

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Е.В. Глушков, Ю.Г. Никитин

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМЕ СОСТЫКОВАННЫХ УПРУГИХ ПОЛУПОЛОС РАЗНОЙ ТОЛЩИНЫ

В соответствии с предложенным ранее способом учета особенности решения в угловых точках составного упругого волновода, использующем свойство обобщенной ортогональности нормальных мод, анализируется частотная зависимость коэффициентов отражения и прохождения энергии через вертикальную границу стыка полуполос и структура энергетических потоков в ее окрестности в так называемом диапазоне захвата энергии. Показано появление здесь энергетических вихрей, частично перекрывающих энергетический поток, что и приводит к увеличению коэффициента отражения энергии.

Развитие методов решения задачи о прохождении энергии упругих волн через границу раздела составного волновода проходило в направлении перехода от метода коллокаций [1] к более точным методам на основе использования соотношений обобщенной ортогональности однородных решений [2], что было реализовано в [3, 4] и обобщено для волноводов со ступенчатым стыком и вертикальными дефектами [5]. Однако решение задачи о вертикальной границе раздела в волноводе осложняется тем, что при определенных сочетаниях свойств материалов либо при наличии дефектов на стыке возникают особенности напряжений в угловых точках смены типа граничных условий, а ряды, представляющие напряжения, расходятся в конечных интервалах на границе раздела ([6–9] и др.).

В случае упругой полуполосы были развиты различные способы преодоления этих трудностей: от использования обобщенных сумм расходящихся рядов [9] до выделения особенности в явном виде [8, 10] или учета асимптотики неизвестных разложения, диктуемой показателем особенности [11]. Обобщение методов выделения особенности на случай составных волноводов, существенным образом использующее свойство обобщенной ортогональности нормальных мод, было предложено в [12]. В настоящей работе на основе данного подхода проводится анализ прохождения и отражения осредненной за период колебаний энергии в составном ступенчатом волноводе со свободной поверхностью. Рассматривается как частотная зависимость коэффициентов прохождения и отражения, так и структура энергетических потоков вблизи линии стыка.

1. Рассматриваются установившиеся колебания свободного составного упругого волновода, состоящего из двух состыкованных полуполос $-\infty < x \leq 0$, $0 \leq z \leq h_1$ (первая среда) и $0 \leq x < \infty$, $0 \leq z \leq h_2$ (вторая среда) с разными свойствами: плотностью ρ_j , коэффициентами Ламе λ_j , μ_j и коэффициентом Пуассона ν_j , где $j = 1, 2$ – номер среды. Для определенности $h_1 > h_2$. Источником колебаний являются набегающие волны $u_0 e^{-i\omega t}$, приходящие либо от нагрузки $q(x) e^{-i\omega t}$, приложенной к поверхности $z = h_1$ левой полуполосы в области Ω , либо из бесконечности. Множитель $e^{-i\omega t}$ ниже всюду опущен.

Внешняя поверхность волновода свободна от напряжений:

$$T_{n,j} = 0, \quad z = 0; \quad T_{n,j} = q(x), \quad z = h_j, \quad q(x) = 0, \quad x \notin \Omega$$

$$\sigma_{x,1}(0, z) = \tau_{xz,1}(0, z) = 0, \quad h_2 \leq z \leq h_1$$

$T_{n,j} = (\tau_{zx,j}, \sigma_{z,j})$ – вектор напряжений на горизонтальной поверхности.

Кроме того, на линии соединения полуполос выполняются условия

$$\mathbf{u}_1(0, z) = \mathbf{u}_2(0, z), \quad 0 \leq z \leq h_2$$

$$\sigma_{x,1}(0, z) = \sigma_{x,2}(0, z), \quad \tau_{xz,1}(0, z) = \tau_{xz,2}(0, z), \quad 0 \leq z \leq h_2$$

Обозначим через $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_0$ перемещения в первой среде, а через $\mathbf{u}_2$ – во второй; $\mathbf{u}_0$ – поле перемещений падающей волны, $\mathbf{u}_1$ – отраженное поле.

Для полей перемещений имеем разложения по нормальным волнам (всюду далее суммирование ведется от 1 до ∞):

$$\mathbf{u}_1(x, z) = \sum_m t_{1m} \mathbf{a}_{1m}(z) e^{-i\alpha_{1m}x}, \quad \mathbf{u}_2(x, z) = \sum_m t_{2m} \mathbf{a}_{2m}(z) e^{-i\alpha_{2m}x} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{a}_{jm}(z) = \frac{1}{\Delta'_j(\alpha_{jm})} \begin{vmatrix} (-1)^{j+1} \alpha_{jm} P_{jm}(z) \\ iR_{jm}(z) \end{vmatrix}$$

Собственные векторы $\mathbf{a}_{jm}$ выражаются через компоненты символа матрицы Грина свободного упругого слоя $\alpha P_j(\alpha, z) / \Delta(\alpha)$, $R_j(\alpha, z) / \Delta(\alpha)$ (используются обозначения из [13]), $P_{jm}(z) = P_j(\alpha_{jm}, z)$, $R_{jm}(z) = R_j(\alpha_{jm}, z)$; штрихом обозначены производные по z . Волновые числа α_{jm} совпадают с полюсами элементов матрицы Грина (с нулями ее знаменателя); t_{jm} – неизвестные коэффициенты разложения.

Ряды (1.1) содержат как симметричные, так и антисимметричные моды: волна для $m = 1$ симметричная, волны для $m = 2$ и 3 антисимметричные, для $m = 4, 5$ симметричные и т.д.

В аналогичных представлениях для вектора напряжений $\tau_j(x, z) = (\sigma_{x,j}, \tau_{xz,j})$ векторы $\mathbf{a}_{jm}(z)$ заменяются на

$$\mathbf{b}_{jm}(z) = \frac{1}{\Delta'_j(\alpha_{jm})} \begin{vmatrix} -i(\lambda_j + 2\mu_j) \alpha_{jm}^2 P_{jm}(z) + i\lambda_j R'_{jm}(z) \\ (-1)^{j+1} \mu_j \alpha_{jm} (P'_{jm}(z) + R_{jm}(z)) \end{vmatrix}$$

Для случая приходящей из бесконечности волны

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{a}_{0m}(z) e^{i\alpha_{1m}x}, \quad \tau_0 = \mathbf{b}_{0m}(z) e^{i\alpha_{1m}x} \quad (1.2)$$

где $m = 1, 2, \dots$ – номер падающей волны, $\mathbf{a}_{0m}$ отличается от $\mathbf{a}_{1m}$ знаком первой компоненты, $\mathbf{b}_{0m}$ от $\mathbf{b}_{1m}$ – знаком второй компоненты.

Рассмотрим вспомогательную задачу для изолированных полуполос равной толщины в предположении, что на их торцах заданы перемещения v_j и напряжения t_j ($j = 1, 2$), в первой среде распространяется волна $\mathbf{u}_0$. Эта задача является переопределенной.

Будем считать, что v_j и t_j принадлежат $L_2([0, h])$. Тогда метод [2] дает точные решения вспомогательной задачи. При наличии особенности у напряжения в угловых точках $x = 0, z = 0$ и $z = h$ ряды для $\tau_j(x, z)$ расходятся в окрестностях этих точек. Однако при исследовании распространения энергии это не имеет значения, достаточно, чтобы граничные условия выполнялись в среднеквадратичном смысле.

Для получения решения [2] необходимо умножить граничное условие для первой компоненты перемещений на $b_{jk}^{(1)}$ (т.е. на первую компоненту вектора $\mathbf{b}_{jk}$) и вычесть условие для второй компоненты напряжений, умноженное на $a_{jk}^{(2)}$. Оставшиеся условия преобразуются аналогичным образом.

Использование условий обобщенной ортогональности [2]

$$\int_0^h [a_{jm}^{(1)} b_{jk}^{(1)} - a_{jk}^{(2)} b_{jm}^{(2)}] dz = 0, \quad k \neq m$$

дает

$$t_{jm} = \frac{(-1)^p}{d_{jm}} [(v_j^{(l)}, b_{jm}^{(l)}) - (t_j^{(p)}, a_{jm}^{(p)}) - \delta_{j1} ((u_0^{(l)}, b_{1m}^{(l)}) - (\tau_0^{(p)}, a_{1m}^{(p)}))] \quad (1.3)$$

$$d_{jm} = (a_{jm}^{(1)}, b_{jm}^{(1)}) - (a_{jm}^{(2)}, b_{jm}^{(2)}), \quad (f, g) = \int_0^h fg dz, \quad l = 1, 2, \quad p = \begin{cases} 1, & l = 2, \\ 2, & l = 1. \end{cases}$$

Итак, для решения вспомогательной задачи необходимы лишь два граничных условия; приравнявая правые части равенств (1.3) для различных l , получаем "условия совместности", которым должны удовлетворять граничные условия, чтобы вспомогательная задача была разрешимой

$$(v_j, b_{jm}) - (\tau_j, a_{jm}) = \delta_{j1} [(u_0, b_{1m}) - (\tau_0, a_{1m})] \quad (1.4)$$

$$(f, g) = (f^{(1)}, g^{(1)}) + (f^{(2)}, g^{(2)})$$

Подстановка в (1.4) граничных условий исходной задачи $v_1 = v_2$, $t_1 = t_2$ в случае полуполос равной толщины ($h_1 = h_2 = h$) дает две независимые бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных t_{jm}

$$\left(\sum_m a_{lm} t_{lm}, b_{jn} \right) - \left(\sum_m b_{lm} t_{lm}, a_{jn} \right) = (-1)^l [(u_0, b_{jn}) - (\tau_0, a_{jn})] \quad (1.5)$$

$$j = 1, 2, \quad l = \begin{cases} 1, & j = 2, \\ 2, & j = 1, \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что достаточно решить лишь одну из систем (1.5) для $j = 1$, $l = 2$ или для $j = 2$, $l = 1$. Оставшиеся неизвестные в таком случае можно восстановить по формулам (1.3), т.е. система распадается на две независимые, что существенно уменьшает объем вычислений. В общем случае, при $h_1 \neq h_2$ уравнения (1.5), внешне усложняясь незначительно, перестают быть независимыми для разных j , т.е. здесь имеется одна система вдвое большей размерности.

Для учета особенностей напряжений можно выделить множители с особенностями в явном виде в неизвестных напряжениях $t_1 = t_2 = t$ и разложить затем напряжения в ряд по полиномам Якоби:

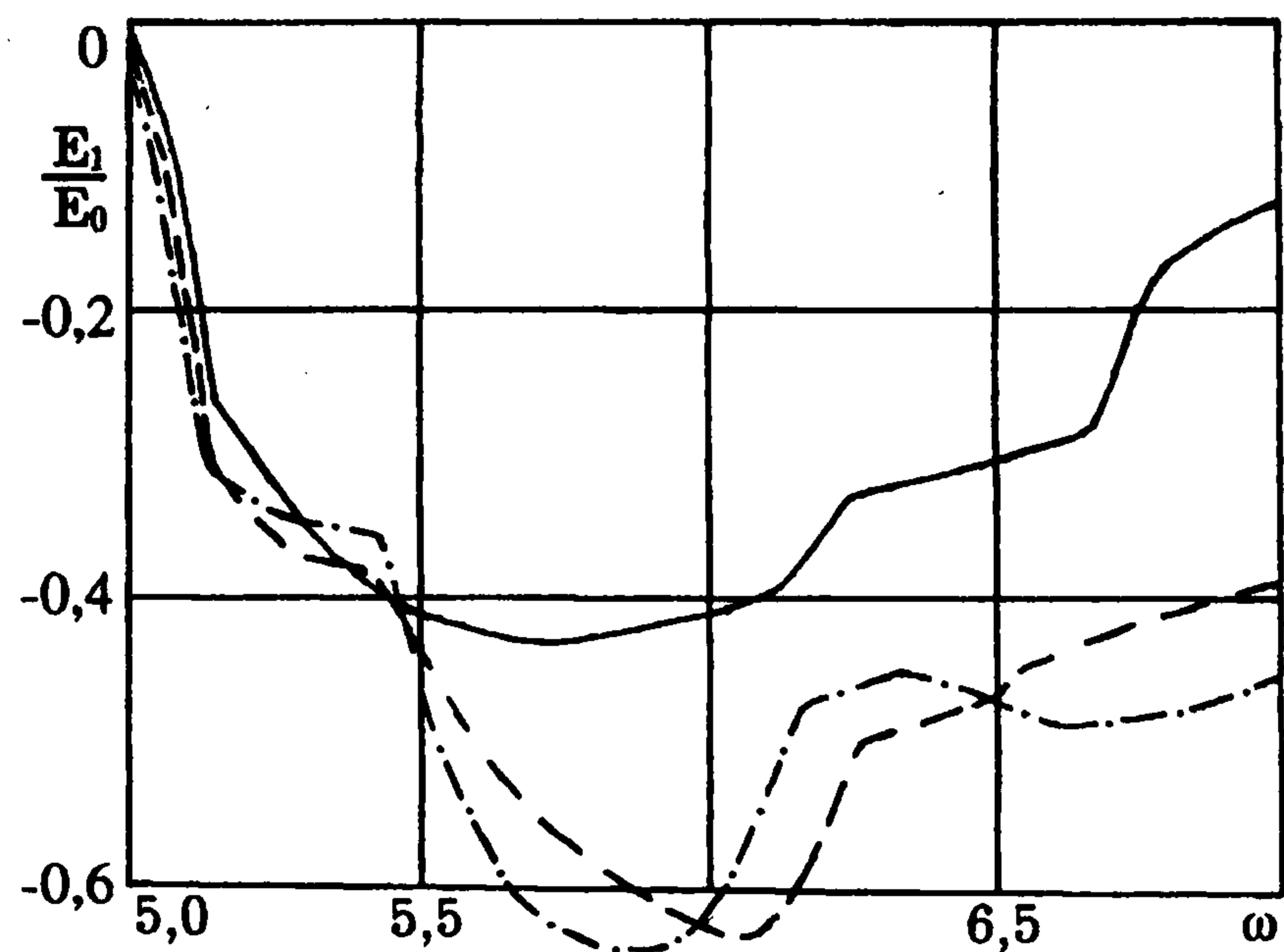
$$t^{(l)} = \sum_n P_n^{(l)} \chi_n^{(l)}, \quad 0 \leq z \leq h_2 \quad (1.6)$$

$$t = 0, \quad h_2 \leq z \leq h_1$$

$$P_n^{(l)}(\zeta) = (1 - \zeta)^{\gamma_1} (1 + \zeta)^{\gamma_2} P_{i(n,l)}^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\zeta), \quad \zeta = -2z/h_2 + 1, \quad 0 \leq z \leq h_2$$

где $\chi_n^{(l)}$ — неизвестные постоянные, $P_n^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\zeta)$ — полиномы Якоби; порядок полиномов $i = i(n, l)$ выбирается так, чтобы четность или нечетность каждого члена в разложении (1.6) была такой же, как в разложении по нормальным волнам $h_{jn}^{(l)}$; γ_1, γ_2 — показатели особенностей напряжений¹, найденные ранее [14]. Большое значение имеет также то, что t доопределяется нулем на свободной поверхности уступа.

¹ Глушков Е.В., Глушкова Н.В. Об особенности решения в угловых точках составных упругих волноводов. М., 1991. Деп. в ВИНТИ 19.02.91, № 824-B91.



Фиг. 1

Подстановка этих разложений в (1.3) и в неиспользованные еще граничные условия $v_1 = v_2$ (при $h_1 \neq h_2$) дает бесконечную систему из четырех наборов линейных алгебраических уравнений относительно четырех наборов неизвестных $t_{jm}, \chi_m^{(l)}$ ($j, l = 1, 2$)

$$t_{jm} = \frac{(-1)^p}{d_{jm}} \left[\left(\sum_n a_n^{(l)} t_{rn}, b_{jm}^{(l)} \right)_J + \delta_{j1} \left(\sum_n a_{jn}^{(l)} t_{jn}, b_{jm}^{(l)} \right)_T - \right. \\ \left. - \left(\sum_n P_n^{(p)} \chi_n^{(p)}, a_{jm}^{(p)} \right)_J - (-1)^r (u_0^{(l)}, b_{jm}^{(l)})_J + \delta_{j1} (\tau_0^{(p)}, a_{jm}^{(p)}) \right], \quad j, l = 1, 2,$$

$$p = \begin{cases} 1, & l = 2, \\ 2, & l = 1, \end{cases} \quad r = \begin{cases} 1, & j = 2, \\ 2, & j = 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(f, g)_J = \int_0^{h_2} f g dz, \quad (f, g)_T = \int_{h_2}^{h_1} f g dz.$$

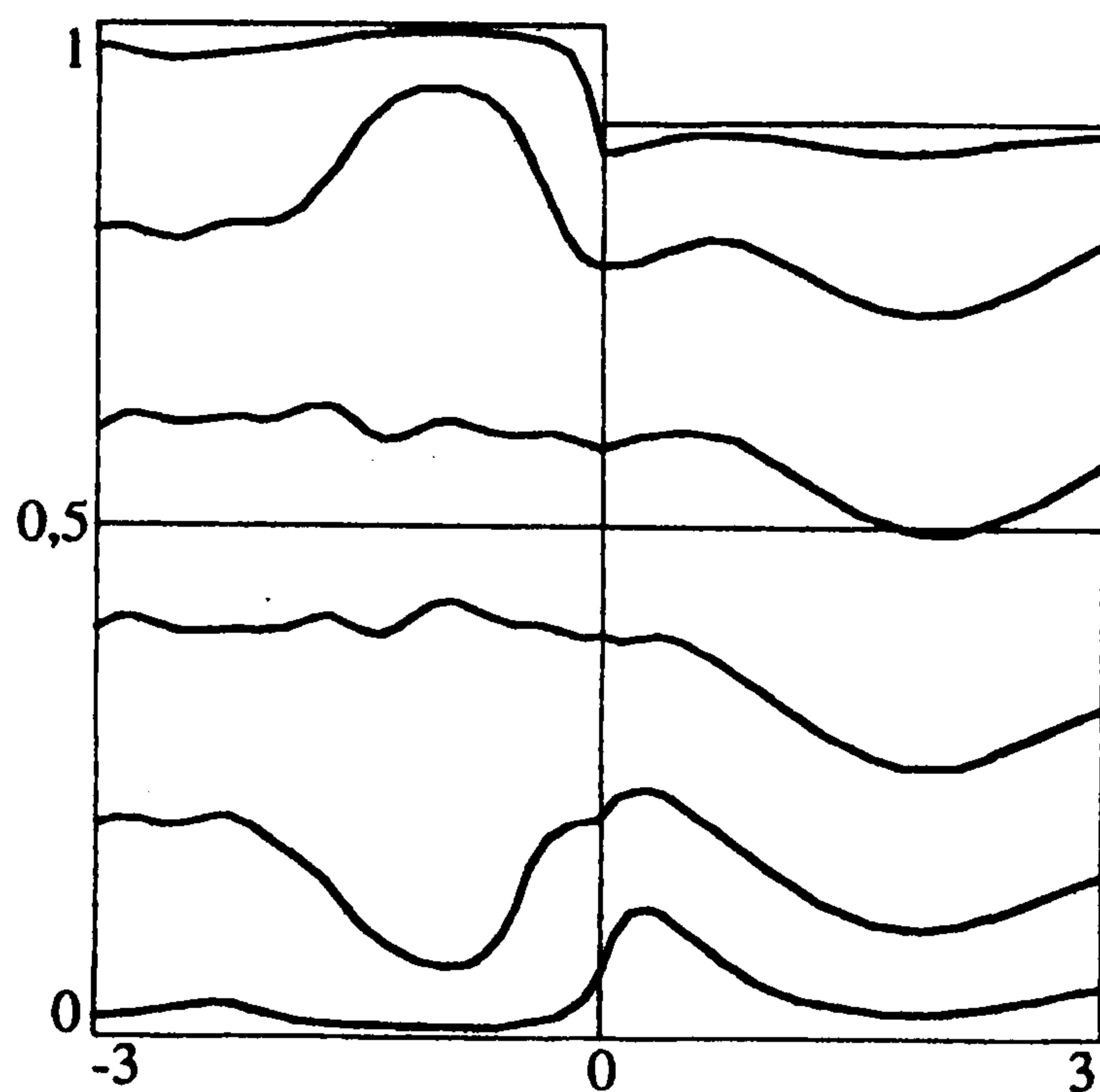
2. Осредненный за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ суммарный поток энергии через некоторую поверхность S определяется выражением

$$E = \int_S e_n dS$$

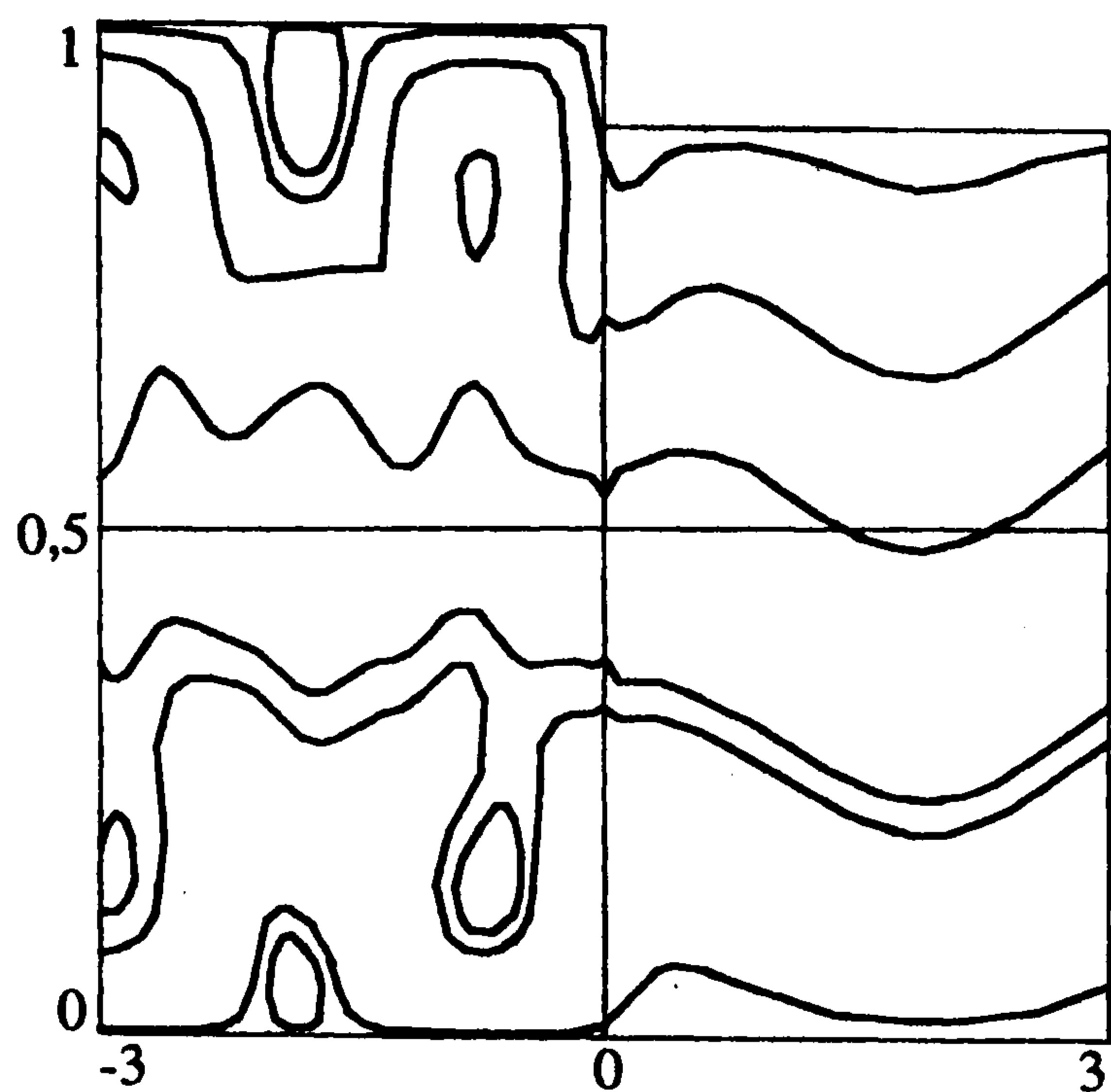
где e_n – проекция вектора плотности потока энергии на $\mathbf{n}$ – нормаль к S . Для поперечного сечения волновода с нормалью $\mathbf{n} = (0, 1)$

$$E_{x,j} = \int_0^{h_j} e_{x,j} dz, \quad e_{x,j} = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\tau_j, \mathbf{u}_j)$$

Было показано [1], что для стыка полуполос равной толщины в области частот, где число бегущих волн в левой полуполосе больше, чем в правой, граница раздела становится эффективно отражающей. Это явление получило название "захват энергии". На фиг. 1 представлены частотные зависимости коэффициента отражения энергии для различных значений толщины левой полуполосы. Видно, что аналогичное явление



Фиг. 2



Фиг. 3

имеет место и для неравных по толщине полуполос. Вне области захвата энергии ступенька на границе раздела для приведенных на фиг. 1 значений h_2 практически не влияет на ее прохождение.

Параметры сред для фиг. 1 брались те же, что в [1], а именно (в безразмерной форме): $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0,93480$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0,6162$, $v_1 = 0,24$, $v_2 = 0,3$, $h_1 = 1$. Сплошная кривая соответствует стыку полуполос равной толщины, штриховая – случаю $h_2 = 0,9h_1$, штрихпунктирная – случаю $h_2 = 0,85h_1$. Результаты для случая $h_1 = h_2$ совпадают с известными [1]. Кроме того, в качестве критерия правильности результатов численно проверялись условия баланса энергии и граничные условия на линии соединения.

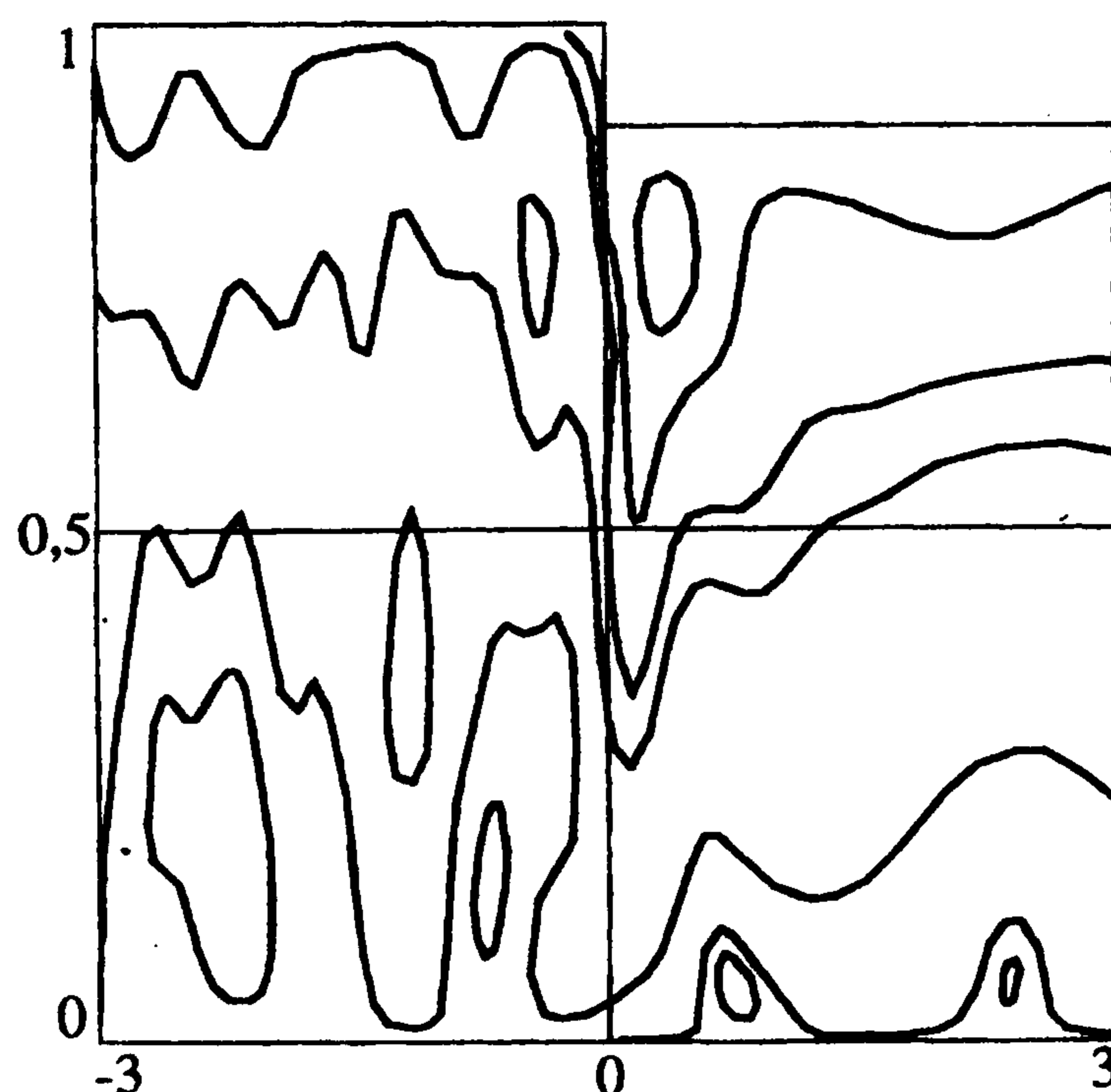
Для полуполос равной толщины при расчетах учитывались две пары неоднородных волн. Ошибка в выполнении граничных условий на стыке при этом была порядка нескольких процентов. Для исследования потока энергии учитывать неоднородные волны в этом случае оказалось вообще необязательно: даже при полном их неучете значение коэффициента отражения почти не меняется. Учет особенности напряжений в случае равной толщины полуполос не влияет на получаемые значения потоков энергии. Он лишь повышает точность выполнения граничных условий для тех сочетаний сред, когда особенности возникают. Однако учет неоднородных волн и структуры напряжений приобретает большое значение для полуполос неравной толщины: без использования представления (1.6) необходимой точности добиться не удалось.

3. Линии тока энергии – это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению с осредненным за период колебаний вектором плотности потока суммарной энергии e . Они определяются уравнением

$$dx / ds = e(s) / |e|$$

с начальным условием $x(0) = x_0$; x_0 – начальная точка, s – естественный параметр кривой.

Рассмотрение линий тока энергии позволяет дать наглядную картину тока энергии и в некотором смысле объяснить процессы, протекающие в системе. Так, когда отражение энергии от границы раздела незначительно, линии тока не образуют вихрей. Однако при повышении коэффициента отражения образуются вихри, перегораживающие волновод.



Фиг. 4

На фиг. 2–4 представлена картина тока энергии при наличии на границе раздела ступени высотой $0,1h_1$. Здесь в отличие от случая равной толщины полуполос линии тока несимметричны относительно продольной оси волновода, в связи с тем, что задача в этом случае не может быть разделена на симметричную и антисимметричную: симметричная падающая волна порождает также и антисимметричные моды в отраженном и прошедшем волновых полях. Сочетание сред взято таким же, как для фиг. 1.

Фигура 2 соответствует безразмерной частоте 5,0, т.е. перед началом роста коэффициента отражения. На меньших частотах линии тока представляют собой почти прямые линии, плавно обтекающие уступ. Из фиг. 3, соответствующей частоте 5,1, видно, как при увеличении отражения появляются вихри энергии. Фигура 4 показывает линии тока энергии вблизи максимального отражения для безразмерной частоты 6,0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С. Отражение волн Лэмба от границы раздела в составном волноводе // Прикл. механика. 1985. Т. 21. № 5. С. 121–125.
2. Зильбергейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 2. С. 333–335.
3. Гетман И.Л., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 1044–1048.
4. Гетман И.П., Лисицкий О.Н. Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос // Прикл. механика. 1991. Т. 27. № 8. С. 54–59.
5. Гетман И.П. К теории расчета нерегулярных упругих волноводов // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 60–65.
6. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полуполосы // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 77–83.
7. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С. Особенности структуры волновых полей в неоднородных волноводах // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Электроакуст. и звукотехн. 1988. № 12. С. 3–7.
8. Гомилко А.М., Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О возможностях метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теоретическая и прикладная механика. Киев: Вища школа, 1987. Вып. 18. С. 3–8.

9. Пельц С.П., Шихман В.М. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 821–824.
10. Дьяконов М.Б., Устинов Ю.А. Сдвиговые волны в упругом полубесконечном слое с разрезом // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 3. С. 421–426.
11. Пельц С.П., Трипалин А.С., Шихман В.Н. Вынужденные колебания полубесконечного волновода, нагруженного на торце при неразрушающем контроле изделий энергомашиностроения // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. Естественные науки. 1985. № 4. С. 5–8.
12. Glushkov E., Glushkova N., Kirillova E. Normal mode diffraction in elastic layered waveguides; resonances and energy vortices // Proc. 3rd. Intern. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation. Mandelieu-La Napoule, France, 1995. Philadelphia: SIAM, 1995. P. 604–612.
13. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
14. Bogy D.B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1971. V. 38. № 2. P. 377–386.

Краснодар

Поступила в редакцию
7.VI.1995