

УДК 539.3

© 1997 г. С.В. Шмегера

**МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Предлагается метод решения плоских начально-краевых задач (НКЗ) динамической теории упругости (ДТУ), основанный на представлении решений уравнений ДТУ в виде непрерывной суперпозиции произвольных аналитических функций, представляющих собой комплексные плоские волны произвольного вида. Показано, что представление решений в таком виде позволяет использовать преобразование Радона, при помощи которого плоские НКЗ ДТУ сводятся к краевым задачам теории функций комплексного переменного: в простейших случаях – к задачам типа Дирихле или Келдыша–Седова и, в более сложных случаях – к задачам типа Римана–Гильберта или Римана (сопряжения). Метод демонстрируется на примерах решения некоторых основных НКЗ ДТУ для полуплоскости. Впервые в аналитическом виде получено решение основной смешанной задачи ДТУ, когда отсутствует граничное условие сквозное по всему бесконечному интервалу границы полуплоскости.

В данной работе рассматриваются НКЗ ДТУ для полуплоскости или сводящиеся к ним в математическом смысле. Все известные (см., например, [1]) аналитические решения таких задач относятся к случаю, когда хотя бы одно из двух граничных условий является сквозным по всему бесконечному интервалу границы полуплоскости. В этом случае решение может быть найдено при помощи известных методов, например метода Смирнова–Соболева (в случае автомоделных задач) или при помощи интегральных преобразований на основе интегралов Фурье и (или) Лапласа с использованием техники Винера–Хопфа. При более сложных граничных условиях, когда отсутствует граничное условие, сквозное по всему бесконечному интервалу границы полуплоскости (основная смешанная задача по классификации [2]), применение известных методов наталкивается на значительные трудности, преодолеть которые, в рамках этих методов, не представляется возможным.

Предлагается метод, который позволяет находить аналитические решения задач такого типа. Основой метода является представление решений волновых уравнений, к совокупности которых, как известно (см., например, [1, 3]), могут быть приведены уравнения ДТУ, в виде непрерывной (интегральной) суперпозиции произвольных функций с унифицированной комплекснозначной зависимостью от координат и времени. Эти аналитические функции комплексного переменного представляют собой для фиксированного значения некоторого параметра комплексные плоские волны произвольного вида. В этом случае кинематические и динамические характеристики движения однородной и изотропной упругой среды представляются в виде интегралов от двух произвольных аналитических функций, а граничные (на границе полуплоскости) значения таких представлений оказываются связанными с формулами обращения двумерного преобразования Радона. Применение преобразования Радона в этом случае позволяет сводить НКЗ ДТУ к простым системам краевых задач типа Римана–Гильберта для двух функций, решение которых не вызывает затруднений.

Техника метода демонстрируется на примерах построения аналитических решений основных НКЗ ДТУ для полуплоскости: задачи с граничными условиями одного типа, смешанной задачи и основной смешанной задачи. Первые две задачи хорошо изучены известными методами и их решение здесь служит иллюстративным целям, как с точки зрения изложения некоторых деталей применения преобразования Радона, так и с точки

зрения сравнения предложенного метода с известными. Более подробно рассмотрена основная смешанная задача, свойства общего решения которой проиллюстрированы на примере нестационарной задачи о штампе, жестко сцепленном с упругой полуплоскостью.

1. Формализм ДТУ. Представление решений. Пусть однородное изотропное упругое тело с модулем сдвига μ и скоростями распространения продольных и поперечных упругих волн c_1 и c_2 соответственно находится в условиях плоской деформации при отсутствии объемных сил. Тогда выражения для компонент вектора перемещения $w = \{u, v\}$ и отличных от нуля компонент тензора напряжений можно записать в виде

$$\begin{aligned} u &= \varphi_{1,x} + \varphi_{2,y}, \quad v = \varphi_{1,y} - \varphi_{2,x}, \quad \sigma_x = \mu \left[c_2^{-2} \ddot{\varphi}_1 - 2(\varphi_{1,yy} - \varphi_{2,xy}) \right] \\ \sigma_y &= \mu \left[c_2^{-2} \ddot{\varphi}_1 - 2(\varphi_{1,xx} + \varphi_{2,xy}) \right] \\ \tau_{xy} &= \mu \left[c_2^{-2} \ddot{\varphi}_2 - 2(\varphi_{2,xx} - \varphi_{1,xy}) \right] \\ (\dot{}) &\equiv \partial / \partial t, \quad ()_{,p} \equiv \partial / \partial p \quad (p = x, y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Потенциалы φ_j удовлетворяют волновым уравнениям

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,yy} = c_j^{-2} \ddot{\varphi}_j \quad (1.2)$$

(здесь и всюду ниже $j = 1, 2$).

Представим решения уравнений (1.2) в виде интегральной суперпозиции произвольных плоских волн

$$\varphi_j(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_j(z_j(x, y, t, c), c) dc \quad (1.3)$$

Здесь $F_j(z_j)$ – произвольные дважды дифференцируемые или аналитические (если z_j – комплексные) функции, представляющие собой для фиксированных значений переменной c плоские волны произвольного вида; Γ – произвольный контур на комплексной плоскости c ; функции z_j имеют вид

$$z_j = k_j(c)t + m_j(c)x + n_j(c)y \quad (1.4)$$

Подставляя представления (1.3) при учете (1.4) в уравнения (1.2), получаем в силу произвольности $F_j(z_j)$, что необходимым и достаточным условием того, чтобы выражения (1.3) были решениями волновых уравнений (1.2), являются равенства

$$k_j^2 = c_j^2(m_j^2 + n_j^2) \quad (1.5)$$

Из вида выражений (1.4) и (1.5) следует, что произвольные функции $F_j(z_j)$ представляют собой класс функционально-инвариантных решений уравнений (1.2).

Остановимся на одном конкретном случае для выражений (1.4). Полагая в (1.4) $k_j = -c$, $m = 1$, из (1.5) находим $n_j = \pm i(1 - c^2 / c_j^2)^{1/2}$. Для выделения однозначных ветвей радикалов, проведем в комплексной плоскости c разрезы $[-\infty, -c_j]$ и $[c_j, \infty]$ вдоль действительной оси и фиксируем ветви условиями $(1 - c^2 / c_j^2)^{1/2} > 0$ при $c = ia (a > 0)$. Тогда

$$z_j = \xi + i\eta_j; \quad \xi = x - ct, \quad \eta_j = \gamma_j y, \quad \gamma_j = (1 - c^2 / c_j^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

В рассматриваемом случае и при условии, что $c < c_j$, $F_j(z_j)$ будут аналитическими функциями комплексных переменных $z_j = \xi + i\eta_j$.

С физической точки зрения функции $F_j(z_j)$ при $c < c_j$ уже не отвечают плоским волнам. Следуя В.И. Смирнову и С.Л. Соболеву их называют комплексными плоскими волнами.

В этом случае решения уравнений (1.2) при учете (1.6) выберем в виде вещественных частей от представлений (1.3)

$$\varphi_j(x, y, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_j(x - ct + i\gamma_j(c)y, c) dc \quad (1.7)$$

Контур Γ на плоскости c расположен так, что при $\operatorname{Re} c < 0$ он проходит в четвертьплоскости $\operatorname{Re} c < 0$, $\operatorname{Im} c < 0$, а при $\operatorname{Re} c > 0$ – в четвертьплоскости $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Im} c > 0$.

Подставляя (1.7) в (1.1), получаем для компонент перемещения и напряжений следующие представления:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [F_1' + i\gamma_2(c)F_2'] dc, \quad v = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [i\gamma_1(c)F_1' - F_2'] dc \\ \sigma_x &= \mu \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\omega(c)F_1'' + 2i\gamma_2(c)F_2''] dc \\ \sigma_y &= \mu \operatorname{Re} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\gamma(c)F_1'' + 2i\gamma_2(c)F_2''] dc \\ \tau_{xy} &= \mu \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [2i\gamma_1(c)F_1'' - \gamma(c)F_2''] dc \\ \gamma &= 1 + \gamma_2^2, \quad \omega = 1 - \gamma_2^2 + 2\gamma_1^2 \\ F_j &= F_j(z_j(c), c) \quad (F_j' = \partial F_j / \partial z_j, \quad F_j'' = \partial^2 F_j / \partial z_j^2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, построение решений плоских НКЗ ДТУ в принципе может быть сведено к нахождению двух аналитических функций и (или) их производных, т.е. непосредственно к краевым задачам теории функций комплексного переменного, методы решения которых хорошо разработаны [4, 5]. Как будет показано ниже, такое сведение действительно можно осуществить при помощи преобразования Радона.

2. Применение преобразования Радона. Задача с однотипными граничными условиями. Рассмотрим сначала задачу с граничными условиями одного типа, т.е. первую или вторую краевую задачу. Остановимся на более интересной с прикладной точки зрения первой задаче. Вторая краевая задача рассматривается аналогично.

Пусть на границе упругой полуплоскости $y < 0$ заданы нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_y(x, 0, t) = \sigma_0(x, t), \quad \tau_{xy}(x, 0, t) = \tau_0(x, t) \quad (t > 0) \quad (2.1)$$

Начальные условия – нулевые:

$$w = \partial w / \partial t = 0 \quad (t < 0) \quad (2.2)$$

Подставляя представления для напряжений из (1.8) в условиях (2.1), перепишем последние в виде

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\gamma(c)F_1'' + 2i\gamma_2(c)F_2''] dc = -\mu^{-1} \sigma_0(x, t) \quad (2.3)$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [2i\gamma_1(c)F_1''^+ - \gamma(c)F_2''^+]dc = \mu^{-1}\tau_0(x, t)$$

Здесь $F_j''^+ = F_j''^+(\xi(x, t, c), c)$ – граничные, при $z_j = \xi + i0$, значения аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z_j > 0$ функций $F_j''^+(z_j)$.

Используя соотношение $f^-(\xi) = -\overline{f^+(\xi)}$, где черта означает комплексное сопряжение, перепишем, например, первое уравнение системы (2.3) в виде

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \{\gamma(c)[F_1''^+ + F_1''^-] + 2i\gamma_2(c)[F_2''^+ - F_2''^-]\}dc = -\mu^{-1}\sigma_0(x, t) \quad (2.4)$$

где $F_j''^- = F_j''^-(\xi(x, t, c), c)$ – граничные, при $z_j = \xi - i0$, значения аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z_j < 0$ функций $F_j''^-(z_j)$.

При помощи формул Сохоцкого–Племеля [6], из (2.4) получаем

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma(\xi', c)}{\xi' - \xi(x, t, c)} d\xi' dc = \sigma_0(x, t) \quad (2.5)$$

Здесь $\Sigma(\xi)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию Гельдера [5], включая бесконечно удаленную точку.

Выражение (2.5) представляет собой формулу обращения двумерного преобразования Радона (ПР) (см., например, [7, 8]) при условии, что $\Sigma(\xi, c)$ – ПР функции $\sigma_0(x, t)$:

$$\Sigma(\xi, c) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_0(x, t) \delta(x - ct - \xi) dx dt \quad (2.6)$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака. Отсюда следует, что выражения (2.3) или (2.4), содержащие в неявном виде граничные значения интегралов типа Коши, являются аналогами классических формул обращения двумерного ПР.

Из соображений удобства формальное разделение операций в выражениях (2.5) и (2.6) несколько отличается от принятого в литературе [7, 8], где собственно ПР называется интегральная часть формулы (2.6), а операция дифференцирования вносится в формулу обращения (2.5).

Применяя к системе (2.3) ПР в виде (2.6) и учитывая, что преобразование левых частей выражений (2.3) фактически сводится к уничтожению операции интегрирования по переменной c (это следует из (2.5) и формул Сохоцкого–Племеля), получаем

$$\operatorname{Re}[\gamma F_1''^+(\xi) + 2i\gamma_2 F_2''^+(\xi)] = -\mu^{-1}\Sigma(\xi) \quad (2.7)$$

$$\operatorname{Re}[2i\gamma_1 F_1''^+(\xi) - \gamma F_2''^+(\xi)] = \mu^{-1}T(\xi)$$

$T(\xi)$ определяется выражением, аналогичным (2.6), при замене $\sigma_0(x, t)$ на $\tau_0(x, t)$.

Рассматривая уравнения системы (2.7) как независимые задачи типа Дирихле для выражений заключенных в квадратные скобки, находим для $\operatorname{Im} z_j = 0$ при помощи интеграла Шварца [6]

$$F_j''^+(\xi) = \frac{1}{\mu R} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_j(\xi') \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} + \Lambda_j(\xi) \right\} \quad (2.8)$$

$$\Lambda_1(\xi) = -\gamma\Sigma(\xi) + 2i\gamma_2 T(\xi), \quad \Lambda_2(\xi) = -2i\gamma_1 \Sigma(\xi) - \gamma T(\xi)$$

$$R = \gamma^2 - 4\gamma_1\gamma_2$$

Из (2.8) на основании свойств интеграла типа Коши [6], получаем

$$F_j''^+(z_j) = \frac{1}{\mu R \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_j(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z_j} \quad (2.9)$$

Интегрируя выражения (2.9) по переменным z_j , находим

$$F_j'^+(z_j) = \frac{1}{\mu R \pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_j(\xi) \ln|\xi - z_j| d\xi \quad (2.10)$$

Зная функции $F_j'^+(z_j)$ и $F_j''^+(z_j)$, можно найти при помощи представлений (1.8) все необходимые кинематические и динамические характеристики движения упругой среды в полуплоскости.

3. Смешанные граничные условия. Рассмотрим теперь задачу, когда одно из двух граничных условий смешанное: на части оси $y = 0$ задан один тип условия, на оставшейся – другой, при втором условии, сквозном по всей оси $y = 0$. Точка смены типа граничного условия может перемещаться вдоль границы полуплоскости с произвольной переменной скоростью. С точки зрения изложения метода, достаточно рассмотреть задачу со следующими граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0, t) &= \sigma_0(x, t) \quad (x < l(t), t > 0) \\ \tau_{xy}(x, 0, t) &= \tau_0(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ v(x, 0, t) &= v_0(x, t) \quad (x \geq l(t), t > 0) \\ w &= \partial w / \partial t = 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $l(t)$ – произвольная функция времени.

К задаче с условиями (3.1) сводятся многие задачи динамики трещин [9, 10], внедрения и (или) движения гладких штампов [11, 12], дифракции упругих волн [13] и др.

Для обеспечения единственности решения задачи потребуем ограниченности и непрерывности вектора перемещения в окрестности точки смены типа граничного условия, допуская при этом интегрируемую особенность у напряжений и скорости перемещения в этой точке [1]

$$w(x, y, t) = a(t) + O(r^\epsilon), \quad r \rightarrow 0 \quad (r = [(x - l(t))^2 + y^2]^{1/2}) \quad (3.2)$$

Если $dl/dt = 0$, то в (3.2) достаточно положить $\epsilon > 0$. В случае же, когда $dl/dt \neq 0$, необходимо принять более сильное условие: $\epsilon \geq 1/2$, что, как известно [1], соответствует возможности поглощения или излучения энергии в точке смены типа граничного условия.

Подставляя представления для напряжений и перемещений из (1.8) в граничные условия из (3.1), затем применяя к полученным соотношениям (при учете начальных условий из (3.1)) ПР в виде (2.6) и обозначая

$$\begin{Bmatrix} \Sigma(\xi) \\ T(\xi) \\ V(\xi) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \sigma_0(x, t) H(l(t) - x) \\ \tau_0(x, t) \\ \nu_0(x, t) H(x - l(t)) \end{Bmatrix} H(t) \delta(x - ct - \xi) dx dt \quad (3.3)$$

(функции Хевисайда $H(\bullet)$ введены, чтобы подчеркнуть наличие предельных значений для носителей функций $\sigma_0(x, t)$, $\tau_0(x, t)$ и $\nu_0(x, t)$), приходим к системе краевых задач типа Римана–Гильберта для аналитических в полуплоскостях $\text{Im} z_j > 0$ функций $F_j'(z_j)$ и $F_j''(z_j)$

$$\operatorname{Re}[\gamma F_1''(\xi) + 2i\gamma_2 F_2''(\xi)] = \begin{cases} -\mu^{-1}\Sigma(\xi) & (\xi < l_* - ct) \\ 0 & (\xi > l_*) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Re}[2i\gamma_1 F_1''(\xi) - \gamma F_2''(\xi)] = \begin{cases} \mu^{-1}T(\xi) & (\xi < 0) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Re}[i\gamma_1 F_1'(\xi) - F_2'(\xi)] = V(\xi) \quad (l_* - ct < \xi < l_*) \quad (3.6)$$

Здесь $l_* = l(t_*)$, где t_* — корень уравнения $\xi + ct_* - l(t_*) = 0$.

Заметим, что интервалы оси $\operatorname{Im} z_j = 0$, на которых определены условия (3.4)–(3.6), непосредственно следуют из (3.3), если воспользоваться теоремой о свойствах носителя ПР [7, 8].

Условие (3.5) можно рассматривать как задачу типа Дирихле для выражения, заключенного в квадратные скобки, решение которой находится при помощи интеграла Шварца [6] и имеет вид при $\operatorname{Im} z_j = 0$

$$2i\gamma_1 F_1''(\xi) - \gamma F_2''(\xi) = \mu^{-1} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' + T(\xi) \right] = \mu^{-1} \Omega(\xi) \quad (3.7)$$

Дифференцируя равенство (3.6) по переменной ξ и исключая при помощи (3.7) из условий (3.4) и (3.6) (после дифференцирования последнего) поочередно функции $F_1'(\xi)$ и $F_2'(\xi)$, получаем две независимые задачи типа Римана–Гильберта по отдельности для $F_1'(z_1)$ и $F_2'(z_2)$. Используя известную связь между задачами Римана–Гильберта и Римана (сопряжения) [4, 5], эти задачи удобнее переписать в виде задач Римана:

$$F_1''^+(\xi) - \frac{\bar{R}}{R} F_1''^-(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\mu R} [2 \operatorname{Re} i\gamma_2 \Omega(\xi) - \gamma \Sigma(\xi)] & (\xi < l_* - ct) \\ 0 & (\xi > l_*) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$F_1''^+(\xi) + F_1''^-(\xi) = \frac{2}{i\gamma_1(\gamma_2^2 - 1)} [\gamma V'(\xi) - \mu^{-1} \operatorname{Re} \Omega(\xi)] (l_* - ct < \xi < l_*)$$

$$F_2''^+(\xi) + \frac{\bar{R}}{R} F_2''^-(\xi) = \begin{cases} \frac{i\gamma_1}{\mu R} \left[\operatorname{Re} \frac{\gamma}{i\gamma_1} \Omega(\xi) - 2\Sigma(\xi) \right] & (\xi < l_* - ct) \\ 0 & (\xi > l_*) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$F_2''^+(\xi) - F_2''^-(\xi) = \frac{2}{\gamma_2^2 - 1} [2V'(\xi) - \mu^{-1} \Omega(\xi)] (l_* - ct < \xi < l_*)$$

Здесь $V' = dV/d\xi$, функция R определена в (2.8), $\bar{R}$ — комплексно-сопряженная к R функция.

Задачи (3.8) и (3.9) относятся к так называемым [4, 5] задачам типа Римана с разрывными коэффициентами. Решения этих задач в классе функций, обращающихся на бесконечности в нуль, и при условии, что функции $\Sigma(\xi)$, $\Omega(\xi)$ и $V'(\xi)$ удовлетворяют условию Гельдера (исключая точки разрыва коэффициентов), можно выписать, используя известные формулы [4, 5], в виде

$$F_1''(z_1) = \frac{1}{\pi i} G_1(z_1) \left\{ \frac{1}{\mu R} \int_{-\infty}^{l_* - ct} G_1^{-1}(\xi) [2 \operatorname{Re} i\gamma_2 \Omega(\xi) - \gamma \Sigma(\xi)] \frac{d\xi}{\xi - z_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{i\gamma_1(\gamma_2^2 - 1)} \int_{l_* - ct}^{l_*} G_1^{-1}(\xi) [\gamma V'(\xi) - \mu^{-1} \operatorname{Re} \Omega(\xi)] \frac{d\xi}{\xi - z_1} \right\} \quad (3.10)$$

$$F_2''(z_2) = \frac{1}{\pi i} G_2(z_2) \left\{ \frac{i\gamma_1}{\mu R} \int_{-\infty}^{l_*-ct} G_2^{-1}(\xi) \left[\operatorname{Re} \frac{\gamma}{2i\gamma_1} \Omega(\xi) - \Sigma(\xi) \right] \frac{d\xi}{\xi - z_2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_2^2 - 1} \int_{l_*-ct}^{l_*} G_2^{-1}(\xi) [2V'(\xi) - \mu^{-1} \operatorname{Re} \Omega(\xi)] \frac{d\xi}{\xi - z_2} \right\}$$

Здесь

$$G_j(z_j) = \left(\frac{l_* - z_j}{l_* - ct - z_j} \right)^{-\alpha + 1/2}, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\bar{R}}{R}$$

при условии: $0 \leq \arg(\bar{R}/R) < 2\pi$, которое обеспечивает единственность решения задач (3.8) и (3.9), а также, соответствующее условию (3.2) поведение решения исходной задачи (3.1) в точке смены типа граничного условия.

Теперь, зная функции $F_j''(z_j)$, можно получить при помощи (1.8) выражения для напряжений в полуплоскости. Перемещения можно найти по известным напряжениям или при помощи выражений (3.10), интегрируя которые по z_j можно найти $F_j'(z_j)$, а затем воспользоваться представлениями для перемещений из (1.8).

4. Основная смешанная задача. Характерной особенностью основной смешанной задачи является отсутствие граничного условия, сквозного по всей границе полуплоскости. Как уже отмечалось, получить аналитическое решение такой задачи при помощи известных методов не удастся (см., [1], с. 244). Применение метода Смирнова–Соболева в этом случае приводит к сложной системе краевых задач типа Римана–Гильберта с переменными коэффициентами или к эквивалентной ей системе интегральных уравнений, эффективные методы решения которых неизвестны. При применении метода интегральных преобразований Фурье и Лапласа возникает необходимость факторизации матриц функций, провести которую практически не удастся.

В рамках предлагаемого метода решение основной смешанной задачи сводится к сравнительно простой системе задач типа Римана–Гильберта с постоянными коэффициентами, решение которой не вызывает затруднений.

Пусть для упругой полуплоскости $y < 0$ заданы следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0, t) &= \sigma_0(x, t), \quad \tau_{xy}(x, 0, t) = \tau_0(x, t) \quad (x < 0, t > 0) \\ u(x, 0, t) &= u_0(x, t), \quad v(x, 0, t) = v_0(x, t) \quad (x \geq 0, t > 0) \\ w &= \partial w / \partial t = 0 \quad (t < 0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Единственность решения обеспечивается ограничением на поведение вектора перемещения в окрестности точки смены типа граничных условий

$$w(x, y, t) = a(t) + O(r^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (r = (x^2 + y^2)^{1/2}) \quad (4.2)$$

Подставляя представления для перемещений и напряжений из (1.8) в граничные условия из (4.1) и применяя к полученным соотношениям ПР в виде (2.6), получаем систему краевых задач для аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z_j > 0$ функций $F_j'(z_j)$ и $F_j''(z_j)$

$$\operatorname{Re}[\gamma F_1''(\xi) + 2i\gamma_2 F_2''(\xi)] = \begin{cases} -\mu^{-1} \Sigma_0(\xi) & (\xi < -ct) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Re}[2i\gamma_1 F_1''(\xi) - \gamma F_2''(\xi)] = \begin{cases} \mu^{-1} T_0(\xi) & (\xi < -ct) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Re}[F_1'(\xi) + i\gamma_2 F_2'(\xi)] = U_0(\xi) \quad (-ct < \xi < 0) \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Re}[i\gamma_1 F_1'(\xi) - F_2'(\xi)] = V_0(\xi) \quad (-ct < \xi < 0) \quad (4.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \Sigma_0(\xi) \\ T_0(\xi) \\ U_0(\xi) \\ V_0(\xi) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \sigma_0(x, t)H(-x) \\ \tau_0(x, t)H(-x) \\ u_0(x, t)H(x) \\ v_0(x, t)H(x) \end{Bmatrix} H(t)\delta(x - ct - \xi) dx dt$$

Систему краевых задач (4.3)–(4.6), как и в случае предыдущей задачи (разд. 3), можно решить в терминах функций $F_j(z_j)$. Однако здесь лучше воспользоваться другим способом, в результате которого решение этой системы получается в виде выражений, являющихся ПР значений напряжений на границе полуплоскости. Для этого воспользуемся формулами (2.8), в которых функции $\Sigma(\xi)$ и $T(\xi)$, в рассматриваемом случае, будем считать неизвестными на границе полуплоскостей $\operatorname{Im} z_j > 0$ (фактически, они неизвестны на интервале $-ct < \xi < 0$).

Продифференцируем равенства (4.5) и (4.6) по переменной ξ и подставим (4.3)–(4.6) (после дифференцирования) выражения (2.8). Затем, используя формулы Сохоцкого–Племеля [6], введем следующие соотношения:

$$\Sigma(\xi) = P_1^+(\xi) - P_1^-(\xi), \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' = P_1^+(\xi) + P_1^-(\xi) \quad (4.7)$$

$$T(\xi) = P_2^+(\xi) - P_2^-(\xi), \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' = P_2^+(\xi) + P_2^-(\xi) \quad (4.8)$$

где $P_j^+(\xi)$ и $P_j^-(\xi)$ – граничные, при $z_j = \xi \pm i0$, значения некоторых функций $P_j^+(z_j)$ и $P_j^-(z_j)$ – аналитических в полуплоскостях $\operatorname{Im} z_j > 0$ и $\operatorname{Im} z_j < 0$ соответственно. В результате получаем систему краевых задач типа Римана (сопряжения) для функций $P_j^\pm(z_j)$, предельные значения которых на оси $\operatorname{Im} z_j = 0$ связаны соотношениями

$$P_1^+(\xi) - P_1^-(\xi) = \begin{cases} \Sigma_0(\xi) & (\xi < -ct) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases}, \quad P_2^+(\xi) - P_2^-(\xi) = \begin{cases} T_0(\xi) & (\xi < -ct) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\frac{Q}{R} P_1^+(\xi) - \frac{\bar{Q}}{R} P_1^-(\xi) + \frac{N_2}{R} P_2^+(\xi) - \frac{\bar{N}_2}{R} P_2^-(\xi) = \mu U_0'(\xi) \quad (-ct < \xi < 0) \quad (4.10)$$

$$\frac{N_1}{R} P_1^+(\xi) - \frac{\bar{N}_1}{R} P_1^-(\xi) - \frac{Q}{R} P_2^+(\xi) + \frac{\bar{Q}}{R} P_2^-(\xi) = \mu V_0'(\xi) \quad (-ct < \xi < 0) \quad (4.11)$$

$$Q = 2\gamma_1\gamma_2 - \gamma, \quad N_j = i\gamma_j(1 - \gamma_j^2) \quad (4.12)$$

$U_0' = \partial U_0 / \partial \xi$, $V_0' = \partial V_0 / \partial \xi$, функция R определена в (2.8), черта означает комплексное сопряжение.

Умножим равенство (4.11) на некоторую постоянную A и сложим почленно с (4.10):

$$\frac{1}{R} (Q + AN_1)[P_1^+(\xi) + BP_2^+(\xi)] - \frac{1}{\bar{R}} (\bar{Q} + A\bar{N}_1)[P_1^-(\xi) + CP_2^-(\xi)] = \mu[U_0'(\xi) + AV_0'(\xi)] \quad (4.13)$$

$$B = \frac{N_2 - AQ}{Q + AN_1}, \quad C = \frac{\bar{N}_2 - A\bar{Q}}{\bar{Q} + A\bar{N}_1} \quad (4.14)$$

Подберем A таким образом, чтобы $B = C$. Тогда из (4.14) получаем условие для A ,

приводящее к квадратному уравнению, решение которого имеет вид

$$A_n = \frac{1}{2} q_1^{-1} [p + (-1)^{n-1} (p^2 - 4q_1 q_2)^{1/2}] \quad (n = 1, 2) \quad (4.15)$$

$$q_j = N_j \bar{Q} - \bar{N}_j Q, \quad p = N_1 \bar{N}_2 - \bar{N}_1 N_2$$

В случае, когда $\bar{R} \equiv R$, $\bar{Q} \equiv Q$ и $\bar{N}_j \equiv N_j$, равенство $B = C$ имеет место для любых A . В этом случае для A_1 и A_2 , как это видно из (4.13) и (4.14), удобно принять значения

$$A_1 = \frac{N_2}{Q}, \quad A_2 = -\frac{Q}{N_1} \quad (4.16)$$

Подставляя поочередно найденные при помощи (4.15) значения A_1 и A_2 в (4.14), затем подставляя A_1 и A_2 и соответствующие им значения B_1 и B_2 (так как $B = C$) в (4.13), получаем

$$[P_1^+(\xi) + B_n P_2^+(\xi)] - \lambda_n [P_1^-(\xi) + B_n P_2^-(\xi)] = v_n [U_0'(\xi) + A_n V_0'(\xi)] \quad (n = 1, 2; -ct < \xi < 0) \quad (4.17)$$

$$B_n = \frac{N_2 - A_n Q}{Q + A_n N_1}, \quad \lambda_n = \frac{R}{\bar{R}} \frac{\bar{Q} + A_n \bar{N}_1}{Q + A_n N_1}, \quad v_n = \frac{\mu R}{Q + A_n N_1} \quad (4.18)$$

Условия (4.9) перепишем в виде

$$[P_1^+(\xi) + B_n P_2^+(\xi)] - [P_1^-(\xi) + B_n P_2^-(\xi)] = \begin{cases} \Sigma_0(\xi) + B_n T_0(\xi) & (\xi < -ct) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (4.19)$$

Заметим, что такой способ сведения системы краевых задач типа Римана–Гильберта (4.3)–(4.6) к двум (соответственно для $n = 1$ и $n = 2$ в (4.17)–(4.19)) независимым задачам типа Римана заимствован из [14], где он применялся при решении статических контактных задач для анизотропной полуплоскости.

Решения задач (4.17), (4.19) для $z_j = \xi + i0$, обращающиеся на бесконечности в нуль, можно выписать, используя известные формулы [4, 5] для случая разрывных коэффициентов. Рассматривая результат как систему двух (для $n = 1, 2$) алгебраических уравнений относительно функций $P_1^+(\xi)$ и $P_2^+(\xi)$, находим

$$P_j^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{j-1}}{B_2 - B_1} \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} v_n B_{3-n}^{2-j} \left\{ G_n(\xi) \int_{-ct}^0 G_n^{-1}(\xi') \frac{U_0'(\xi') + A_n V_0'(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' + \right. \\ \left. + \pi i [U_0'(\xi) + A_n V_0'(\xi)] + \frac{1}{\mu R} G_n(\xi) \int_{-\infty}^{-ct} G_n^{-1}(\xi') \frac{\Sigma_0(\xi') + B_n T_0(\xi')}{\xi' - \xi} d\xi' + \right. \\ \left. + \frac{\pi i}{\mu R} [\Sigma_0(\xi) + B_n T_0(\xi)] \right\} \quad (4.20)$$

$$G_n(\xi) = \left(\frac{\xi}{\xi + ct} \right)^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = -\frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_n, \quad -2\pi \leq \arg \lambda_n < 0$$

Учитывая принятые в (4.7) и (4.8) обозначения, имеем

$$\Sigma(\xi) = 2 \operatorname{Re} P_1^+(\xi), \quad T(\xi) = 2 \operatorname{Re} P_2^+(\xi) \quad (4.21)$$

Зная функции $\Sigma(\xi)$ и $T(\xi)$, значения которых теперь уже известны на всей границе

полуплоскостей $\text{Im} z_j > 0$, по формулам (2.9) и (2.10) можно найти $F_j'(z_j)$ и $F_j''(z_j)$, а затем при помощи представлений (1.8) получить окончательные выражения для компонент перемещения и напряжений в полуплоскости.

5. Пример: динамическая задача о штампе, жестко сцепленном с упругой полуплоскостью. В качестве примера применения полученных в предыдущем разделе результатов, рассмотрим следующий пример основной смешанной задачи ДТУ. Пусть на полубесконечном интервале $x \geq 0$ границы упругой полуплоскости $y < 0$, в момент времени $t = 0$ приводится в движение штамп, жестко сцепленный с полуплоскостью. Закон движения штампа задается уравнениями $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$. До начала движения штампа полуплоскость покоилась. Таким образом, граничные и начальные условия этой задачи имеют вид (4.1), в которых нужно положить $\sigma_0(x, t) = \tau_0(x, t) = 0$, а ее общее решение дается формулами (1.8), (2.9), (2.10), (4.20) и (4.21) при $\Sigma_0(\xi) = T_0(\xi) = 0$.

Основной интерес в задачах о штампах, как правило, представляют напряжения под штампом, анализ которых позволяет выявить характерные свойства задач такого типа. Вычисление этих напряжений рассматривается ниже.

Функции $\Sigma(\xi)$ и $T(\xi)$ представляют собой ПР значений нормальных и касательных напряжений на границе полуплоскости. Следовательно, напряжения под штампом можно найти непосредственно при помощи $\Sigma(\xi)$ и $T(\xi)$ из (4.21) (т. е. не прибегая к вычислению функций $F_j''(z_j)$), применив к (4.21) обратное ПР (см. (2.5))

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y(x, 0, t) \\ \tau_{xy}(x, 0, t) \end{Bmatrix} = \text{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} P_1^+(x, t, c) \\ P_2^+(x, t, c) \end{Bmatrix} dc \quad (5.1)$$

Подынтегральные выражения в (5.1) при учете (4.20) и обозначений в (1.6) и (4.12), для $x \geq 0$, в комплексной плоскости c имеют точки ветвления $c = \pm c_2, \pm c_1, x/t$ и при $x/t < c_2$ являются аналитическими во всей c -плоскости с разрезами $-\infty < \text{Re} c < -c_j, x/t < \text{Re} c < \infty, \text{Im} c = 0$, за исключением возможных простых полюсов функций $P_j^+(c)$.

Расположение контура Γ указано в разд. 1. Деформируя контур Γ вдоль разреза $[x/t, \infty]$, интегралы в (5.1) можно преобразовать в интегралы по интервалу $(x/t, \infty)$, проходимому дважды. Тогда, подставляя (4.20) при $\Sigma_0 = T_0 = 0$, при учете обозначений из (1.6), в (5.1), имеем

$$\begin{Bmatrix} \sigma_y(x, 0, t) \\ \tau_{xy}(x, 0, t) \end{Bmatrix} = \int_{x/t}^{\infty} \text{Re} \sum_{n=1}^2 \begin{Bmatrix} B_{3-n}(c) \\ -1 \end{Bmatrix} S_n(x, t, c) dc \quad (5.2)$$

$$S_n(x, t, c) = -\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^2} \frac{v_n(c)}{B_2(c) - B_1(c)} \left\{ \left(\frac{x-ct}{x} \right)^{\alpha_n(c)} \times \right. \\ \left. \times \int_{-ct}^0 \left(\frac{\xi'}{\xi' + ct} \right)^{-\alpha_n(c)} \frac{U'_0(\xi', c) + A_n(c)V'_0(\xi', c)}{\xi' - x + ct} d\xi' + \pi i [U'_0(x-ct, c) + A_n(c)V'_0(x-ct, c)] \right\}$$

Рассмотрим характерные подынтервалы $x/t < c_2, c_2 < x/t < c_1$ и $c_1 < x/t < \infty$ интервала интегрирования в (5.2) при $x/t < c_2$.

В случае $x/t > c_1$ из (4.12) имеем при $c > c_1$

$$Q = -2\gamma_1^* \gamma_2^* - \gamma, \quad N_j = -\gamma_j^* (1 - \gamma_j^2)$$

$$R = \gamma^2 + 4\gamma_1^* \gamma_2^* \quad (\gamma_j^* = (c^2 / c_j^2 - 1)^{1/2})$$

и, следовательно, $\bar{R} \equiv R, \bar{Q} \equiv Q, \bar{N}_j \equiv N_j$. Тогда при учете замечания предшествовавшего (4.16), из (4.16), (4.18) и (4.20) получаем: $B_1 = v_1 = 0, B_2 = v_2 = \infty$ и $\alpha_n = 0$. В этом случае выражения (5.2) описывают напряжения под штампом в точках, в которые не дошло возмущение от края $x = 0$. Эти напряжения такие, какими они были бы, если на всей границе полуплоскости были заданы условия $u = u_0(x, t)$ и $v = v_0(x, t)$.

При $c_2 < x/t < \infty$ из (4.12), (4.15), (4.18) и (4.20) имеем для $c_2 < c < c_1$

$$\begin{aligned} Q &= 2i\gamma_1\gamma_2^* - \gamma, \quad N_1 = i\gamma_1(1 - \gamma_2^2), \quad N_2 = -\gamma_2^*(1 - \gamma_2^2) \\ R &= \gamma^2 - 4i\gamma_1\gamma_2^*, \quad A_1 = 2\gamma_2^*/\gamma, \quad A_2 = -\gamma_2^* \\ B_1 &= A_2, \quad B_2 = A_1, \quad \alpha_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\pi} (\arctg \frac{4\gamma_1\gamma_2^*}{\gamma^2} - \arctg \gamma_1\gamma_2^*)$$

В этом случае, выражения (5.2) описывают напряжения под штампом с учетом возмущений в виде цилиндрической продольной и головной поперечной волн идущих от края штампа.

При $x/t < c_2$, из (4.12), (4.15), (4.18) и (4.20) находим для $0 < c < c_2$

$$\begin{aligned} \bar{Q} &\equiv Q = 2\gamma_1\gamma_2 - \gamma, \quad N_j = i\gamma_j(1 - \gamma_2^2), \quad \bar{N}_j = -N_j \\ A_1 &= i\sqrt{\gamma_2/\gamma_1}, \quad A_2 = -A_1, \quad B_1 = A_2, \quad B_2 = A_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\bar{R} \equiv R = \gamma^2 - 4\gamma_1\gamma_2, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{K_+}{K_-}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{K_-}{K_+}, \quad K_{\pm} = 2\gamma_1\gamma_2 - \gamma \pm \sqrt{\gamma_1\gamma_2(1 - \gamma_2^2)}$$

Функция $K_+(c)$ на интервале $0 < c < c_2$ положительна при $0 < c < c_R$, где c_R – решение уравнения Релея ($R(c_R) = 0$), и отрицательна при $c_R < c < c_2$, а функция $K_-(c)$ отрицательна на всем интервале $0 < c < c_2$. Следовательно, на участке $c_R < c < c_2$ интервала $0 < c < c_2$ функции $\alpha_1(c)$ и $\alpha_2(c)$ – чисто мнимые, а на участке $0 < c < c_R$ – комплексные ($\text{Re } \alpha_n(c) = 1/2$). С учетом этого замечания $\alpha_1(c)$ и $\alpha_2(c)$ на интервале $0 < c < c_2$ удобно представить в виде

$$\alpha_1(c) = \frac{1}{2} H(c_R - c) + i\alpha(c), \quad \alpha_2(c) = \bar{\alpha}_1(c) \quad (5.5)$$

$$\alpha(c) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{K_+(c)}{K_-(c)} \right|, \quad H(c_R - c) = \begin{cases} 1 & (c < c_R) \\ 0 & (c > c_R) \end{cases}$$

В пределе при $x \rightarrow 0$ из (5.2) получаем при учете (5.3)–(5.5)

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_y(x, 0, t) \\ \tau_{xy}(x, 0, t) \end{aligned} \right\} = \int_0^{c_1} \text{Re} \sum_{n=1}^2 x^{\beta_n(c)} f_n(x, t, c) \begin{Bmatrix} B_{3-n}(c) \\ -1 \end{Bmatrix} K_n(t, c) dc \quad (x \rightarrow +0) \quad (5.6)$$

$$f_n(x, t, c) = \cos \left[\text{Im}(\alpha_n(c)) \ln \frac{ct}{x} \right] + i \sin \left[\text{Im}(\alpha_n(c)) \ln \frac{ct}{x} \right] \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} K_n(t, c) &= -\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^2} \frac{v_n(c)}{B_2(c) - B_1(c)} (ct)^{-\beta_n(c)} \int_{-ct}^0 (-\xi')^{-\alpha_n(c)} (\xi' + ct)^{\alpha_n(c)-1} \times \\ &\times [U'_0(\xi', c) + A_n(c) V'_0(\xi', c)] d\xi' \\ \beta_n(c) &= -\text{Re} \alpha_n(c) \end{aligned}$$

Из (5.6) при учете (5.5) следует, что в точке $x = 0$, как и в случае соответствующей статической задачи (см., например, [2]), напряжения имеют особенность типа $x^{-1/2}$, на которую накладываются характерные для задач такого типа осцилляции, в результате которых напряжения меняют знак бесконечное число раз при $x \rightarrow 0$. При этом характерный размер области осцилляций, как это видно из (5.7), в отличие от статического случая зависит не только от упругих постоянных (входящих в α_n), но и от времени, т.е. является нестационарной величиной.

6. Некоторые заключительные замечания. В рамках предложенного метода удалось объединить идейные основы двух, восходящих к Фурье и Даламберу независимых подходов к решению динамических задач: метода интегральных преобразований, основанного на представлении решений в виде непрерывной суперпозиции плоских волн экспоненциального вида (интегралы Фурье и Лапласа), и метода Смирнова – Соболева, в котором решение ищется в виде произвольных аналитических функций. Такое объединение, нашедшее свое выражение в представлении решений в виде интегральной суперпозиции произвольных аналитических функций, соответствующих плоским волнам произвольного вида, позволило, в частности, выйти за рамки ограничений, требующих автомодельности задачи (по отношению к методу Смирнова – Соболева), сохранив при этом возможность сведения НКЗ к краевым задачам теории аналитических функций (по отношению к традиционному варианту метода интегральных преобразований).

Представления (1.7) и (1.8) являются в известной степени наиболее общими и, по-видимому, наиболее удобными представлениями кинематических и динамических характеристик движения однородной и изотропной упругой среды в условиях плоской деформации, так как в сочетании с преобразованием Радона позволяют (в принципе) сводить НКЗ ДТУ к существенно более простым краевым задачам теории функций комплексного переменного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Петрашень Г.И.* Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1978. Вып. 18. 248 с.
4. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1958. 543 с.
5. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
7. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.
8. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.
9. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
10. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.
11. *Флитман Л.М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
12. *Флитман Л.М.* О движении под действием сейсмической волны жесткой массивной полосы, лежащей на упругом полупространстве // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1043–1058.
13. *Зволинский Н.В., Флитман Л.М., Костров Б.В., Афанасьев В.А.* Некоторые задачи дифракции упругих волн // Приложения теории функций в механике сплошной среды. М.: Наука, 1965. Т. 1. С. 432–443.
14. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.