

УДК 539.3

© 1997 г. В.Н. Пилипчук, Г.А. Старушенко

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ НЕГЛАДКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Показано, что способ [1] введения негладкого аргумента посредством специальных тождеств дает дополнительное средство анализа одномерных конструкций периодической структуры. При этом строится модифицированный вариант преобразования, значительно расширяющий возможности приложений.

Ранее [2, 3] изложен метод негладких преобразований искомых функций, позволяющий, в частности, корректно написать дифференциальные уравнения систем с жесткими ограничителями в форме, пригодной для использования методов осреднения.

1. Кусочно-линейный периодический аргумент и связанные с ним соотношения. Обозначим через $\tau(x)$ кусочно-линейную пилообразную 4-периодическую функцию (сплошная линия на фиг. 1), определенную на периоде выражением

$$\tau(x) = \begin{cases} k_1 x, & -(1+\theta) \leq x \leq 1+\theta \\ k_2(x-2), & 1+\theta \leq x < 3-\theta \end{cases} \quad (1.1)$$

$$k_1 = 1/(1+\theta), \quad k_2 = -1/(1-\theta); \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

где θ – параметр, характеризующий наклон зубьев пилы. Тогда произвольная 4а-периодическая функция $f(x)$ представима в виде соотношения, выполняющегося при любом значении x ,

$$f(x) = P(\tau) + Q(\tau)\tau', \quad \tau = \tau(x/a) \quad (1.2)$$

где

$$P(\tau) = 1/2 \{ (1+\theta)f[(1+\theta)a\tau] + (1-\theta)f[(2-(1-\theta)\tau)a] \} \quad (1.3)$$

$$Q(\tau) = 1/2 (1-\theta^2) \{ f[(1+\theta)a\tau] - f[(2-(1-\theta)\tau)a] \}$$

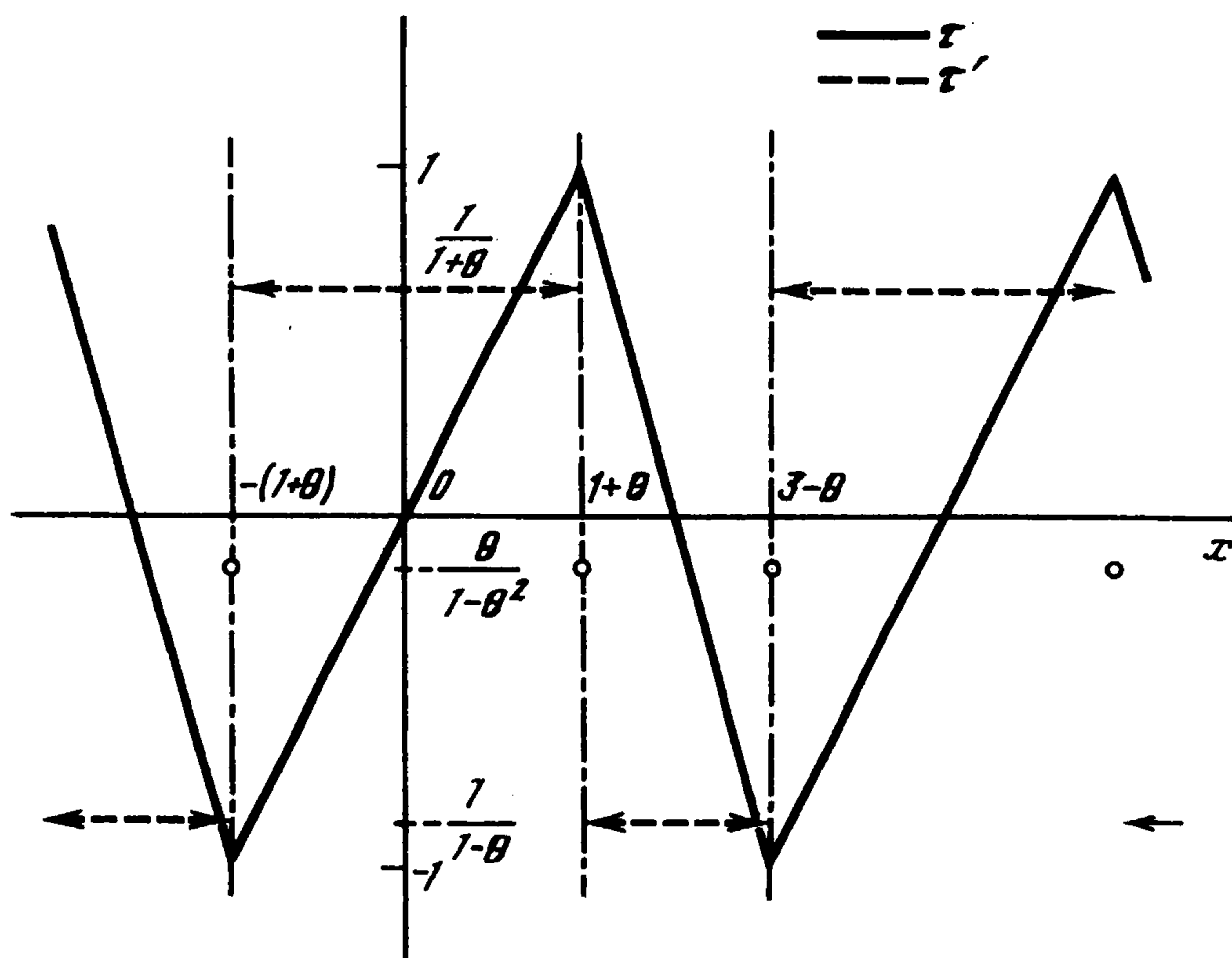
Свойства производной τ' поясняются далее (на множестве изолированных точек $\{x: \tau(x/a) = \pm 1\}$ функция τ в классическом смысле не дифференцируема).

Для доказательства соотношения (1.2) достаточно проверить его тождественность на периоде.

Замечание. Аналогичное представление имеет место и в непериодическом случае, если определить функцию $\tau(x)$ соотношением

$$\tau(x) = \begin{cases} k_1 x, & x \geq 0 \\ k_2 x, & x \leq 0 \end{cases}$$

Принимая в (1.1) $\theta = 0$, приходим к симметричной относительно четверти периода ($x = 1$) пилообразной функции $\tau(x)$, и выражения для функций $P(\tau)$, $Q(\tau)$ совпадают с приведенными ранее [1].



Фиг. 1

Отметим некоторые свойства косоугольной пилообразной функции $\tau = \tau(x)$, определенной соотношением (1.1). Квадрат производной τ'^2 при $\theta \neq 0$ есть кусочно-постоянная функция с периодической серией разрывов первого рода, т.е. функция из того же класса, что и сама производная τ' . Более того имеет место соотношение

$$\tau'^2 = \alpha + \beta\tau'; \quad \alpha = 1/(1-\theta^2), \quad \beta = -2\theta/(1-\theta^2) \quad (1.4)$$

позволяющее доопределить значения функций τ' , τ'^2 и в самих точках разрывов.

Так, представляя формально

$$2\tau'\tau'' = (\tau'^2)' = (\alpha + \beta\tau')'$$

имеем (см. далее замечание)

$$\tau'\tau'' = -\theta(1-\theta^2)^{-1}\tau'' \quad (1.5)$$

откуда находим

$$\tau'|_{x=\pm(1+\theta)} = -\theta(1-\theta^2)^{-1} \quad (1.6)$$

Таким образом, для всех x на периоде имеем (штриховая линия и светлые точки на фиг. 1)

$$\tau'(x) = \begin{cases} 1/(1+\theta), & -(1+\theta) < x < (1+\theta) \\ -\theta/(1-\theta^2), & x = \pm(1+\theta) \\ -1/(1-\theta), & (1+\theta) < x < (3-\theta) \end{cases} \quad (1.7)$$

Замечание. Напомним, что в рамках теории обобщенных функций произведение δ -функции Дирака на функцию, имеющую разрыв в "точке локализации" δ -импульса, вообще говоря, не определено. Как раз такого типа особенности и имеют сомножители в левой части соотношения (1.5). Однако в данном случае функции τ' , τ'' могут рассматриваться как пределы последовательностей, порожденных одной и той же последовательностью гладких функций, аппроксимирующих пилу τ . Это позволяет придать разумный смысл произведению $\tau'\tau''$, а именно однозначно определить его действие на произвольную пробную функцию (см. в связи с этим [4, 5]).

Заметим, что выражения (1.4)–(1.7) в частном случае ($\theta = 0$) переходят в соответствующие соотношения для симметричной пилообразной функции [1]. Так, при $\theta = 0$ имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и выражение (1.4) приобретет вид $\tau^2 = 1$. В результате сумма $P + Q\tau'$ образует элемент алгебры гиперболических чисел [6]. При $\theta \neq 0$ соотношение (1.4) порождает алгебру более сложной структуры.

Алгебраические свойства рассматриваемых выражений, как показано далее, значительно упрощают соответствующие преобразования дифференциальных уравнений.

2. Преобразование дифференциальных уравнений на множестве периодических решений. Сделанные в разд. 1 замечания позволяют разыскивать в форме (1.2) периодические решения дифференциальных уравнений. В самом деле, поскольку тождество (1.2) справедливо для любой периодической функции, то искомое периодическое решение также может быть представлено в форме (1.2). Проиллюстрируем сказанное на примере линейного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$a_2(\eta) \frac{d^2 u}{d\eta^2} + a_1(\eta) \frac{du}{d\eta} + a_0(\eta)u = q(\eta) \quad (2.1)$$

где $a_i(\eta)$ ($i = 0, 1, 2$), $q(\eta)$ – непрерывные периодические функции с периодом, равным четырем.

Будем разыскивать дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (2.1) в форме

$$u = X(\tau) + Y(\tau)\tau' \quad (2.2)$$

где $\tau = \tau(\eta)$ – определенная выражением (1.1) пилообразная 4-периодическая функция, штрих означает производную по η ; функции $X(\tau)$, $Y(\tau)$ подлежат определению. Формально дифференцируя равенство (2.2) по τ и принимая во внимание соотношение (1.4), получаем (точка означает дифференцирование по τ):

$$du / d\eta = \alpha \dot{Y} + (\dot{X} + \beta \dot{Y})\tau' + Y\tau'' \quad (2.3)$$

Последнее слагаемое в правой части представляет собой периодическую серию "локализованных в точках" $\{\eta: \tau(\eta) = \pm 1\}$ δ -импульсов. Ввиду непрерывности функции $u(\eta)$ этот член присутствует формально и подлежит исключению посредством принятия условия

$$Y|_{\tau=\pm 1} = 0 \quad (2.4)$$

Проведя аналогичные рассуждения для второй производной, получаем

$$d^2 u / d\eta^2 = \alpha \ddot{X} + \alpha \beta \ddot{Y} + [\beta \ddot{X} + (\alpha + \beta^2) \ddot{Y}]\tau' \quad (2.5)$$

при условии

$$(\dot{X} + \beta \dot{Y})|_{\tau=\pm 1} = 0 \quad (2.6)$$

Существенно, что результат дифференцирования есть элемент той же алгебры, что и дифференцируемое выражение.

Далее представим периодические коэффициенты и правую часть уравнения (2.1) в форме

$$\begin{aligned} a_i(\eta) &= A_i^{(1)}(\tau) + A_i^{(2)}(\tau)\tau' \quad (i = 0, 1, 2) \\ q(\eta) &= Q_1(\tau) + Q_2(\tau)\tau' \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полученные выражения (2.2)–(2.7) позволяют выполнить преобразование исходного уравнения (2.1) на множестве периодических решений, включающее переход к новому ("пилообразному") аргументу τ .

Так, подставляя соответствующие величины из (2.2)–(2.7) в уравнение (2.1) и

принимая во внимание соотношение (1.4), будем иметь в обеих частях равенства по две группы величин, содержащих множитель τ' и не содержащих его.

Сравнивая эти группы величин, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \alpha(A_2^{(1)} + \beta A_2^{(2)})\ddot{X} + \alpha(\beta A_2^{(1)} + (\alpha + \beta^2)A_2^{(2)})\ddot{Y} + \\ & + \alpha A_1^{(2)}\dot{X} + \alpha(A_1^{(1)} + \beta A_1^{(2)})\dot{Y} + A_0^{(1)}X + \alpha A_0^{(2)}Y = Q_1, \\ & (\beta A_2^{(1)} + (\alpha + \beta^2)A_2^{(2)})\ddot{X} + ((\alpha + \beta^2)A_2^{(1)} + \beta(2\alpha + \beta^2)A_2^{(2)})\ddot{Y} + \\ & + (A_1^{(1)} + \beta A_1^{(2)})\dot{X} + (\beta A_1^{(1)} + (\alpha + \beta^2)A_1^{(2)})\dot{Y} + A_0^{(2)}X + (A_0^{(1)} + \beta A_0^{(2)})Y = Q_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

при краевых условиях (2.4), (2.6).

Полученная краевая задача имеет формально более сложный вид по сравнению с исходным уравнением. Вместе с тем в ряде случаев проявляются и определенные преимущества преобразованной системы. Речь идет прежде всего об уравнениях, коэффициенты и правая часть которых – негладкие функции, выраженные каким-либо простым образом через функцию τ .

В подтверждение сказанного рассмотрим иллюстративный пример. Пусть в уравнении (2.1)

$$a_2 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad a_0 \equiv 1; \quad q = Q\tau(\eta) \quad (Q = \text{const})$$

т.е. уравнение имеет вид

$$d^2u/d\eta^2 + u = Q\tau \quad (-\infty < \eta < \infty)$$

Это уравнение с механической точки зрения может быть интерпретировано как уравнение равновесия бесконечной струны на линейно-упругом основании под действием τ -образной поперечной нагрузки. Примем для простоты $\alpha = 1, \beta = 0$ (симметричная "пила"). Краевая задача (2.8), (2.4), (2.6) в данном случае приобретает вид

$$\ddot{X} + X = Q\tau, \quad \ddot{Y} + Y = 0; \quad \dot{X}|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad Y|_{\tau=\pm 1} = 0$$

и имеет решение

$$Y \equiv 0, \quad X = Q(\tau - \sin \tau / \cos 1)$$

Таким образом, периодическое решение представлено через стандартную негладкую функцию достаточно простого вида посредством единого аналитического выражения, при этом "автоматизирован" процесс сопряжения решений в точках негладкости внешней нагрузки $\{\eta: \tau(\eta) = \pm 1\}$.

Далее, однако, существенно используется другое свойство описанного преобразования. А именно, возможность исключения пространственно-локализованных особенностей периодической структуры. В самом деле, появляющиеся в результате дифференцирования выражения (2.2) сингулярные члены могут быть использованы для исключения периодических сингулярных членов в исходном уравнении, если таковые там содержатся. В последнем случае следует исходить из концепции слабых решений [7], понимая уравнения в смысле интегральных тождеств.

3. Периодическая задача для бесконечной струны на линейно-упругих опорах. В качестве иллюстрации описанного в разд. 1, 2 подхода рассмотрим задачу о собственных колебаниях бесконечной струны на периодически расположенных линейно-упругих опорах. Решение этой задачи для равноотстоящих опор в терминах пилообразного преобразования аргумента было получено в [6]. Здесь предположим, что опоры располагаются попарно на расстоянии $2(1 - \theta)a$ друг от друга с периодом $4a$. Уравнение колебаний такой струны будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \gamma \text{sign } \tau \tau'' u = 0 \quad (3.1)$$

где $u = u(t; \eta)$ – координаты точек струны, ρ – погонная плотность, T – натяжение,

2γ – средняя по длине струны жесткость опор, $\tau = \tau(\eta/a)$ – косоугольная пилообразная функция, определенная соотношением (1.1).

Положив в случае собственных колебаний $u = e^{i\lambda t}U(\eta)$, приходим к дифференциальному уравнению, решение которого представим в виде

$$U = X(\tau) + Y(\tau)\tau' \quad (3.2)$$

Производные U' , U'' определяем, принимая во внимание соотношения (2.3), (2.5), и после соответствующих преобразований приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{X} - \frac{2\theta}{1-\theta^2} \dot{Y} + (1-\theta^2)k^2 X &= 0 \\ \ddot{Y} - \frac{2\theta(1-\theta^2)}{1+3\theta^2} \dot{X} + \frac{1+3\theta^2}{(1-\theta^2)^2} k^2 Y &= 0 \quad (k^2 = \lambda^2 a^2 \rho / T) \end{aligned} \quad (3.3)$$

с граничными условиями, полученными исключением в уравнении сингулярных членов

$$Y|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad \left(\dot{X} - \frac{2\theta}{1-\theta^2} \dot{Y} + pX \operatorname{sign} \tau \right) \Big|_{\tau=\pm 1} = 0 \quad (p = a^2 \gamma / T) \quad (3.4)$$

Решая задачу на собственные значения (3.3), (3.4), определяем искомые формы колебаний струны, т.е. функции $X(\tau)$, $Y(\tau)$. В зависимости от соотношения жесткостных и геометрических параметров струны (величин k , p , θ) существуют четыре различных вида собственных форм колебаний.

1°. Если параметры k , p , θ связаны уравнением

$$\operatorname{tg} k(1+\theta) + \operatorname{tg} k(1-\theta) = 2p/k/(1-\theta^2) \quad (3.5)$$

то формы колебаний (3.2) будут иметь вид

$$\begin{aligned} X(\tau) &= C \left(\cos k(1+\theta)\tau + \frac{1-\theta}{1+\theta} \sigma(\theta, \tau) \right), \quad Y(\tau) = C(1-\theta)(\cos k(1+\theta)\tau - \sigma(\theta, \tau)) \times \\ &\times \left(\sigma(\theta, \tau) = \frac{\cos k(1+\theta)}{\cos k(1-\theta)} \cos k(1-\theta)\tau \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где C – произвольный постоянный множитель.

2°. Если зависимость величин k , p , θ описывается уравнением, отличающимся от (3.5) заменой tg на $-\operatorname{ctg}$, получаем собственные функции, отличающиеся от (3.6) заменой $\cos$ на $\sin$.

3°. Если расположение опор таково, что расстояния между ними связаны соотношениями

$$\frac{2(1-\theta)a}{2(1+\theta)a} = \frac{1-\theta}{1+\theta} = \frac{2n-1}{2m-1} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

и

$$k = \frac{\pi(2m-1)}{2(1+\theta)} = \frac{\pi(2n-1)}{2(1-\theta)} \quad (3.8)$$

то формы колебаний получаем в виде (3.6), где $\sigma(\theta, \tau) = (-1)^{m-n+1} \cos k(1-\theta)\tau$.

4°. Если отношение расстояний между опорами представимо в виде

$$\frac{2(1-\theta)a}{2(1+\theta)a} = \frac{1-\theta}{1+\theta} = \frac{n}{m} \quad (n, m = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

и

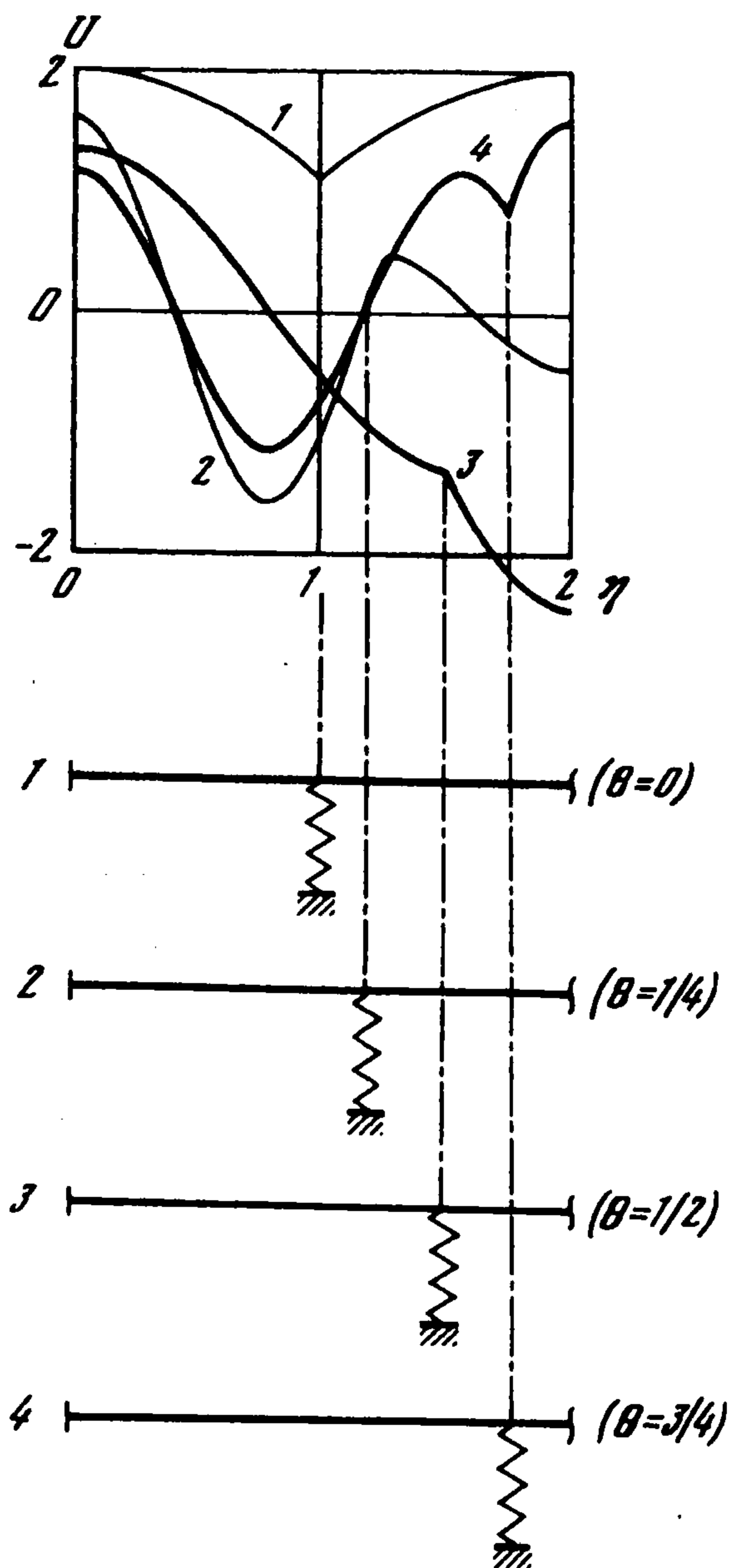
$$k = \frac{\pi m}{1+\theta} = \frac{\pi n}{1-\theta} \quad (3.10)$$

то собственные функции получаем из соотношения (3.6) заменой $\cos$ на $\sin$ и $\sigma(\theta, \tau) = (-1)^{m-n+1} \sin k(1-\theta)\tau$.

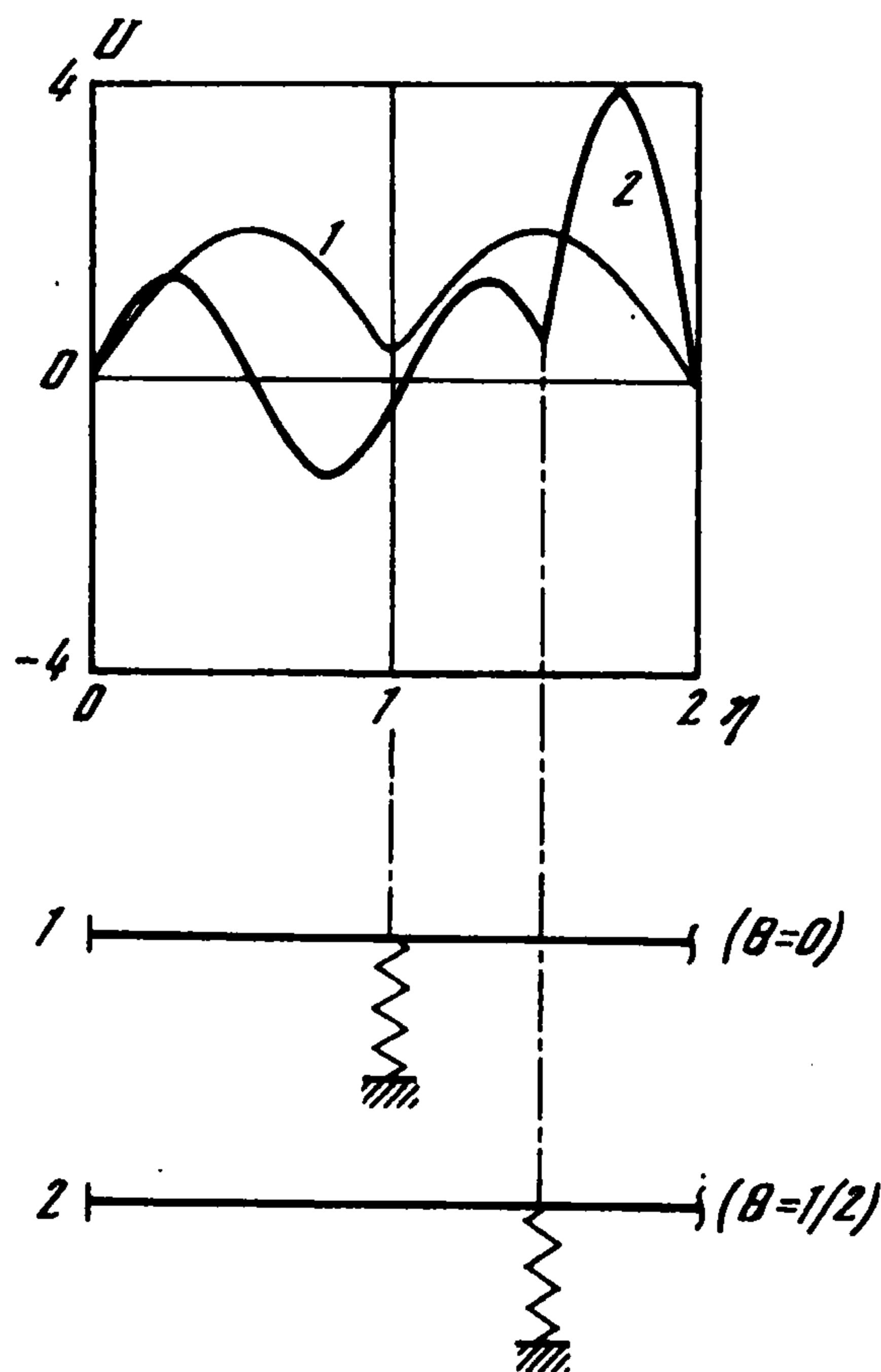
В частном случае $\theta = 0$ (равномерно расположенные опоры) полученные соотношения совпадают с соответствующими выражениями, приведенными ранее [6].

Графики собственных форм колебаний струны для описанных в п.п. 1°–4° случаев представлены на фиг. 2–5. Приведенные графики построены на полупериоде ($0 \leq \eta \leq 2$) и в силу симметрии могут быть периодически продолжены на всю длину струны четным образом в случаях 1°, 3° (фиг. 2, 4) и нечетным – в случаях 2°, 4° (фиг. 3, 5). Показанные на графиках формы колебаний струны получены при варьировании параметра θ , т.е. при изменении расположения опор. Отметим, что в случаях 3°, 4° опоры неподвижны, т.е. перемещения струны в точках расположения опор равны нулю. Напротив, в случаях 1°, 2° при собственных колебаниях опоры работают в целом вместе со струной.

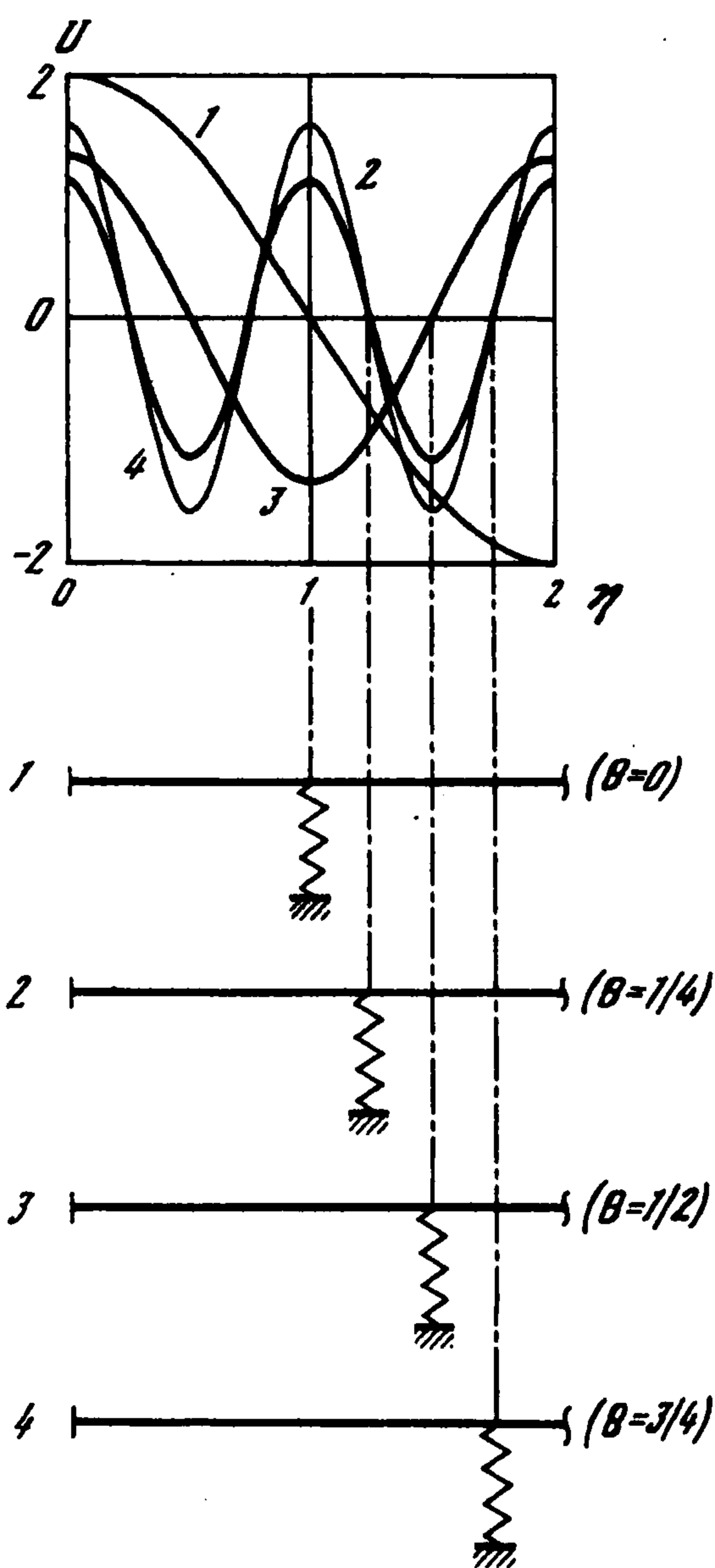
4. Случай медленно изменяющейся нагрузки. Покажем, что изложенная выше методика в сочетании с идеей осреднения пригодна для построения решений с "быстрыми" (периодическими) и "медленными" (непериодическими) составляющими. В качестве примера приведем решение статической задачи для рассмотренной выше бесконечной струны на периодически расположенных линейно-упругих опорах. Будем при этом полагать, что внешняя нагрузка $q = q(\eta^0, \eta^*)$, т.е. в соответствии с методом двух масштабов [3, 8] может быть представлена как функция двух переменных: "медлен-



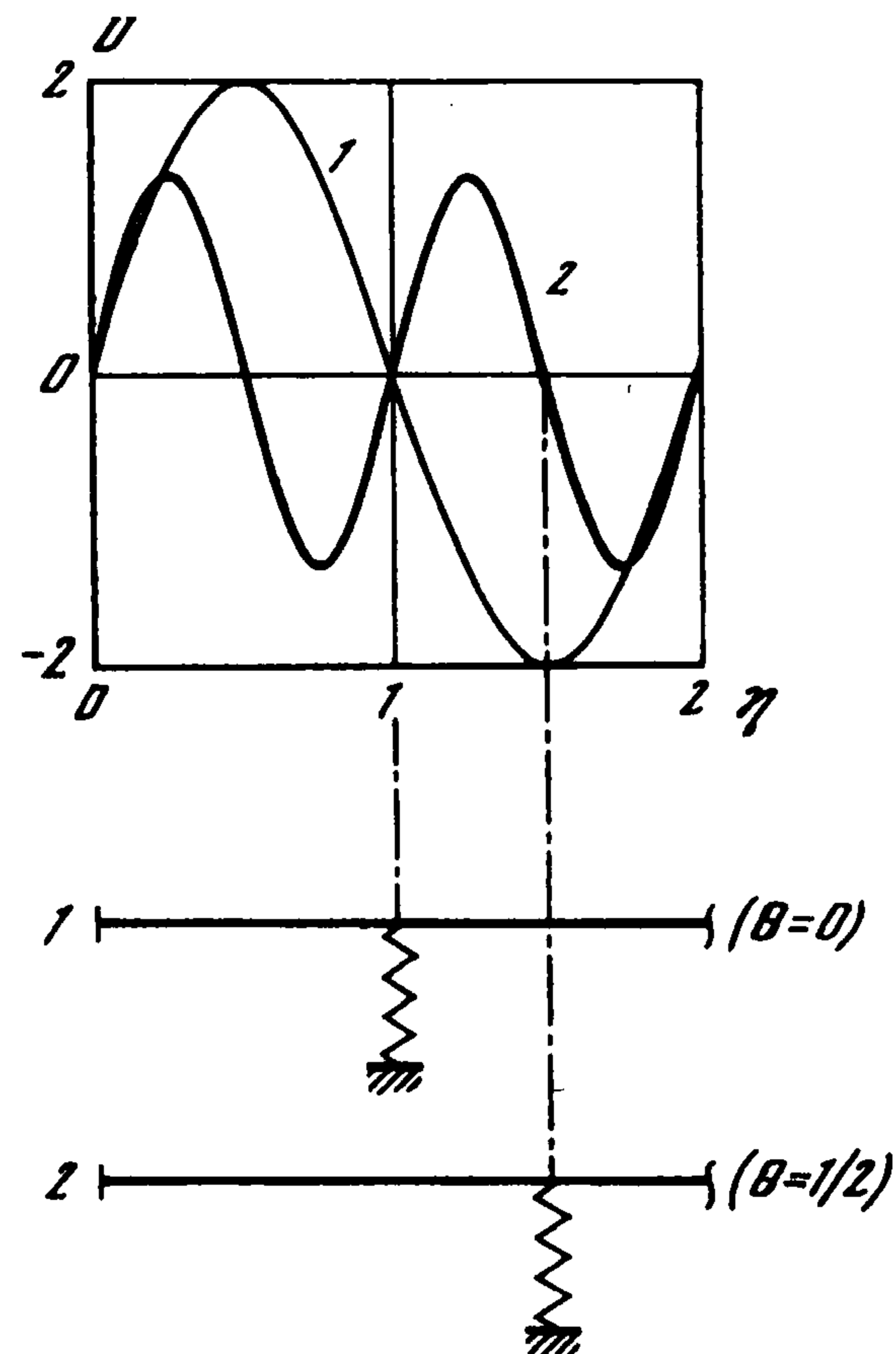
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ной" $\eta^0 = \eta$ (оставим для нее прежнее обозначение) и "быстрой" $\eta^* = \eta/\epsilon$, где ϵ – малый параметр, характеризующий периодичность расположения опор. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$T d^2 u / d\eta^2 + \gamma \operatorname{sign} \tau \tau'' u = q(\eta, \eta / \epsilon) \quad (4.1)$$

Принимая во внимание, что

$$q = Q_1(\eta, \tau) + Q_2(\eta, \tau) \tau' \quad (4.2)$$

искомую функцию u представим в виде (2.2), где $X = X(\eta, \tau)$, $Y = Y(\eta, \tau)$, $\tau = \tau(\eta/\epsilon)$ определяется соотношением (1.1). Дифференцируя выражение (2.2) как сложную функцию, получим

$$\begin{aligned} d^2 u / d\eta^2 = & X'' + Y'' \tau' + 2\epsilon^{-1} [\Delta(\theta) \dot{Y}' + (\dot{X}' - 2\theta \Delta(\theta) \dot{Y}') \tau'] + \\ & + \epsilon^{-2} [\Delta(\theta) (\ddot{X} - 2\theta \Delta(\theta) \ddot{Y}) + \Delta(\theta) ((1 + 3\theta^2) \Delta(\theta) \ddot{Y} - 2\theta \ddot{X}) \tau' + \\ & + (\dot{X}' - 2\theta \Delta(\theta) \dot{Y}') \tau''] \quad (\Delta(\theta) = (1 - \theta^2)^{-1}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Наличие в соотношении (4.3) малого параметра делает естественным представление составляющих решения – функций X, Y – в виде рядов по степеням ϵ :

$$X = \sum_{i=0}^n \epsilon^i x_i(\eta, \tau), \quad Y = \sum_{i=0}^n \epsilon^i y_i(\eta, \tau). \quad (4.4)$$

Такой подход приводит к расщеплению исходного уравнения (4.1) на рекуррентную последовательность краевых задач на промежутке $-1 \leq \tau \leq 1$.

1°. Приравнивая соответствующие выражения при ε^0 , получаем задачу для определения функций x_0, y_0

$$\ddot{x}_0 - 2\theta\Delta(\theta)\ddot{y}_0 = 0, \quad 2\theta\ddot{x}_0 - (1 + 3\theta^2)\Delta(\theta)\ddot{y}_0 = 0 \quad (4.5)$$

$$y_0|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad (\dot{x}_0 - 2\theta\Delta(\theta)\dot{y}_0)|_{\tau=\pm 1} = 0$$

Отсюда, очевидно, следует, что $x_0 = x_0(\eta)$, $y_0 \equiv 0$.

2°. Задача для определения функций x_1, y_1 аналогична (4.5), и следовательно, имеем $x_1 = x_1(\eta)$, $y_1 \equiv 0$. Это означает, что первые два члена в разложениях (4.4) представляют собой чисто медленную составляющую искомого решения, а первая быстрая поправка $x_2 + y_2\tau'$ имеет порядок ε^2 и определяется из краевой задачи

$$-\Delta(\theta)\ddot{x}_2 + 2\theta\Delta^2(\theta)\ddot{y}_2 = x_0'' - Q_1(\eta, \tau) / T$$

$$-2\theta\Delta(\theta)\ddot{x}_2 + (1 + 3\theta^2)\Delta^2(\theta)\ddot{y}_2 = Q_2(\eta, \tau) / T \quad (4.6)$$

$$y_2|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad (\dot{x}_2 - 2\theta\Delta(\theta)\dot{y}_2)|_{\tau=\pm 1} = \mp(\gamma / T)x_0. \quad (4.7)$$

Решение этой краевой задачи имеет вид

$$x_2 = C_1\tau + C_2 - 0,5(1 + 3\theta^2)x_0''\tau^2 + \frac{\theta}{T} \left[2\Phi(\eta, \tau) + \int \frac{Q_1}{\theta\Delta(\theta)} d\tau \right] \quad (4.8)$$

$$y_2 = C_3\tau + C_4 - \theta\Delta^{-1}(\theta)x_0''\tau^2 + \frac{\Phi(\eta, \tau)}{T\Delta(\theta)} \quad (4.9)$$

где

$$C_1 = - \left[\int Q_1 d\tau|_{\tau=1} + \int Q_1 d\tau|_{\tau=-1} + 2\theta\Delta(\theta)\Phi(\eta, \tau)|_{\tau=-1}^{\tau=1} \right] \frac{1}{2\Delta(\theta)T}$$

$$C_3 = -\Phi(\eta, \tau)|_{\tau=-1}^{\tau=1} \frac{1}{2\Delta(\theta)T} \quad (4.10)$$

$$C_4 = \left[\theta x_0'' - (\Phi(\eta, \tau)|_{\tau=1} + \Phi(\eta, \tau)|_{\tau=-1}) \frac{1}{2T} \right] \frac{1}{\Delta(\theta)}$$

$$\Phi(\eta, \tau) = \iint [Q_2(\eta, \tau) + 2\theta Q_1(\eta, \tau)] d\tau d\tau$$

Отметим, что второе соотношение в граничных условиях (4.7) дает возможность найти значение C_1 в выражении для x_2 при условии, что выполняется соотношение

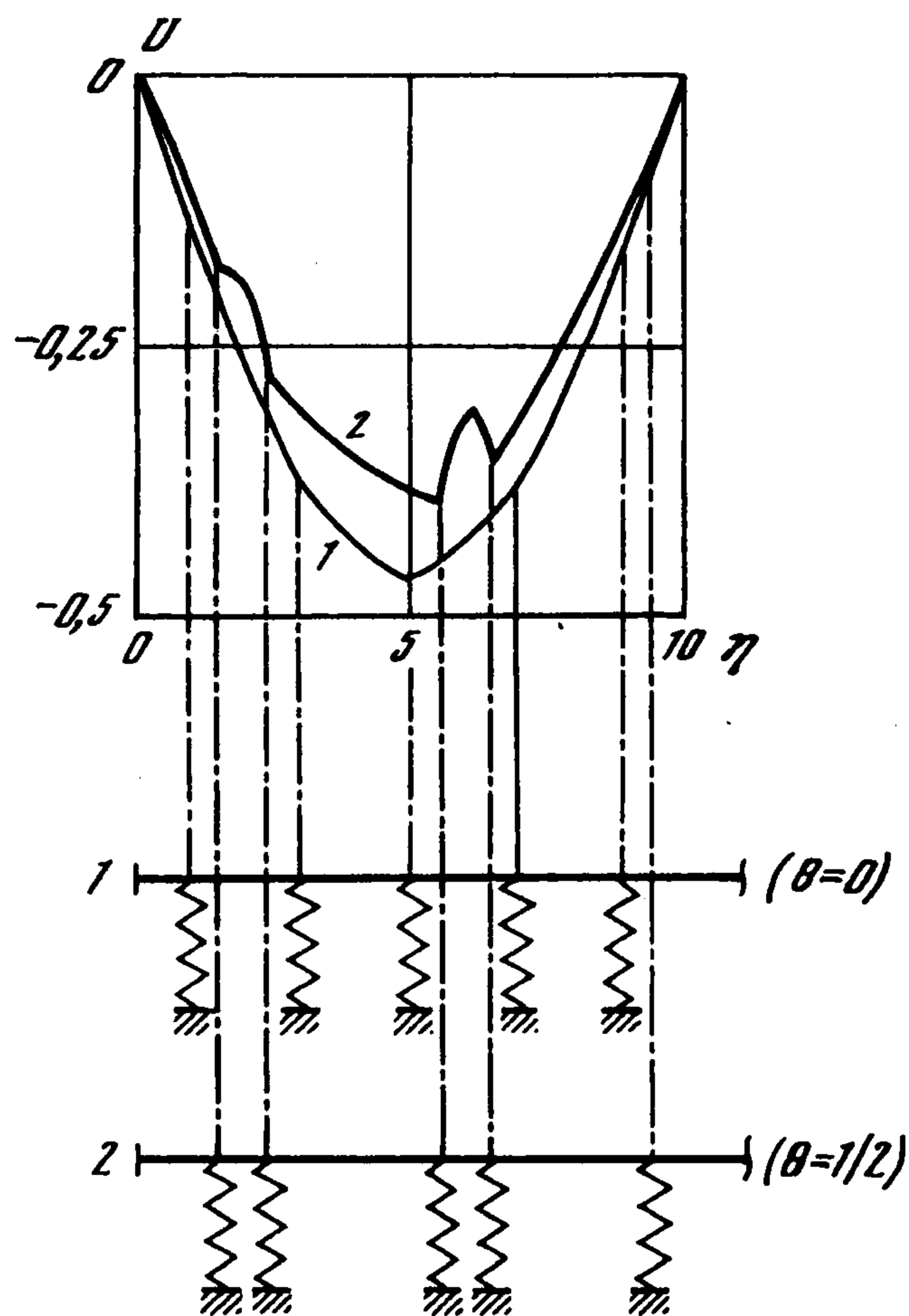
$$x_0'' - p^2 x_0 = \frac{1}{2T} \int_{-1}^1 Q_1 d\tau \quad \left(p^2 = \frac{1}{T} \gamma \Delta(\theta) \right) \quad (4.11)$$

т.е. фактически приводит к осредненному уравнению – уравнению для струны на непрерывном, "размазанном" упругом основании под действием некоторой приведенной нагрузки, из которого определяется "медленная" функция

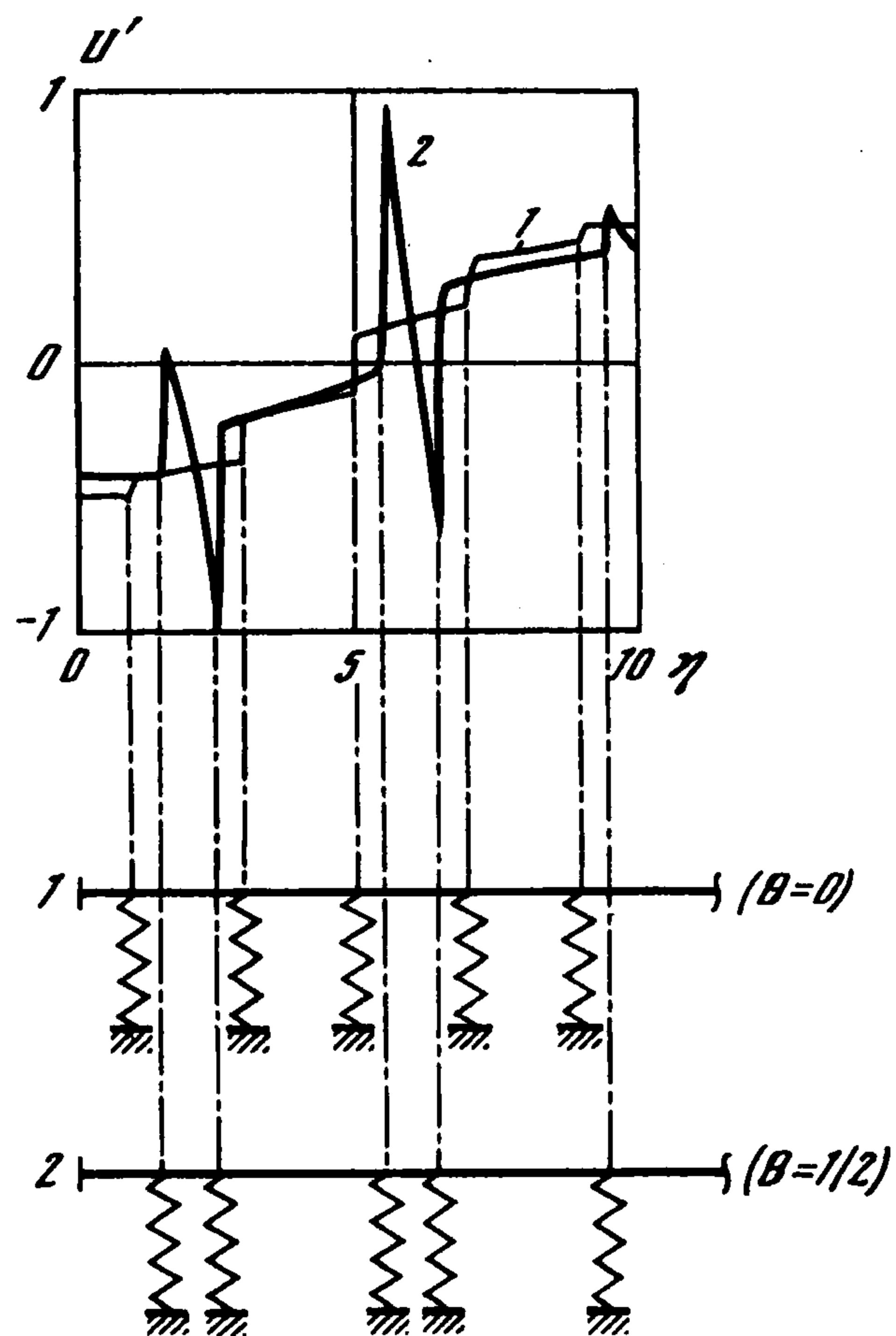
$$x_0 = A_0 e^{p\eta} + B_0 e^{-p\eta} + x_0^*(\eta) \quad (4.12)$$

где A_0, B_0 – постоянные интегрирования, $x_0^*(\eta)$ – частное решение уравнения (4.11).

Оставшаяся неизвестной в выражении (4.8) $C_2 = C_2(\eta)$ представляет собой "медленную" функцию порядка ε^2 и определяется аналогично функции x_0 из осредненного соотношения ε^4 приближения. Определение этой функции на данном этапе несущественно, так как ее вклад и в перемещения, и в напряжения порядка ε^2 , тогда как при дифференцировании функций $x_2(\eta, \tau), y_2(\eta, \tau)$ по "быстрой" переменной



Фиг. 6



Фиг. 7

поправки, вносимые ими в выражения для напряжений, порядка ϵ . Из этих соображений следует необходимость определения еще одного члена в разложении (4.4) – "медленной" функции $x_1(\eta)$ порядка ϵ .

3°. Из системы уравнений

$$\ddot{x}_3 - 2\theta\Delta(\theta)\ddot{y}_3 = \Delta^{-1}(\theta)x_1'' - 2\dot{y}_2' \quad (4.13)$$

$$2\theta\Delta(\theta)\ddot{x}_3 - (1 + 3\theta^2)\Delta^2(\theta)\ddot{y}_3 = 2\dot{x}_2' - 4\theta\Delta(\theta)\dot{y}_2'$$

с граничными условиями вида (4.7) получаем осредненное уравнение для определения функции x_1 :

$$x_1'' - p^2 x_1 = 4\theta x_0'' \quad (4.14)$$

решение которого аналогично (4.12).

Последующие члены в разложениях (4.4) находятся по подобной схеме. Определение их не содержит принципиальных трудностей.

Используя полученные выражения (4.8)–(4.10), (4.12), можно записать решение задачи с точностью до членов порядка ϵ включительно для любой заданной внешней нагрузки q . Если положить, например,

$$q = Q_0 \sin \eta, \quad Q_0 = \text{const}$$

то в первом приближении имеем

$$x_0 = A_0 e^{p\eta} + B_0 e^{-p\eta} + \frac{Q_0}{(1 + p^2)T} \sin \eta, \quad y_0 \equiv 0 \quad (4.15)$$

Так как рассматривается бесконечная струна, постоянные интегрирования A_0, B_0 в выражении (4.15) следует положить равными нулю. Аналогично находятся члены разложения порядков соответственно ϵ и ϵ^2

$$x_1 \equiv 0, \quad y_1 \equiv 0, \quad x_2 = C_2(\eta) - \frac{(1 + 3\theta^2)p^2 Q_0}{2(1 + p^2)T} \tau^2 \sin \eta$$

$$y_2 = \frac{\theta p^2 Q_0}{(1 + p^2) T \Delta(\theta)} (1 - \tau^2) \sin \eta \quad (4.16)$$

В выражение (4.16) для x_2 входит неизвестная "медленная" функция $C_2(\eta)$, которая определяется из осредненного уравнения порядка ϵ^2 в виде

$$C_2(\eta) = - \frac{(1 + 3\theta^2) p^2 (1 + 3p^2) Q_0}{6(1 + p^2)^2 T} \sin \eta$$

На фиг. 6, 7 приведены графики перемещений u (определенных с точностью до членов порядка ϵ^2 включительно) и производных $du/d\eta \equiv u'$ (с точностью до членов порядка ϵ) при разных способах расположения опор: $\theta = 0$ и $\theta = 1/2$. Отношение периода структуры 4ϵ к периоду внешней нагрузки 2π принимали равным $1/5$. Все графики построены на полупериоде внешней нагрузки ($0 \leq \eta \leq \pi$) и могут быть периодически продолжены: нечетным образом для перемещений u ; четным – для производных u' .

Следует отметить, что точность полученных решений в значительной степени зависит от расположения опор, т.е. от значения параметра θ . Наиболее эффективно осреднение при равномерном расположении опор ($\theta = 0$). В случаях предельных значений параметра $\theta \rightarrow \pm 1$ (попарно очень близко расположенные опоры) в формуле (4.15) величина $(1 + p^2)^{-1} \ll 1$, т.е. сравнима с величиной ϵ , что приводит к снижению точности асимптотических разложений (4.4). В таких случаях для достижения требуемой точности решения следует учитывать члены более высокого порядка в разложениях (4.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипчук В.Н. Преобразование колебательных систем при помощи пары негладких периодических функций // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 4. С. 37–40.
2. Журавлев В.Ф. Исследование некоторых виброударных систем методом негладких преобразований // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 24–28.
3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
4. Маслов В.П., Омелянов Г.А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН. 1981. Т. 36. Вып. 3(219). С. 63–126.
5. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
6. Пилипчук В.Н. К расчету периодических процессов в механических системах с импульсным возбуждением // Zeszyty naukowe. Mechanika. Gliwice: Politechnika Slaska, 1992. Z. 107. S. 335–343.
7. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
8. Кузмак Г.Е. Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 515–526.
9. Андрианов И.В., Маневич Л.И. Применение метода осреднения к расчету оболочек // Успехи механики. 1983. Т. 6. Вып. 3/4. С. 3–29.