

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. В.Г. Попов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ КРАЕВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, СЦЕПЛЕННЫМ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Рассматривается задача о колебаниях жесткого краевого включения, расположенного в упругой полуплоскости, сцепленного с упругой средой и выходящего на поверхность перпендикулярно к ней. Колебания происходят под действием плоской гармонической поверхностной волны Релея, распространяющейся в упругой среде. Для решения поставленной задачи поле перемещений в полуплоскости представляется в виде суперпозиции перемещений, вызванных распространяющейся волной Релея, и двух разрывных решений уравнений Ламе со скачками на границе полуплоскости и линии расположения включения. Неизвестные скачки определяются из граничных условий и условий взаимодействия включения со средой. В результате задача сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью, относительно скачков напряжений на линии включения. Полученная система решается численно методом механических квадратур. Исследованы параметры движения включения и напряженное состояние среды вблизи него.

1. Пусть в упругой полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y > 0$ граница которой свободна от напряжений

$$\sigma_y(x, +0) = \tau_{yx}(x, +0) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1)$$

на отрезке $x = 0$, $0 \leq y \leq h$, расположено тонкое жесткое включение. На линии расположения включения терпят разрыв напряжения, скачки которых обозначим

$$\langle \sigma_x \rangle = \sigma_x(+0, y) - \sigma_x(-0, y) = \chi_1(y) \quad (1.2)$$

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \tau_{xy}(+0, y) - \tau_{xy}(-0, y) = \chi_2(y)$$

Вдоль положительного направления оси x распространяется плоская гармоническая волна Релея [1], вызывающая в среде перемещения

$$u_R(x, y) = C \exp(i\kappa_R x) \left[\exp(-\kappa_2 g_1 y) - \frac{\mu_R g_2}{\xi_R} \exp(-\kappa_2 g_2 y) \right] \quad (1.3)$$

$$v_R(x, y) = iC \exp(i\kappa_R x) \left[\xi_R^{-1} g_1 \exp(-\kappa_2 g_1 y) - \mu_R \exp(-\kappa_2 g_2 y) \right]$$

$$g_1 = \sqrt{\xi_R^2 - \xi^2}, \quad g_2 = \sqrt{\xi_R^2 - 1}, \quad g_3 = 2\xi_R^2 - 1, \quad \xi = c_2 / c_1, \quad \xi_R = c_2 / c_R$$

$$\mu_R = 2\xi_R g_1 / g_3, \quad \kappa_R = \omega / c_R, \quad \kappa_j = \omega / c_j, \quad j = 1, 2$$

где c_1 , c_2 , c_R – скорости продольной, поперечной и поверхностной волн в среде, ω – частота колебаний. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$, в силу линейности, здесь и далее опущен.

Будем полагать, что включение сцеплено с упругой средой. Тогда на линии расположения включения должны выполняться условия

$$u(\pm 0, y) = \delta_1 + \gamma y, \quad v(\pm 0, y) = \delta_2, \quad y \in [0, h] \quad (1.4)$$

где δ_1, δ_2 – горизонтальные и вертикальные перемещения, а γ – угол поворота включения. Величины $\delta_1, \delta_2, \gamma$, могут быть определены из уравнений движения включения

$$m\ddot{x}_c = F_x e^{-i\omega t}, \quad m\ddot{y}_c = F_y e^{-i\omega t}, \quad J_c \ddot{\epsilon} = M e^{-i\omega t} \quad (1.5)$$

В (1.5) x_c, y_c – перемещения центра тяжести включения, ϵ – угловое ускорение, m – масса включения, J_c – момент инерции включения относительно оси, проходящей через центр тяжести, F_x, F_y, M – силы и момент, действующие на включение со стороны среды, которые определяются формулами

$$F_x = \int_0^h \chi_1(y) dy, \quad F_y = \int_0^h \chi_2(y) dy, \quad M = \int_0^h y \chi_1(y) dy \quad (1.6)$$

Перемещения в упругой полуплоскости представим в виде

$$u = u_1 + u_2 + u_R, \quad v = v_1 + v_2 + v_R \quad (1.7)$$

где u_1, v_1 – решения уравнений Ламе со скачками (1.2), а u_2, v_2 – решения уравнений Ламе со следующими скачками на границе полуплоскости:

$$[\sigma_y] = \phi_1(x), \quad [\tau_{yx}] = \phi_2(x), \quad [v] = \phi_3(x), \quad [u] = \phi_4(x) \quad (1.8)$$

$$[f] = f(x, +0) - f(x, -0)$$

Эти решения определяются формулами (2) из [2] и (1.2) из [3].

Скачки $\phi_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$), входящие в v_2, u_2 , могут быть определены из условий (1.1). Но так как этих условий недостаточно для определения всех четырех скачков, то необходимо привлечь еще два дополнительных условия. Эти условия могут быть получены, если потребовать, чтобы

$$u_2(x, -0) = v_2(x, -0) = 0$$

Тогда из определения скачков (1.8) следуют равенства

$$[v_2] = v_2(x, +0) = \phi_3(x), \quad [u_2] = u_2(x, +0) = \phi_4(x) \quad (1.9)$$

Из (1.9), после подстановки u_2 и v_2 из [2, 3] и применения преобразования Фурье по x , а также теоремы о свертке, получим

$$\begin{aligned} \Phi_3(\alpha) &= R(\alpha)^{-1} [\kappa_2^2 \gamma_1(\alpha) \Phi_1(\alpha) + (-i\alpha) B(\alpha) \Phi_2(\alpha)] \\ \Phi_4(\alpha) &= R(\alpha)^{-1} [\kappa_2^2 \gamma_2(\alpha) \Phi_2(\alpha) - (-i\alpha) B(\alpha) \Phi_1(\alpha)] \\ R(\alpha) &= (2\alpha^2 - \kappa_2^2)^2 - 4\alpha^2 \gamma_1(\alpha) \gamma_2(\alpha), \quad B(\alpha) = 2\alpha^2 - \kappa_2^2 - 2\gamma_1(\alpha) \gamma_2(\alpha) \\ \gamma_j(\alpha) &= \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\Phi_k(\alpha)$ – Фурье-преобразования соответствующих скачков.

Формулы (1.10) позволяют получить

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\alpha(\eta - x))}{R(\alpha)} \begin{pmatrix} \gamma_1(\alpha) d_3(y, \alpha) & (-i\alpha) d_1(y, \alpha) \\ (-i\alpha) d_2(y, \alpha) & \gamma_2(\alpha) d_4(y, \alpha) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\eta) \end{bmatrix} d\alpha d\eta \\ d_1(y, \alpha) &= (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_1 y} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_2 y}, \quad d_2(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2) e^{-\gamma_2 y} - 2\gamma_1 \gamma_2 e^{-\gamma_1 y}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$d_3(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2)e^{-\gamma_1 y} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_2 y}, \quad d_4(y, \alpha) = (2\alpha^2 - \kappa_2^2)e^{-\gamma_2 y} - 2\alpha^2 e^{-\gamma_1 y}$$

Подставим (1.7) в граничные условия (1.1). С учетом (1.11) и представлений для u_1, v_1 из [2] придем к следующим равенствам:

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{2\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi_1(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha)e^{-i\alpha x}}{2\gamma_1(\alpha)} d_1(\alpha, \eta) d\alpha d\eta - \frac{1}{4\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi_2(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} d_3(\eta, \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha d\eta \quad (1.12)$$

$$\phi_2(x) = -\frac{1}{4\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi_1(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} d_4(\alpha, \eta) e^{-i\alpha x} d\alpha d\eta - \frac{1}{4\pi\kappa_2^2} \int_0^h \chi_2(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\alpha)e^{-i\alpha x}}{\gamma_2(\alpha)} d_2(\alpha, \eta) d\alpha d\eta$$

При получении (1.12) было использовано, что для (1.11) выполняются условия

$$\sigma_y^2(x, +0) = \phi_1(x), \quad \tau_{yx}^2(x, +0) = \phi_2(x)$$

Из (1.11), (1.12) следует окончательное представление для u_2 и v_2 через скачки $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$

$$v_2(x, y) = \sum_{j=1}^2 \int_0^h \chi_j(\eta) D_{1j}(\eta, y, x) d\eta \quad (1.13)$$

$$u_2(x, y) = \sum_{j=1}^2 \int_0^h \chi_j(\eta) D_{2j}(\eta, y, x) d\eta$$

где

$$D_{kj}(\eta, y, x) = \frac{1}{2\pi\kappa_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{R(\alpha)} F_{kj}(\alpha, \eta, y) d\alpha, \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

а функция $F_{kj}(\alpha, \eta, y)$ выражается через $d_m(\alpha, y)$ и $d_m(\alpha, \eta)$ ($m = 1, 2, 3, 4$).

2. Формулы (1.7), (1.3) дают возможность выразить поле перемещений и напряжений в упругой полуплоскости через неизвестные скачки напряжений на включении. Для их определения воспользуемся условиями (1.4), предварительно применив к ним операцию дифференцирования, с целью исключения неизвестных постоянных δ_1 и δ_2 . После этого (1.4) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\pm 0, y) = \gamma, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\pm 0, y) = 0, \quad y \in [0, h] \quad (2.1)$$

Полученные равенства (2.1) будут эквивалентны (1.4), если добавить дополнительные условия

$$u(\pm 0, 0) = \delta_1, \quad v(\pm 0, 0) = \delta_2 \quad (2.2)$$

Подставим (1.7) в (2.1), (2.2). В результате получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных скачков напряжений на включении

$$\int_0^1 \omega_j(\tau) [s_j(\tau - t) + K_j(\tau, t)] d\tau = p_j(t), \quad t \in [0, 1] \quad (2.3)$$

$$\int_0^1 \omega_j(\tau) [s_{0j}(\tau) + K_j(\tau, 0)] d\tau = \delta_{0j} - p_{0j}, \quad j = 1, 2$$

В (2.3) приняты обозначения

$$\tau = h^{-1}\eta, \quad t = h^{-1}y, \quad \omega_j(\tau) = \mu^{-1}\chi_j(h\tau), \quad \delta_{0j} = h^{-1}\delta_j, \quad j = 1, 2, \quad \kappa_0 = \kappa_2 h$$

Ядра интегральных операторов в (2.3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
s_{0j}(\tau-t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L_j(\beta) \exp(i\beta\kappa_0(\tau-t)) d\beta, \quad L_j(\beta) = \lambda_j^{-1}(\lambda_1\lambda_2 - \beta^2) \\
s_j(\tau-t) &= \frac{\partial}{\partial t} s_{0j}(\tau-t), \quad j=1,2; \quad \lambda_1 = \sqrt{\beta^2 - \xi^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\beta^2 - 1} \\
K_{0j}(\tau, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_j(\beta, \tau, t) d\beta, \quad K_j(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial t} K_{0j}(\tau, t) \\
W_j(\beta, \tau, t) &= R_*(\beta)^{-1} A_j(\beta, \tau, t) \\
A_1(\beta, \tau, t) &= \kappa_2^{-5} F_{12}(\kappa_2\beta, h\tau, ht), \quad A_2(\beta, \tau, t) = \kappa_2^{-5} F_{21}(\kappa_2\beta, h\tau, ht) \\
R_*(\beta) &= \kappa_2^{-4} R(\kappa_2\beta) = (2\beta^2 - 1)^2 - 4\beta^2\lambda_1\lambda_2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Правые части в (2.3) определяются формулами

$$p_1(t) = \gamma + \frac{\partial u_R}{\partial y}(0, ht), \quad p_2(t) = \frac{\partial v_R}{\partial y}(0, ht), \quad p_{01} = h^{-1}u_R(0, 0), \quad p_{02} = h^{-1}v_R(0, 0)$$

Исследуем свойства функций, определенных в (2.4). Рассмотрим сначала функции s_{0j} и s_j . Так как имеет место асимптотическое разложение

$$L_j(\beta) = -\frac{(1+\xi^2)}{2} |\beta|^{-1} + O(\beta^{-3}), \quad \beta \rightarrow \infty$$

то из интегрального представления в (2.4) следует

$$\begin{aligned}
s_{0j}(z) &= -\frac{(1+\xi^2)}{2} \ln|z| + O(z^2 \ln|z|) \\
s_j(z) &= -\frac{1+\xi^2}{2z} + s_{1j}(z), \quad s_{1j}(z) = O(z \ln|z|), \quad z \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь функции $K_j(\tau, t)$. В интеграле (2.4), представляющем эти функции, введем в среду затухание и перейдем к контурному интегрированию в комплексной плоскости $\beta = \sigma + i\zeta$ (см. [1]). Затем выполним предельный переход к среде без затухания. В результате получим

$$K_{0j}(\tau, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2\pi i \frac{A_j(\xi_R, \tau, t)}{R'_*(\xi_R)} - \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{A_j(\beta, \tau, t)}{R_*(\beta)} d\beta \right\}, \quad j=1,2$$

Разрез L_1 проведен из точки $\beta = \xi$ и состоит из отрезка вещественной оси $0 < \sigma < \xi$ и положительной части мнимой полуоси $\zeta > 0$. Разрез L_2 проведен из точки $\beta = 1$, состоит из отрезка вещественной оси $0 < \sigma < 1$ и положительной части мнимой полуоси $\zeta > 0$. Проведение разрезом определяется выбором однозначной ветви функций $\lambda_j(\beta)$ в соответствии с (1.12).

Преобразовав интегралы по разрезам, найдем

$$\begin{aligned}
K_j(\tau, t) &= i \frac{A'_j(\xi_R, \tau, t)}{R'_*(\xi_R)} + K_{1j}(\tau, t) + iK_{2j}(\tau, t) + iK_{3j}(\tau, t) \\
K_{1j}(\tau, t) &= \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{V_1(\zeta, \tau, t)}{R_4(\zeta)} d\zeta, \quad K_{2j}(\tau, t) = -\frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\xi \frac{V_2(\sigma, \tau, t)}{R_3(\sigma)} d\sigma \\
K_{3j}(\tau, t) &= -\frac{\kappa_0}{2\pi} \int_\xi^1 \frac{V_3(\sigma, \tau, t)}{R_0(\sigma)} d\sigma, \quad A'_j(\beta, \tau, t) = \frac{\partial}{\partial t} A_j(\beta, \tau, t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$R_0(\beta) = (\lambda_3^-)^4 + 16\beta^4(\lambda_1^+\lambda_2^-)^2, \quad R_3(\beta) = (\lambda_3^-)^2 - 4\beta^2\lambda_1^-\lambda_2^-$$

$$R_4(\beta) = (\lambda_3^+)^2 - 4\beta^2\lambda_1^+\lambda_2^+, \quad \lambda_3^\pm = 2\beta^2 \pm 1$$

$$\lambda_1^\pm = \sqrt{\xi^2 \pm \beta^2}, \quad \lambda_2^\pm = \sqrt{1 \pm \beta^2}$$

Функции $V_{kj}(\beta, \tau, t)$, ($k = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$) выражаются через значения на берегах разрезов $A_j'(\beta, \tau, t)$.

Можно показать, что в (2.6) первое и последнее слагаемые ограничены при $\tau, t \rightarrow 0$, а $K_{2j}(\tau, t) = O((\tau + t))$.

Исследуем поведение при $\tau, t \rightarrow 0$ функций $K_{1j}(\tau, t)$. Для подынтегральной функции в интеграле (2.6), определяющем $K_{1j}(\tau, t)$, справедливо следующее асимптотическое разложение при $\tau, t \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow \infty$:

$$\frac{V_{1j}(\zeta, \tau, t)}{R_4(\zeta)} = V_{0j}(\zeta, \tau, t) + O(\zeta^{-2})$$

$$V_{0j}(\zeta, \tau, t) = -2\kappa_0 \sum_{k=0}^3 B_k(\tau, t) \zeta^{2-k} \sin(\zeta \kappa_0(\tau + t) + \frac{1}{2}k\pi) \quad (2.7)$$

$$B_{01}(\tau, t) = B_{02}(\tau, t) = \kappa_0^2(1 - \xi^2)\tau t$$

$$B_{11}(\tau, t) = -\frac{1}{2}\kappa_0[(3 - \xi^2)\tau + (1 - \xi^2)t] + O((\tau + t)^2)$$

$$B_{12}(\tau, t) = -\frac{1}{2}\kappa_0[2(1 - \xi^2)\tau + (\xi^4 - 1)(\tau + t)] + O((\tau + t)^2)$$

$$B_{21} = (1 - \xi^2) + O((\tau + t)), \quad B_{22} = \xi^4 + O((\tau + t))$$

$$B_{31} = B_{32} = O((\tau + t))$$

Из (2.7) следует, что интегралы, определяющие $K_{1j}(\tau, t)$, являются расходящимися. Для того чтобы придать им определенный смысл, выполним преобразование

$$K_{1j}(\tau, t) = K_{1j}^0(\tau, t) + K_{1j}^1(\tau, t)$$

$$K_{1j}^0(\tau, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty V_{0j}(\zeta, \tau, t) d\zeta \quad (2.8)$$

$$K_{1j}^1(\tau, t) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{V_{1j}(\zeta, \tau, t)}{R_4(\zeta)} - V_{0j}(\zeta, \tau, t) \right] d\zeta$$

Функции $K_{1j}^0(\tau, t)$ задаются расходящимися интегралами, значения которых могут быть определены при помощи теории обобщенных функций [4]. В результате из (2.7), (2.8) получим

$$2\pi K_{1j}^0(\tau, t) = \frac{(1 - \xi^2)\tau(\tau - t)}{(\tau + t)^3} + \frac{(1 + \xi^4)}{2(1 - \xi^2)(\tau + t)} + O((\tau + t)), \quad j = 1, 2 \quad (2.9)$$

В результате интегральное уравнение (2.3), учитывая (2.5), (2.9), можно представить в виде

$$\int_0^1 \omega_j(\tau) \left[\frac{1}{\tau - 1} + \frac{a}{\tau + t} + b \frac{\tau(\tau - t)}{(\tau + t)^3} + h_j(\tau - t) + B_j(\tau, t) \right] d\tau = f_j(t) \quad (2.10)$$

где

$$f_j(t) = -\frac{\pi}{1+\xi^2} p_j(t), \quad h_j(z) = O(z \ln|z|), \quad z \rightarrow 0$$

$$B_j(\tau, t) = O(1), \quad \tau, t \rightarrow 0, \quad a = -\frac{1+(3-4\nu)^2}{2(3-4\nu)}, \quad b = \frac{2}{3-4\nu}$$

(ν – коэффициент Пуассона).

Уравнение вида (2.10) является сингулярным интегральным уравнением с неподвижной особенностью. Было доказано [5], что оно нетерово в классе $L_1(I)$, $I = [0, 1]$ и его индекс равен единице. При $f_j \equiv 0$ это уравнение имеет только одно линейно-независимое решение, которое имеет вид

$$\omega_j(\tau) = \tau^\alpha + a_j(1-\tau)^{-1/2} + \omega_{0j}(\tau), \quad j = 1, 2 \quad (2.11)$$

где $\omega_{0j}(\tau)$ – ограниченная при $\tau \in [0, 1]$ функция, а $\alpha (-1 < \alpha < 0)$ – корень трансцендентного уравнения

$$\cos \pi\alpha - a + b(1+\alpha)^2 = 0$$

В частности, при $\nu = 0,25$ имеем $\alpha = -0,22525$.

В соответствии с (2.11), приближенное решение (2.3) будем разыскивать в виде

$$\omega_j(\tau) = \tau^\alpha (1-\tau)^{-1/2} \psi_j(\tau) \quad (2.12)$$

Для приближенного определения функций $\psi_j(\tau)$, заменив в (2.3) интегралы соответствующими квадратурными формулами [6, 7], получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n w_k \psi_{jk} [s_j(\tau_k - t_m) + K_j(\tau_k, t_m)] = p_{jm}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.13)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k \psi_{jk} [s_{0j}(\tau_k) + K_{0j}(\tau_k, 0)] = \delta_{0j} - p_{0j}, \quad j = 1, 2$$

Приняты следующие обозначения $\psi_{jk} = \psi_j(\tau_k)$, $p_{jm} = p_j(t_m)$, $\tau_k = (1-x_k)/2$, x_k – корни многочленов Якоби $P_n^{\alpha, -1/2}(x)$, $t_m = (1-z_m)/2$, z_m – нули функции Якоби второго рода

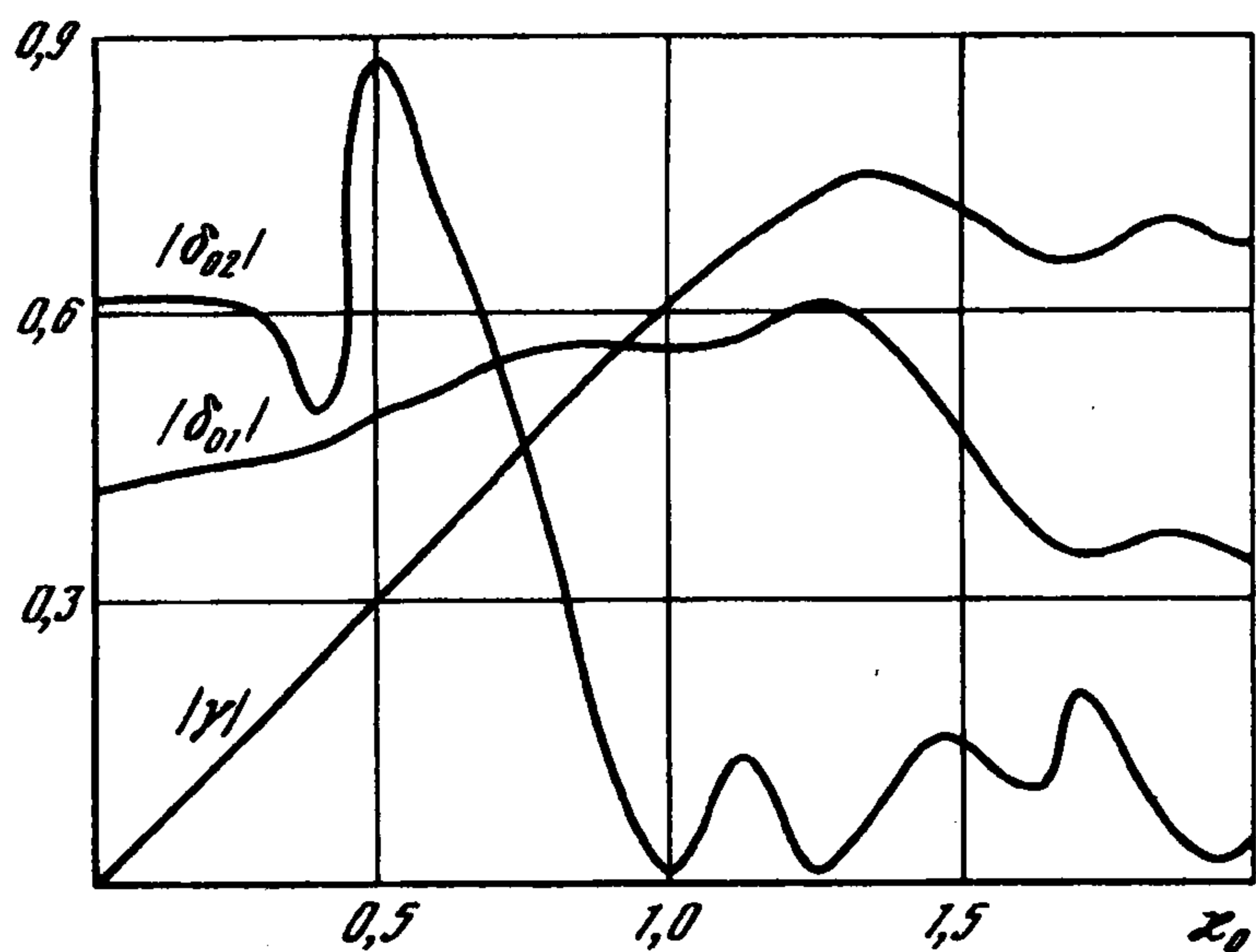
$$G_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^{-1/2}}{x-z} P_n^{\alpha, -1/2}(x) dx$$

$w_k = 2^{\alpha+1/2} A_k$, A_k – коэффициенты квадратурной формулы Гаусса – Якоби [7] с весовой функцией $(1-x)^\alpha (1+x)^{-1/2}$.

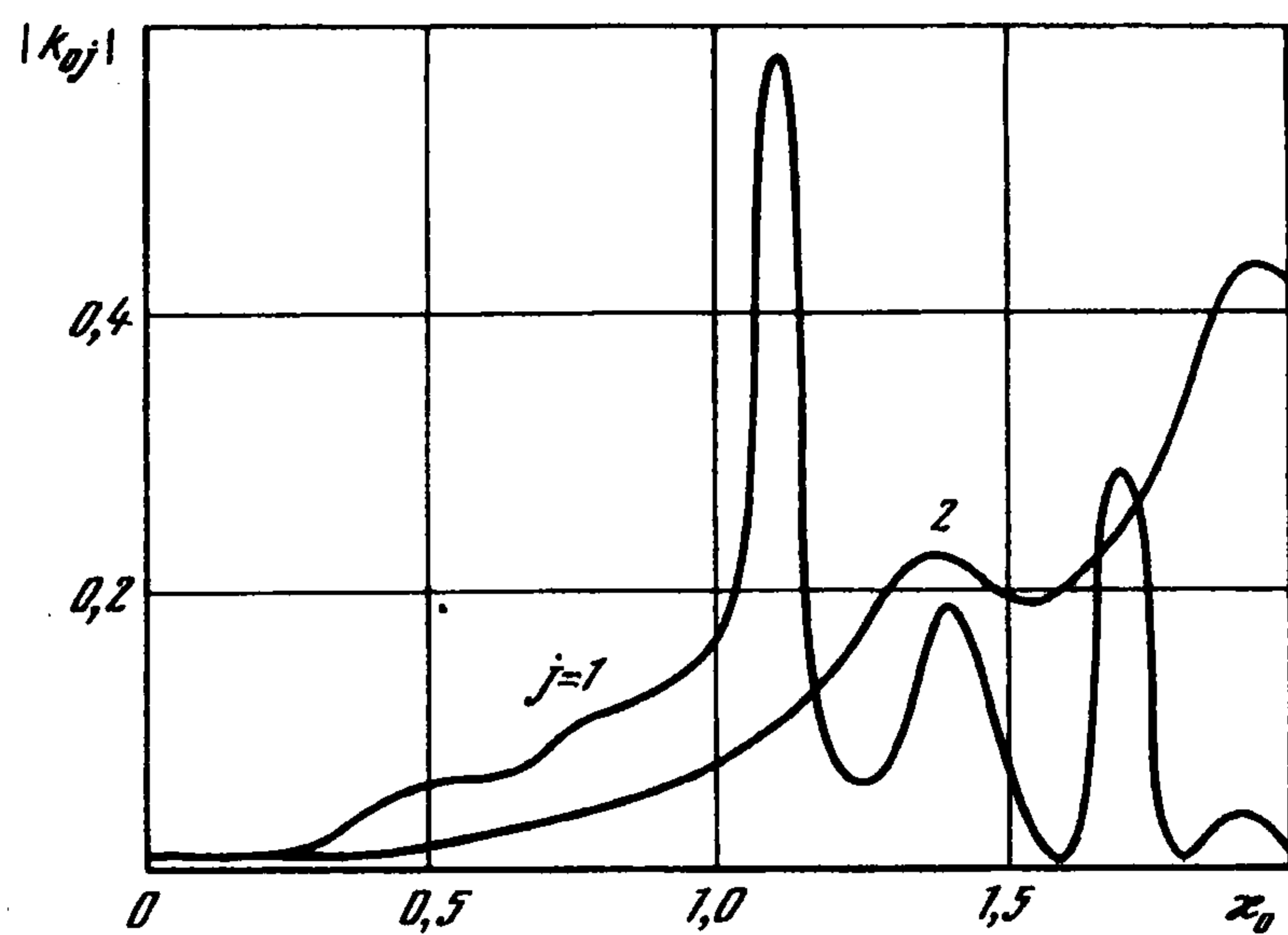
Для определения неизвестных постоянных γ , δ_{0j} ($j = 1, 2$), входящих в (2.3) и описывающих движение включения при взаимодействии с волной, из (1.5), (1.6) после замены интегралов соответствующими квадратурными формулами получим следующие три равенства:

$$\delta_{01} + \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{\kappa_0^2 m_0} \sum_{k=1}^n w_k \psi_{1k}, \quad \gamma = -\frac{12}{\kappa_0^2 m_0} \sum_{k=1}^n w_k \tau_k \psi_{1k} \quad (2.14)$$

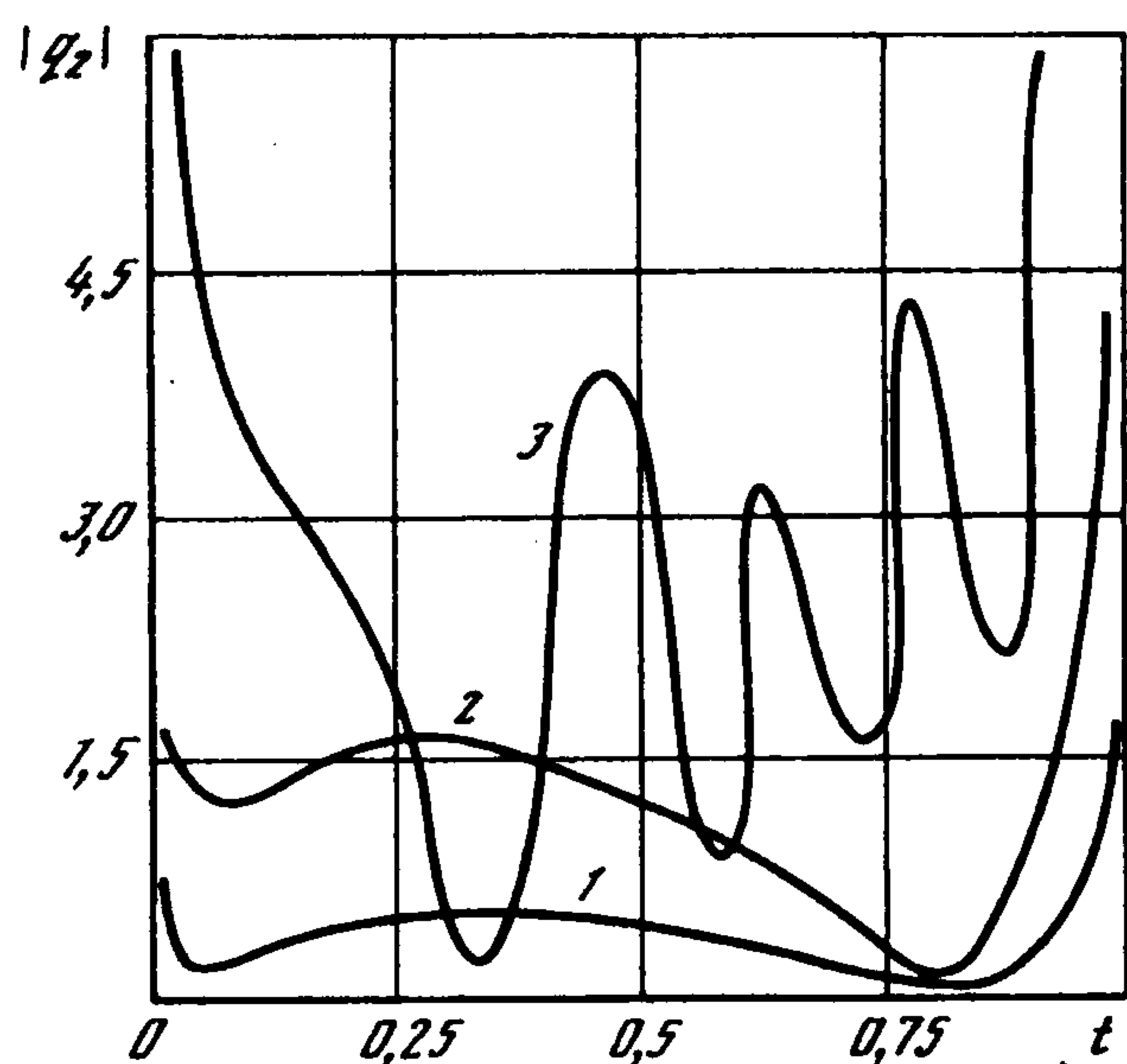
$$\delta_{02} = -\frac{1}{\kappa_0^2 m_0} \sum_{k=1}^n w_k \psi_{2k}, \quad m_0 = \frac{m}{\rho h^2}$$



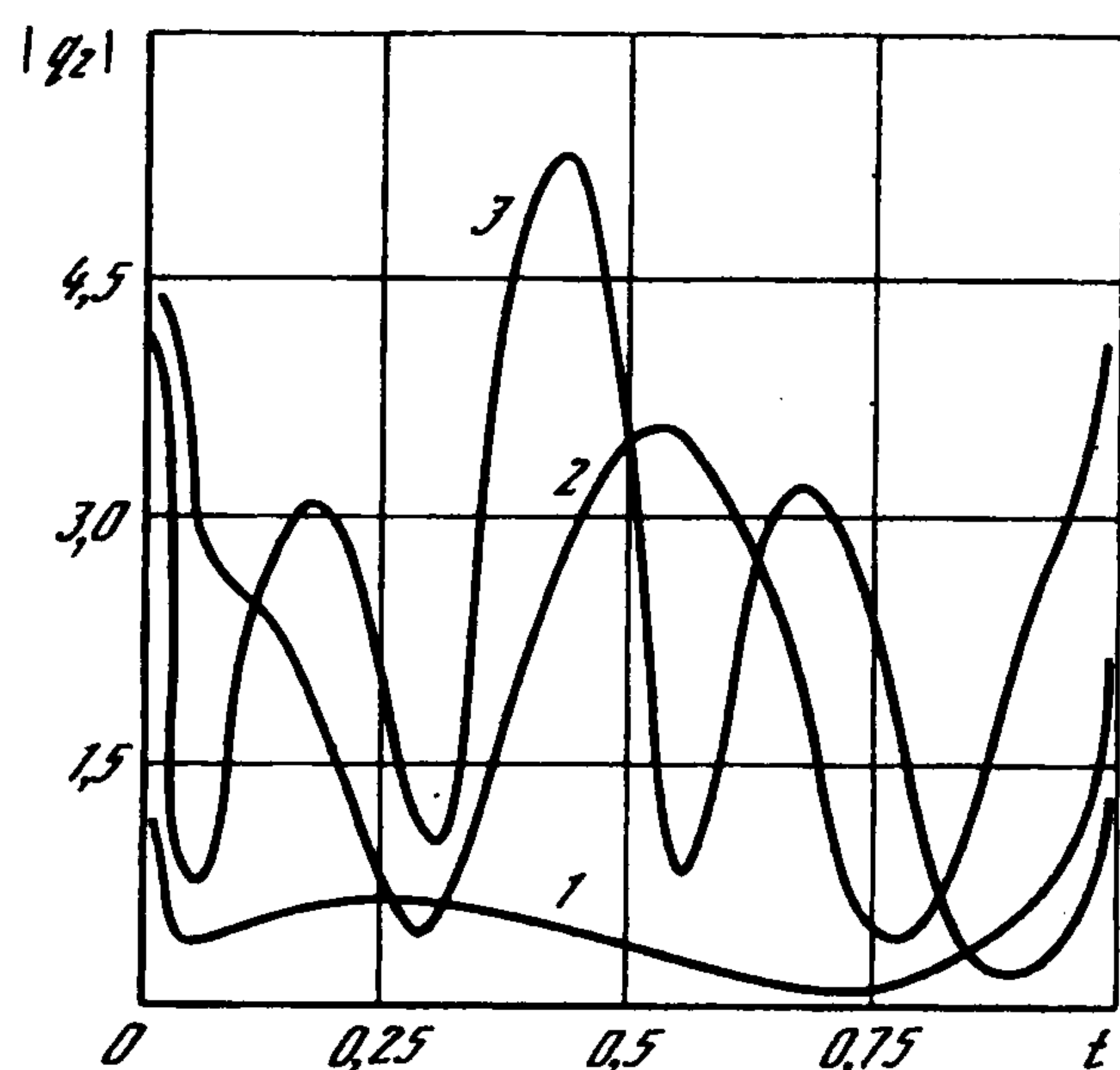
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

После решения системы (2.13) совместно с (2.14) функции $\psi_j(t)$ могут быть приближены интерполяционными многочленами

$$\psi_j(\tau) = Q_{nj}(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \psi_{jk} \frac{P_n^{\alpha, -1/2}(1-2\tau)}{(\tau - \tau_k) [P_n^{\alpha, -1/2}(1-2\tau_k)]'} \quad (2.15)$$

При помощи (2.15) могут быть определены контактные напряжения в области контакта включения со средой

$$\mu^{-1} \sigma_x(\pm 0, ht) = \pm \frac{\omega_1(t)}{2} = \pm q_1(t), \quad \mu^{-1} \tau_{xy}(\pm 0, ht) = \pm \frac{\omega_2(t)}{2} = \pm q_2(t)$$

В соответствии с (2.12), (2.15) получаем

$$q_j(t) = \frac{1}{2} t^\alpha (1-t)^{-1/2} Q_{nj}(t), \quad j=1,2 \quad (2.16)$$

Напряженное состояние среды вблизи заглубленного конца включения характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений [8, 9]

$$K_1 = \lim_{y \rightarrow h+0} \left(\frac{y}{h} - 1 \right)^{1/2} \sigma_y(0, y), \quad K_2 = \lim_{y \rightarrow h+0} \left(\frac{y}{h} - 1 \right)^{1/2} \tau_{xy}(0, y)$$

После выполнения предельного перехода находим

$$K_j = \mu k_{0j}, \quad j = 1, 2, \quad k_{01} = \frac{1}{2} Q_{2n}(1), \quad k_{02} = \frac{\xi^2}{2} Q_{1n}(1) \quad (2.17)$$

$Q_{jn}(1)$ вычисляются по (2.15).

При помощи полученного приближенного решения были проведены вычисления для следующих данных: $\nu = 0,25$, $m_0 = 1$, $c_0 = c/h = 1$. Для получения системы (2.13) в применяемых квадратурных формулах использовалось до 25 узлов, что достаточно для получения результатов с относительной погрешностью менее 1%. Результаты численного исследования приведены на фиг. 1–4.

На фиг. 1 показана зависимость от параметра κ_0 величин $|\delta_{01}|$, $|\delta_{02}|$, $|\gamma|$, описывающих движение включения в упругой среде. Видно, что амплитуда горизонтальных колебаний $|\delta_{01}|$ с ростом сначала монотонно возрастает, а после достижения максимального значения при $\kappa_0 \approx 1,3$ начинает убывать, имея ряд точек минимума и максимума. Аналогично ведет себя и величина $|\gamma|$. Амплитуда вертикальных колебаний $|\delta_{02}|$ ведет себя иначе. Вначале она медленно убывает, а затем при $\kappa_0 \approx 0,5$ имеет резкий максимум. После этого зависимость принимает сложный характер с наличием ряда максимумов и минимумов.

На фиг. 2 показаны зависимости абсолютных величин коэффициентов интенсивности напряжений $|k_{01}|$, $|k_{02}|$, определенных формулами (2.17), от κ_0 . Для них также характерно наличие максимумов при некоторых значениях частоты.

Фиг. 3, 4 показывают распределение абсолютных значений контактных напряжений $|q_1(t)|$ и $|q_2(t)|$ вдоль включения. Кривые 1–3 соответствуют значениям $\kappa_0 = 0,5, 1, 2$. Видно, что распределение контактных напряжений существенно зависит от частоты колебаний распространяющейся волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Е., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах: Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
2. Попов В.Г. Применение разрывных решений в плоской динамической задаче теории упругости для слоисто-однородных тел // Гидроаэромеханика и теория упругости: Днепропетровск: ДГУ, 1991. С. 97–101.
3. Попов В.Г. Динамическая задача теории упругости для плоскости, содержащей жесткое крестообразное включение // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 110–115.
4. Кеч В., Теодореску В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
5. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения типа свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // АН СССР. Труды Тбил. мат. ин-та. 1979. Т. 60. 136 с.
6. Лобода В.В. О методах решения сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями // Методы решения граничных задач и обработки данных. Днепропетровск: ДГУ, 1989. С. 35–42.
7. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
8. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520–529.
9. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле: Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.