(t) - u(jh, t)|$ была достаточно малой на том или ином промежутке времени?

Проблема 2. Можно ли при заданной фиксированной континуальной модели и некотором заданном виде цепочки так подобрать число точек цепочки и другие числовые параметры, характеризующие цепочку, чтобы величина $|y_j(t) - u(jh, t)|$ была достаточно малой на некотором промежутке времени?

Положительный ответ на вопрос, поставленный в проблеме 2 для случая волнового уравнения содержится в работах Д. Бернулли и Лагранжа [14, 15].

Основанием здесь послужило то, что если в решении задачи для цепочки (2.3), (2.4), (2.5) при $R_1 = R_2 = 0$, $L_0 = 1$, $\xi = 0$ и при выполнении условий (3.1) совершить формальный предельный переход при $N \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, то получится решение соответствующей задачи (1.3)–(1.5).

Строгое обоснование такого предельного перехода – это доказательство сходимости метода прямых для волнового уравнения. Для любого фиксированного промежутка времени такое доказательство содержится, например, в [7, 8].

В связи с этим в ряде работ прикладного характера принималось, что решения задачи (2.3), (2.4), (2.5) и задачи (1.1), (1.4), (1.5) можно считать близкими, если число N достаточно велико. Этот подход часто используется при анализе решений задач для дискретной цепочки путем ее замены соответствующей сплошной средой. В частности, такая точка зрения по существу использована Жуковским [9], (см. также [19]).

Однако было показано [17, 18], что на неограниченном интервале времени решения задач для цепочки и для соответствующей сплошной среды могут различаться тем сильнее, чем больше число точек N (во всяком случае если это число – простое, или степень двойки), так как в цепочке может возникнуть так называемый эффект всплесков.

Естественно возникает вопрос о построении уравнения, более точного, чем волновое, которое описывало бы, в частности, и упомянутый эффект всплесков. Как показано ниже, таким уравнением может служить (4.2). Для того чтобы получить вид соответствующих краевых условий, заметим, что при $\xi = 0$ уравнение (4.2) – это уравнение Эйлера – Пуассона для следующего функционала, играющего роль действия (с учетом обозначений (3.1)):

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \rho u_t^2 + u f + E \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^n h^{2n-2}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} u \right)^2 \right) dx dt$$

с краевыми условиями

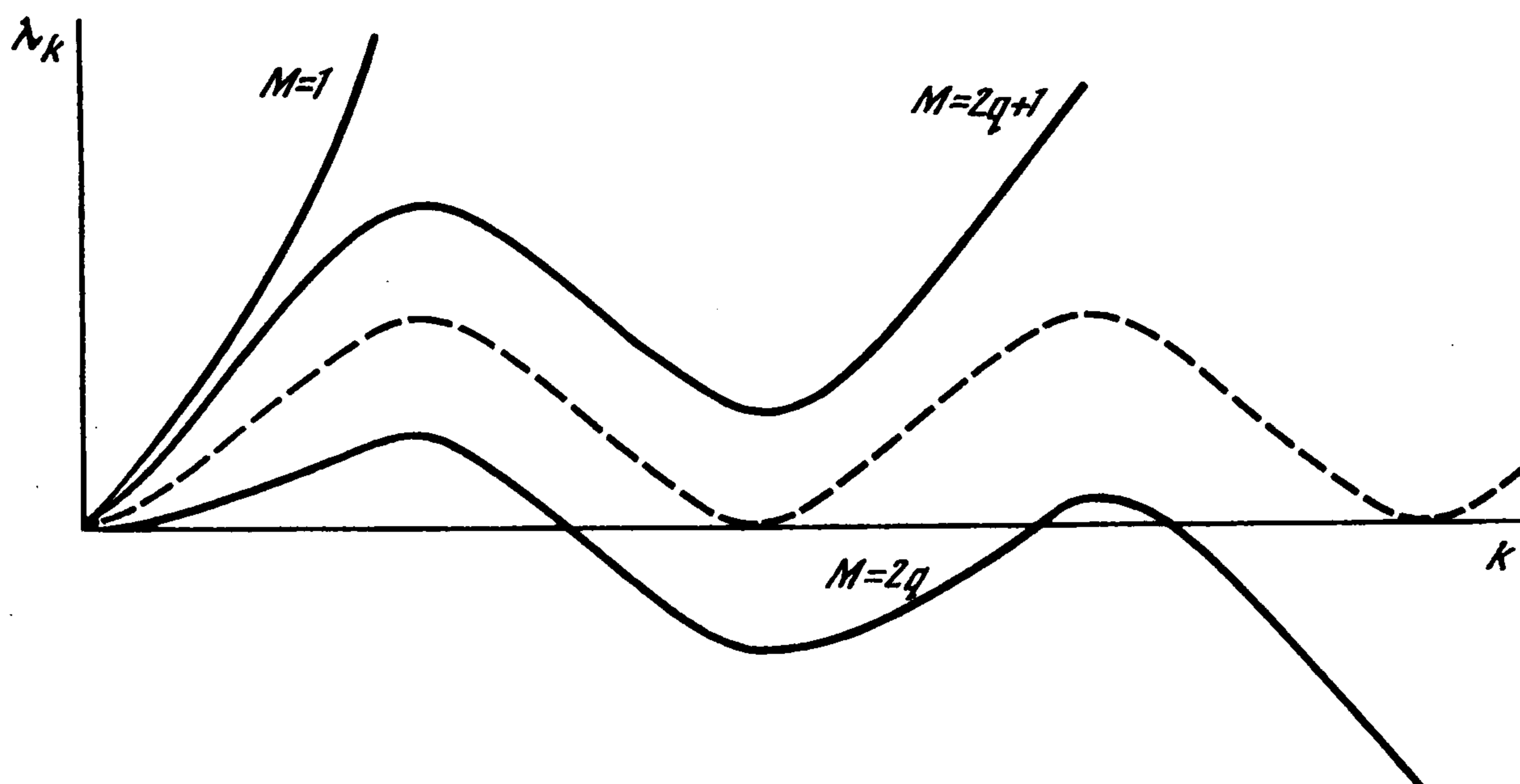
$$\frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} u(0, t) = \frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} u(l, t) = 0, \quad n = 0, \dots, M \quad (4.3)$$

При этом, конечно, возникает вопрос о корректности задачи (4.2), (4.3), (1.7). Для расширения возможных приложений рассмотрим упомянутый вопрос в несколько более общей постановке.

В прямоугольнике $\Pi(T_0) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_0\}$, где $l > 0$, $T_0 > 0$ – некоторые постоянные, рассмотрим уравнение

$$\sum_{r=0}^R \Gamma_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} u = 2 \sum_{r=0}^P H_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \sum_{n=0}^M \frac{2h^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}}{\partial X^{2n}} u(x, t) + hg(x, t), \quad h = \frac{l}{N} \quad (4.4)$$

с начальными условиями (1.7) и краевыми условиями (4.3). Здесь Γ_r ($r = 0, \dots, R$), H_r ($r = 0, \dots, P$), $l > 0$, $N \in \mathbb{N}$ – заданные постоянные, а $(x, t) \rightarrow g(x, t)$, $x \rightarrow \beta_r(x)$ ($r = 0$,



..., $R - 1$) – заданные функции. Ясно, что не ограничивая общности можно считать, что $\Gamma_R > 0$. Предположим, что $R > P$. Полагая $u(x, t) = \theta(t)\psi(x)$, можно установить, что собственные функции $x \rightarrow \psi_k(x)$ и собственные значения λ_k ($k = 1, \dots$) соответствующей однородной задачи имеют вид

$$\psi_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad \lambda_k = - \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi k h}{l} \right)^{2n}, \quad k = 1, \dots \quad (4.5)$$

На фигуре показаны зависимости от k величин собственных значений μ_k (т.е. значений λ_k при $M \rightarrow \infty$ – штриховая кривая) и собственных значений λ_k при $M = 1$ (волновое уравнение), $M = 2q$ и $M = 2q + 1$, где q – достаточно большое натуральное число.

Из (4.5) следует, что все $\lambda_k > 0$ ($k = 1, \dots$) только в случае, когда M – нечетное число. В простейшем частном случае, когда $R = 2$, $P = 0$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = m$, $H_0 = c$, $G_j(t) = 0$ ($j = 1, \dots, N - 1$), т.е. когда уравнение (4.4) соответствует промежуточной континуальной модели для классической задачи о колебаниях нити с бусинами, условие $\lambda_k > 0$ ($k = 1, \dots$) необходимо для корректности задачи (4.3), (4.4), (1.7), так как оно обеспечивает отсутствие экспоненциально растущих (при $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$) функций $\theta_k(t; \lambda_k)$ в решениях вида $u_k(x, t) = \theta_k(t; \lambda_k)\psi_k(x)$. Однако в общем случае для обеспечения корректности задачи (4.3), (4.4), (1.7) сделаем дополнительные предположения.

Пусть $\varphi_0(t; \Lambda), \dots, \varphi_{R-1}(t; \Lambda)$ – фундаментальная система решений уравнения

$$\sum_{r=0}^R \Gamma_r \frac{d^r}{dt^r} \varphi + \Lambda \sum_{r=0}^P H_r \frac{d^r}{dt^r} \varphi = 0 \quad (4.6)$$

причем функции $t \rightarrow \varphi_s(t; \Lambda)$ выбраны так, что

$$\frac{d^r}{dt^r} \varphi_s(0; \lambda) = \delta_s^r, \quad r = 0, \dots, R - 1; \quad s = 0, \dots, R - 1 \quad (4.7)$$

где δ_s^r – символ Кронекера. Предположим, что существуют постоянные $D > 0$, $v > 0$ и гладкая функция $t \rightarrow \Omega(t) \geq 0$, $\dot{\Omega}(t) \geq 0$, $\Omega(0) = 0$, такие, что для каждого решения $\varphi_s(t; \Lambda)$, ($s = 0, \dots, R - 1$) выполняется условие

$$\left| \frac{d^r}{dt^r} \varphi_s(t, \lambda) \right| \leq D(\Lambda^{rv} + 1)\dot{\Omega}(t) < \infty, \quad r = 0, \dots, R - 1 \quad (4.8)$$

Пусть, например, уравнение (4.6) соответствует классической задаче о колебаниях нити с бусинами. Тогда $\varphi_0(t; \Lambda) = \cos(t \sqrt{c\Lambda/m})$, $\varphi_1(t; \Lambda) = \sin(t \sqrt{c\Lambda/m})/\sqrt{c\Lambda/m}$, так что можно положить $D = \max\{1, c/m\}$, $v = 1$, $\Omega(t) = t^2/2$.

Наконец, для обеспечения корректности задачи (4.3), (4.4), (1.7) (если решение понимать в классическом смысле) сделаем следующие предположения: $\beta_r \in C^q[0, l]$, $g \in C^q[0, l]$,

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \beta_r(0) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \beta_r(l) = 0, \quad \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} g(0, t) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} g(l, t) = 0 \quad (4.9)$$

$$r = 0, \dots, R-1; \quad n = 0, \dots, MRv; \quad q \geq 2MRv + 1$$

Стандартными рассуждениями можно показать, что при сформулированных выше предположениях задача (4.3), (4.4), (1.7) корректно поставлена.

5. Аппроксимационные теоремы. Первая аппроксимационная теорема. Предполагая, как и ранее, что $\Gamma_R > 0$, $R > P$, рассмотрим следующую задачу для цепочки:

$$\sum_{r=0}^R \Gamma_r \frac{d^r}{dt^r} y_j = \sum_{r=0}^P H_r \frac{d^r}{dt^r} (y_{j+1} - 2y_j - y_{j-1}) + G_j(t) \quad (5.1)$$

с краевыми и начальными условиями (2.4), (2.5).

Соответствующая задача для промежуточного уравнения имеет вид (4.3), (4.4), (1.7) при $H_r = B_r$ ($r = 0, \dots, P$). Предположим, что для задачи (4.3), (4.4), (1.7) выполняются условия корректности, сформулированные выше.

Пусть

$$g(x, t) = \frac{2}{Nh} \sum_{j=1}^{N-1} G_j(t) D_{N-1}^*(x, j), \quad \beta_r(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_r(j) D_{N-1}^*(x, j), \quad r = 0, \dots, R-1$$

$$D_{N-1}^*(x, j) = D_{N-1} \left(\frac{\pi}{N} \left(j - \frac{x}{h} \right) \right) - D_{N-1} \left(\frac{\pi}{N} \left(j + \frac{x}{h} \right) \right), \quad D_{N-1}(a) = \frac{\sin(a(N - 1/2))}{2 \sin(a/2)}$$

($D_{N-1}(\cdot)$ — ядро Дирихле).

Тогда для любого $0 \leq t \leq T_0$ ($T_0 > 0$) справедлива оценка

$$|y_j(t) - u(jh, t)| \leq K_1 (\Omega(T_0) \exp(5C_2 T_0) + \int_0^{T_0} \Omega(t) \exp(5C_2 t) dt) \frac{\pi^{2M+2}}{(2M+2)!} \quad (5.2)$$

$$K_1 = 2NC_1 \max \left\{ R \max_{j,r} |\alpha_r(j)|, \sup_{j,t \leq T_0} |G_j(t)| \right\} ((4 + \pi^4/12)^{Rv} + 1)$$

$$C_1 = DP \max_{0 \leq r \leq P} |H_r| / \Gamma_R, \quad C_2 = R \max \left\{ \max_{0 \leq r \leq R-1} |\Gamma_r|, \max_{0 \leq r \leq P} |H_r| \right\} / \Gamma_R$$

Доказательство этой теоремы вынесено в приложение.

Следствие. Ясно, что так как

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \pi^{2M+2} / (2M+2)! = 0$$

то за счет выбора достаточно большого нечетного числа M при фиксированном значении N , величина $|y_j(t) - u(jh, t)|$ может быть сделана сколь угодно малой на произвольном конечном промежутке $[0, T_0]$. Поэтому теорема 1 дает решение Проблемы 1.

Вторая аппроксимационная теорема. Рассмотрим теперь задачу для промежуточного уравнения (4.4) при $\Gamma_r = h\gamma_r$, $r = 0, \dots, R$, $H_r = b_r/h$, $r = 0, \dots, P$. Задачу (4.3), (4.4), (1.7) можно рассматривать, как промежуточную континуальную модель для

цепочки (5.1), (2.4), (2.5). Характеризующие континуальную модель величины γ_r , ($r = 0, \dots, R$), b_r ($r = 0, \dots, P$), $l > 0$, число $M \geq 1$, функции $x \rightarrow \beta_r(x)$ ($r = 0, \dots, R-1$), $(x, t) \rightarrow g(x, t)$ будем считать заданными. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ полагаем $h = h(N) = l/N$.

Предположим, что при каждом h для задачи (4.3), (4.4), (1.7) выполнены условия корректности, сформулированные выше. Пусть

$$G_j(t) = \frac{h}{l} \int_0^l g(x, t) D_{N-1}^*(x, j) dx, \quad \alpha_r\{j\} = \frac{1}{l} \int_0^l \beta_r(x) D_{N-1}^*(x, j) dx$$

$$r = 0, \dots, R-1$$

Тогда для любых $N_0 \in \mathbb{N}$ и $N \in \mathbb{N}$, таких, что $N \geq N_0$, справедлива оценка

$$|y_j(t) - u(jh, t)| \leq K_6 \Omega_1(T_0) (N_0^{2M+3} N^{-2M} \exp(K_3 N_0 T_0) + N_0^{-1}) \quad (5.3)$$

$$K_6 = \max\{2K_4, K_5\}, \quad K_5 = 2K_3 \left(\max_{r,x} |\beta_r(x)| + \sup_{x,t \leq T_0} |g(x, t)| \right)$$

$$K_2 = 2Dl^2 \left(R \max_{r,x} |\beta_r''(x)| + \sup_{x,t \leq T_0} |g_{xx}(x, t)| / \gamma_R \right) / \pi^2$$

$$K_4 = C_2 \frac{\pi^2}{4l^2}, \quad K_3 = C_1 \frac{\pi^{2M+2}}{l^2 (2M+2)!} \left(\left(4 + \frac{\pi^2}{12} \right)^{Rv} + 1 \right)$$

$$\Omega_1(T_0) = \sup_{t \leq T_0} \left(\dot{\Omega}(t) + \Omega(t) + \Omega(t) \exp(C_2 t) + \int_0^t \Omega(t) \exp(C_2 t) dt \right)$$

Доказательство этой теоремы вынесено в приложение.

Следствие. Считая число N_0 выбранным из условия достаточной малости величины $K_6 \Omega_1(T_0) N_0^{-1}$, выберем значение N таким, чтобы

$$N \geq N_0^{2M+3} \exp(aK_3 N_0 T_0), \quad a > 1$$

Тогда правая часть оценки (5.3) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно больших N_0 и N указанного вида. Таким образом, теорема 2 дает решение Проблемы 2.

6. Системы с нелинейными связями и нелинейной ползучестью и релаксацией. Пусть основное уравнение движения имеет вид (2.1). Однако вместо линейного определяющего соотношения (2.2) рассмотрим, например, следующее нелинейное соотношение:

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{d^r}{dt^r} s_j = \sum_{r=0}^{R_2} B_r \left| \frac{d^r}{dt^r} \Delta_j \right|^p \operatorname{sgn} \left(\frac{d^r}{dt^r} \Delta_j \right), \quad p > 0 \quad (6.1)$$

естественно обобщающее соотношение (3.4) в случае $c_1 = 0$. Если из (2.1) и (6.1) исключить s_j , то получаем уравнение для y_j :

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{d^r}{dt^r} (m\ddot{y}_j + \xi\dot{y}_j - F_j) = \sum_{r=0}^{R_2} B_r \left(\left| \frac{d^r}{dt^r} \Delta_{j+1} \right|^p \operatorname{sgn} \left(\frac{d^r}{dt^r} \Delta_{j+1} \right) - \left| \frac{d^r}{dt^r} \Delta_j \right|^p \operatorname{sgn} \left(\frac{d^r}{dt^r} \Delta_j \right) \right) \quad (6.2)$$

Замечание. Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости могут быть распространены на нелинейный случай различными способами. Можно показать, что соотношение (6.1) укладывается в рамки нелинейно-наследственной теории Лидермана – Розовского (см., например, [3, 20, 21]).

Если теперь для сплошной среды (1.1) записать реологическое соотношение

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \sigma = \sum_{r=0}^{R_2} b_r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} \varepsilon \right|^p \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^r}{\partial t^r} \varepsilon \right) \quad (6.3)$$

аналогично соотношению (6.1), то, исключив из (1.1) и (6.3) функцию σ , получим уравнение

$$\sum_{r=0}^{R_1} L_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} (\rho u_{tt} + \eta u_t - f) = \sum_{r=0}^{R_2} b_r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} u_x \right|^p \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial^r}{\partial t^r} u_x \right) \quad (6.4)$$

Таким образом, в данном случае промежуточное уравнение $(p + 1)$ -го порядка для цепочки совпадает с соответствующим уравнением для сильно нелинейной сплошной среды, если положить $\rho = m/h$, $\eta = \xi/h$, $l = Nh$, $b_r = B_r h^p$.

Было показано [20], что для уравнения (6.4) можно построить серии точных решений вида $u(x, t) = \psi(x)\theta(t)$. Конечно, в нелинейном случае трудно получить строгие утверждения, аналогичные теореме 1 и 2. Основным методом, показывающим насколько оправдана замена цепочки (6.2) уравнением (6.4), является вычислительный эксперимент, который в данном случае показывает правомочность такой замены.

Подчеркнем, что именно наличие точных решений, построенных [21] для уравнения (6.4), дает возможность проведения такого сравнения решений. Если бы пришлось решать уравнение (6.4) каким-либо сеточным методом, то это фактически означало бы, что ищется решение не уравнения (6.4), а соответствующей дискретной по x и по t цепочки.

Аналитическое исследование решений нелинейной дискретной цепочки может оказаться очень трудным (примером служит задача Ферми – Паста – Улама [13]). Поэтому часто стремятся получить некоторый континуальный аналог исходной цепочки, который легче поддается анализу. В частности, в случае задачи Ферми – Паста – Улама таким континуальным аналогом будет уравнение Буссинеска [11].

Одну из причин того, что континуальный аналог зачастую легче исследовать, чем исходную цепочку, можно проследить на следующем примере.

Пусть основное уравнение движения имеет вид (2.1), а определяющее соотношение возьмем в виде (3.4), где $c_1 = 0$, $p > 0$. Тогда после исключения s_j получаем следующее уравнение для перемещений $y_j(t)$:

$$m\ddot{y}_j = B(|y_{j+1} - y_j|^p \operatorname{sgn}(y_{j+1} - y_j) - |y_j - y_{j-1}|^p \operatorname{sgn}(y_j - y_{j-1})) \quad (6.5)$$

Предположим, что рассматривается задача с закрепленными границами, т.е. $y_0(t) = y_N(t) = 0$. Уравнение (6.5) допускает точные решения в виде

$$y_j(t) = I(j)Q(t) \quad (6.6)$$

причем функции I , Q должны быть решениями следующих задач

$$|I(j+1) - I(j)|^p \operatorname{sgn}(I(j+1) - I(j)) - |I(j) - I(j-1)|^p \operatorname{sgn}(I(j) - I(j-1)) + \mu I(j) = 0, \quad I(0) = I(N) = 0 \quad (6.7)$$

$$m\ddot{Q}(t) + \mu b |Q(t)|^p \operatorname{sgn} Q(t) = 0 \quad (6.8)$$

Здесь μ – параметр, играющий роль собственного числа.

Рассмотрим теперь континуальный аналог этой цепочки, который возьмем в виде

$$\rho u_{tt} = b \frac{\partial}{\partial x} (|u_x|^p \operatorname{sgn}(u_x)), \quad \rho = \frac{m}{h}, \quad b = Bh^p, \quad l = Nh \quad (6.9)$$

где h – расстояние между материальными точками в статически равновесном состоянии.

Уравнение (6.9) допускает точные решения вида $u(x, t) = \psi(x)\theta(t)$, где функции ψ, θ должны быть решениями следующих задач

$$(|\psi'(x)|^p \operatorname{sgn}(\psi'(x)))' + \lambda \psi(x) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0 \quad (6.10)$$

$$\rho \ddot{\theta}(t) + \lambda b |\theta(t)|^p \operatorname{sgn}(\theta(t)) = 0 \quad (6.11)$$

где λ – параметр, играющий роль собственного числа.

Уравнения (6.8) и (6.11) сходны, однако спектральная задача для нелинейного разностного уравнения (6.7) намного сложнее, чем для нелинейного дифференциального уравнения (6.10), поскольку поведение решений нелинейных разностных уравнений даже первого порядка, вообще говоря, намного сложнее, чем для аналогичных дифференциальных уравнений (см., например, [22]).

Таким образом, аналитическое исследование характера решений континуального аналога цепочки может оказаться проще, чем исследование решений самой цепочки.

7. Приложение. Лемма. Пусть $\varphi_s(t, \Lambda)$ ($s = 0, \dots, R-1$) – фундаментальное решение уравнения (4.7). Тогда для Λ_1, Λ_2 справедлива оценка

$$|\varphi_s(t; \Lambda_1) - \varphi_s(t; \Lambda_2)| \leq C_1 |\Lambda_1 - \Lambda_2| (\Lambda_1^{Rv} + 1) \Omega(t) \exp(C_2 (\Lambda_2 + 1)t)$$

Доказательство. Сведя уравнение ((4.7) к системе и воспользовавшись леммой Гронуолла, получаем требуемую оценку.

Схема доказательства аппроксимационной теоремы 1. Для сокращения выкладок ограничимся случаем, когда

$$\alpha_r(j) = 0, \quad r = 0, \dots, R-1; \quad j = 1, \dots, N-1$$

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{N-1} Q_k(t) I_k(j); \quad Q_k(t) = \frac{1}{\Gamma_R} \int_0^t \varphi_R(t-\tau; \mu_k) q_k(\tau) d\tau, \quad I_k(j) = \sin \frac{\pi k j}{N} \quad (7.1)$$

$$q_k(t) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} F_j(t) I_k(j), \quad \mu_k = 4 \sin^2 \frac{\pi k}{2N}; \quad k = 1, \dots, N-1$$

Решение уравнения (4.4) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t) \psi_k(x) \quad (7.2)$$

$$\theta_k(t) = \frac{1}{\gamma_{R_0}} \int_0^t \varphi_R(t-\tau; \lambda_k) p_k(\tau) d\tau, \quad p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x, t) \psi_k(x) dx, \quad k = 1, \dots \quad (7.3)$$

причем $\psi_k(x), \lambda_k$ имеют вид (4.5).

В силу построения функции $(x, t) \rightarrow g(x, t)$ имеем: $p_k(t) = q_k(t)$ ($k = 1, \dots, N-1$), $p_k(t) = 0$ ($k = N, \dots$). Поэтому

$$|y_j(t) - u(jh, t)| \leq \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^t |\varphi_R(t-\tau; \lambda_k) - \varphi_R(t-\tau; \mu_k)| |q_k(\tau)| d\tau \quad (7.4)$$

Используя лемму при $\Lambda_1 = \lambda_k, \Lambda_2 = \mu_k$, из (7.4) получаем требуемый результат.

Схема доказательства аппроксимационной теоремы 2. Как и при доказательстве теоремы 1, для сокращения выкладок ограничимся случаем, когда $\beta_r(x) = 0, r = 0, \dots, R-1; 0 \leq x \leq l$.

Решение уравнения (5.1) имеет вид (7.1), а решение уравнения (4.4) – вид (7.2). Однако в рассматриваемом случае функции $t \rightarrow \theta_k(t)$, определяемые формулой (7.3), вообще говоря, уже не обязательно равны нулю при $k \geq N$. Тем не менее, в силу построения функций

$t \rightarrow G_j(t)$ имеем: $q_k(t) = p_k(t)$ ($k = 1, \dots, N-1$). Используя условия (4.9), получаем оценки:

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq T_0} \sum_{k=N_0+1}^{N-1} |q_k(t)| |I_k(j)| &\leq \sup_{t \leq T_0} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |p_k(t)| |I_k(j)| \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \sup_{x; t \leq T_0} |g''_{xx}(x, t)| \frac{1}{N_0} \int_0^t \Omega(t) dt \end{aligned} \quad (7.5)$$

Поэтому, так как

$$\begin{aligned} |y_j(t) - u(jh, t)| &\leq \sum_{k=1}^{N_0} |Q_k(t) - \theta_k(t)| |\psi_k(jh)| + \\ &+ \sum_{k=N_0+1}^{N-1} |Q_k(t)| |I_k(j)| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |\theta_k(t)| |\psi_k(jh)| \end{aligned}$$

то, используя лемму при $\Lambda_1 = \lambda_k/h^2$, $\Lambda_2 = \mu_k/h^2$ и оценку (7.5), получаем требуемый результат.

Замечание. Разностный оператор $(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$ в правой части уравнения (5.1) можно заменить на более общий оператор

$$\sum_{q=-R_3}^{R_4} a_q y_{j+q}, \quad R_3 \geq 0, \quad R_4 > 0$$

где a_q — некоторые коэффициенты. Если при этом существующие собственные функции $x \rightarrow \psi_k(x)$ ($k = 1, \dots$) и $j \rightarrow I_k(j)$ ($k = 1, \dots, N-1$) образуют ортогональные системы, причем ψ_k образуют полную систему, и $\psi_k(jh) = I_k(j)$, то схема доказательства теорем остается прежней. Однако если нет явных выражений для собственных функций ψ_k, I_k , то пока не известны достаточно эффективные критерии для проверки справедливости упомянутых дополнительных условий.

Автор благодарит А.Д. Мышкиса за обсуждение и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
2. Рейнер М. Реология. М.: Мир, 1965. 223 с.
3. Пальмов В.А. Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
4. Ишлинский А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 1. С. 79–92.
5. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
6. Lacroix S.F. Traité du calcul différentiel et calcul intégral. V. 3, Paris: Bacheliers, 1819, 776 p.
7. Лебедев В.И. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного (метода прямых) // Вестн. МГУ. Сер. Физ.-мат. и естеств наук. 1955 № 10. С. 47–57.
8. Будаков Б.М. О методе прямых для некоторых краевых задач // Вестник МГУ. Сер. Мат., мех., астроном., физ., химии. 1. 1956, С. 3–12.
9. Жуковский Н.Е. Работа (усилие) сквозного и несквозного тяговых приборов при трогании поезда с места и в начале его движения // Полн. собр. соч. т. 3. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 647–679.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 639 с.
11. Kruskal M. Asymptology in Numerical Computations: Progress and Plans on the Fermi – Pasta – Ulam Problem // Proc. IBM Scientific Comp. Sympos. on Large – Space Problem Division. N.Y., 1963. P. 43–66.
12. Zahusky N. Exact solution for the vibrations of nonlinear continuous model string // J. Math Phys. 1962. V. 3. N 5. P. 1028–1039.
13. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems // Collected works of E. Fermi. Chicago: Univ. Press, 1965. V. 2. P. 978–988.

14. *Bernoulli D.* Reﬂexions et eclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Academie. Memoires de la'Academie Roy. de Berlin. 1753. V. 9. P. 147–172.
15. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика. Т. 1. М.; Л.: ОНТИ, 1938. 348 с.
16. Рэлей. Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1950, 504 с.
17. *Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 989–995.
18. *Filimonov A.M., Kurchanov P.E., Myshkis A.D.* Some unexpected results in the classical problem of vibrations the string with N beards when N is large // C. r. Acad. sci. Paris Ser. 1. 1991. Т. 313, N 13. P. 961–965.
19. *Лурье А.И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 432 с.
20. *Локшин А.А., Сагомоян Е.А.* Нелинейные волны в механике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1989. 144 с.
21. *Филимонов А.М.* Точные решения некоторых задач о колебаниях одномерной сплошной среды с нелинейной наследственностью и особенности соответствующих нелинейных спектральных задач // Изв. РАН. МТТ. 1992. Т. 27. № 6. 1992. С. 121–128.
22. *Шарковский А.М., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наук. думка, 1986. 279 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1994