

УДК (532.5 + 539.3): 534.26

© 1997 г. А.В. Осипов

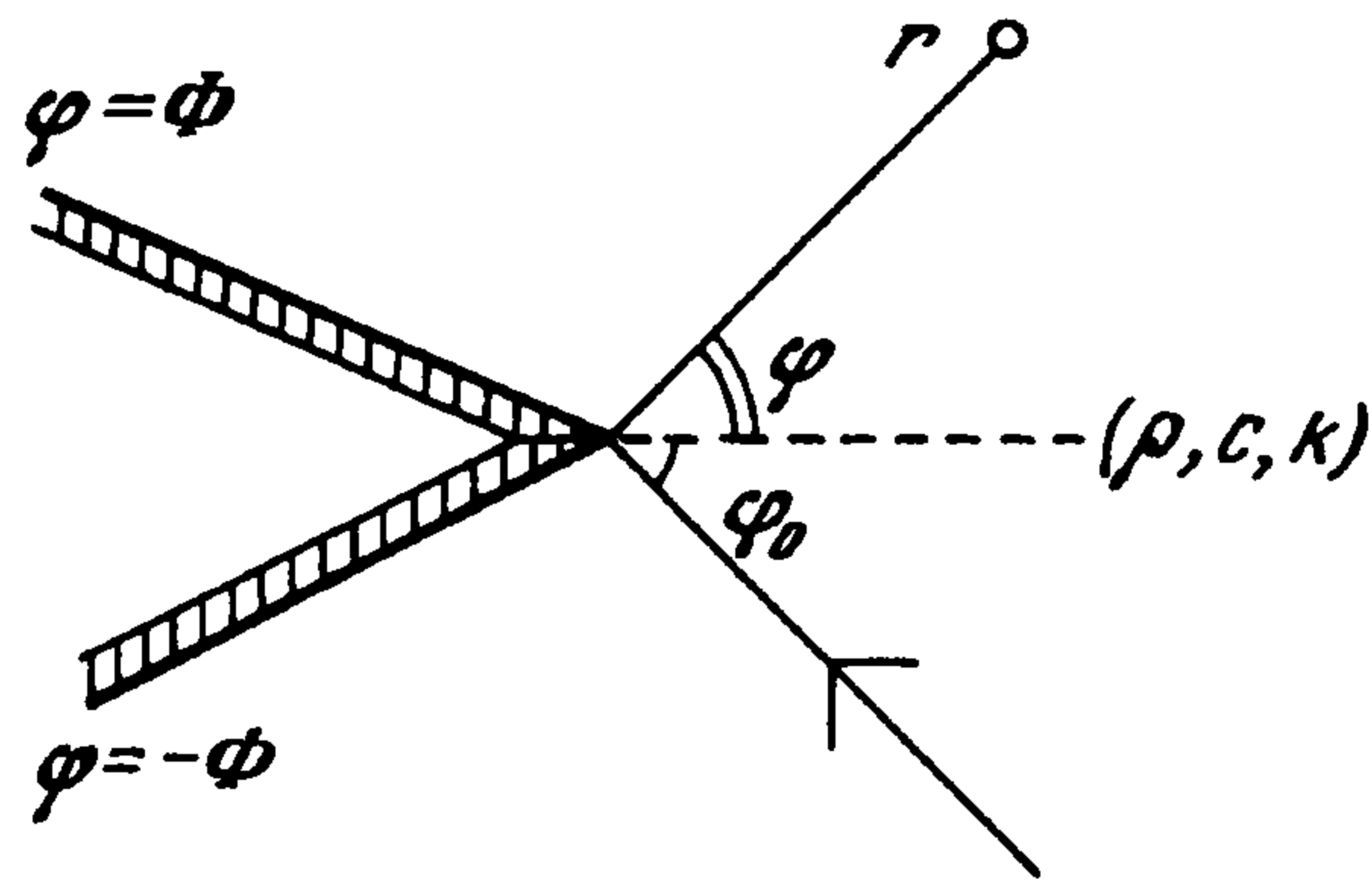
О ДИФРАКЦИИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УГЛОВОМ СОЧЛЕНЕНИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Методом Малюжинца построено точное решение граничноконтактной задачи дифракции плоской волны на сочленении двух упругих пластин при произвольном угле между ними.

Задачи дифракции звука на упругих полубесконечных пластинах и их сочленениях, находящихся в акустической среде, рассматриваются в механике и акустике давно, начиная с работ Г.Д. Малюжинца [1]–[3] и Лэмба [4], в которых впервые было получено точное решение задачи дифракции плоской звуковой волны на тонкой упругой полуплоскости. В случае прямоугольной геометрии (две пластины, развернутые в плоскость или сочлененные под прямым углом, Т-образное соединение, прямоугольный объем и т.п.), когда можно применить метод Винера – Хопфа, проблема была подробно исследована [5]–[8]. Если угол между пластинами не кратен прямому, то получить решение методом Винера – Хопфа не удастся и необходимо привлечь иную математическую технику – метод Малюжинца, разработанный для решения задач дифракции и излучения звука в угловых областях произвольного угла раствора [9, 10]. Для угловой области, грани которой абсолютно твердые и скользкие и покрыты тонкими упругими пластинами, совершающими только продольные колебания, точное решение задачи дифракции плоской звуковой волны было получено А.А. Тужилиным [11].

Ниже на основе общей теории, разработанной для угловых областей произвольного раствора и для граничных условий, содержащих производные произвольных порядков [12]–[14], представлено точное решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на угловом сочленении тонких упругих пластин, которые находятся в одностороннем контакте с акустической средой и описываются с помощью дифференциальных операторов пятого порядка (пластины Кирхгофа). Раздел 1 посвящен корректной постановке задачи, которая должна обеспечивать единственное решение, удовлетворяющее принципу взаимности. В разделе 2 с помощью техники Малюжинца – Тужилина задача дифракции сводится к системе функциональных разностных уравнений относительно трансформанты интеграла Зоммерфельда, представляющего звуковое давление внутри акустической среды, заполняющей угловую область. В разделе 3 получено общее решение задачи, которое содержит восемь неопределенных постоянных, и удовлетворяет уравнению Гельмгольца, краевым условиям на пластинах, а также условиям на ребре (последние понимаются как условия отсутствия на кромках фиктивных источников звука). Эти постоянные находятся из условий отсутствия в решении "паразитных" волн, нарушающих условия на бесконечности (разд. 4), и из контактных условий, задающих кинематический и динамический режимы в месте скрепления пластин (разд. 5). Единственность решения задачи, сформулированной в разд. 1, и ее соответствие принципу взаимности обсуждаются в Приложении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим две тонкие полубесконечные пластины, скрепленные кромками между собой так, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) с



Фиг. 1

осью z , совмещенной с линией скрепления, внешние стороны пластин совпадают с поверхностями $\varphi = \pm\Phi$ (фиг. 1). Пластины предполагаются однородными, имеющими плотности $\rho_{\pm}$ и толщины $h_{\pm}$, вообще говоря, не совпадающие между собой (здесь и далее величины с индексами плюс и минус относятся соответственно к верхней или нижней пластине). Сектор $|\varphi| < \Phi$ заполнен акустической средой с плотностью ρ и скоростью звука c ; за пластинами – вакуум. Из бесконечности на угловое сочленение пластин нормально к их общей кромке и под углом φ_0 к плоскости $\varphi = 0$ падает плоская гармоническая звуковая волна

$$p_0(r, \varphi) = P_0 \exp(-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (1.1)$$

где P_0 – амплитуда, ω – угловая частота; подразумевается, что зависимость от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$. Задача состоит в определении поля полного звукового давления $p(r, \varphi)$ всюду внутри акустической среды.

С математической точки зрения задача сводится к построению решения двумерного уравнения Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) p(r, \varphi) = 0 \quad (1.2)$$

внутри плоского углового сектора $|\varphi| < \Phi$, $0 \leq r < +\infty$, при краевых условиях

$$L_{\pm} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) p(r, \varphi) = 0, \quad \varphi = \pm\Phi \quad (1.3)$$

в которых

$$L_{\pm} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \mp \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} - \kappa_{\pm}^4 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_{\pm}, \quad \kappa_{\pm} = \left(\rho_{\pm} h_{\pm} \frac{\omega^2}{D_{\pm}} \right)^{1/4}, \quad v_{\pm} = \frac{\rho \omega^2}{D_{\pm}} \quad (1.4)$$

где $\kappa_{\pm}$ – волновые числа изгибных колебаний пластин в вакууме, $D_{\pm}$ – жесткости пластин при изгибе. В точке скрепления пластин $r = 0$, равномерно по углу φ , функция $p(r, \varphi)$ должна оставаться ограниченной и непрерывной, а ее первые производные иметь лишь интегрируемые особенности:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |p(r, \varphi)| = \text{const} < +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} |r \text{ grad } p(r, \varphi)| = 0 \quad (1.5)$$

Условия (1.5), которые будем называть условиями на ребре, вытекают из требования отсутствия фиктивных источников звука на линиях геометрических и материальных сингулярностей границ [15].

Условия на бесконечности в задачах дифракции плоских волн в угловых областях могут быть сформулированы как требование убывания разности полного поля $p(r, \varphi)$ и поля геометрической акустики $p_g(r, \varphi)$, если в среде имеется некоторое, хотя бы сколь

угодно малое, поглощение [10], т.е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |p(r, \varphi) - p_g(r, \varphi)| = 0, \quad \forall \varphi, \quad \text{Im } k > 0 \quad (1.6)$$

Поле $p_g(r, \varphi)$ в общем случае может состоять из падающей волны и ее отражений от границ области; оно строится по законам геометрической акустики и может считаться известным [16].

Кинематический и динамический режимы в месте скрепления тонких пластин описываются с помощью контактных условий [6]

$$\mathbf{K}_n^+ p + \mathbf{K}_n^- p = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{K}_n^\pm p = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\mathbf{H}_{1n}^\pm \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}(r, \pm \Phi) + \mathbf{H}_{2n}^\pm \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) p(r, \pm \Phi) \right)$$

где $\mathbf{H}_{mn}^\pm (\partial / \partial r)$ – полиномы, $m = 1, 2$. В условия (1.7) входят нормальные компоненты векторов смещений

$$\xi_\pm(r) = \mp \frac{1}{\omega^2 \rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}(r, \pm \Phi)$$

точек пластин, углы выхода пластин из места скрепления $\Phi_\pm = \pm(\Phi - \xi'_\pm(0))$, моменты $M_\pm = \pm D_\pm \xi''_\pm(0)$ и нормальные компоненты сил $F_\pm = -D_\pm \xi'''_\pm(0)$ (штрихи означают производные по координате r). Из теоремы единственности (Приложение) следует, что характер связей между указанными величинами в контактных условиях (1.7) не должен противоречить общему требованию

$$U_+ + U_- \geq 0 \quad (U_\pm = D_\pm \text{Im}(\xi'_\pm(0) \bar{\xi}''_\pm(0) - \xi_\pm(0) \bar{\xi}'''_\pm(0))) \quad (1.8)$$

вытекающему из закона сохранения энергии (черта сверху означает комплексное сопряжение). Кроме того, для любой пары параметров φ_1 и φ_2 , имеющих смысл углов падения, должно выполняться соотношение

$$J_+(\varphi_1, \varphi_2) + J_-(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (1.9)$$

$$(J_\pm(\varphi_1, \varphi_2) = D_\pm(\eta_\pm(\varphi_1, \varphi_2) - \eta_\pm(\varphi_1, \varphi_2)))$$

$$(\eta_\pm(x, y) = \xi_\pm(0, x) \xi'''_\pm(0, y) - \xi'_\pm(0, x) \xi''_\pm(0, y))$$

которое накладывает еще одно ограничение на соотношение между предельными значениями параметров, характеризующих условия стыковки пластин (здесь для удобства записи соответствующее значение угла падения φ_0 указано как второй аргумент у функций $\xi_\pm(r, \varphi_0)$). Условие (1.9) является следствием принципа взаимности (см. Приложение).

Очевидно, что корректная постановка задачи дифракции на угловых сочленениях тонких упругих пластин должна подразумевать, что контактные условия (1.7) сформулированы надлежащим образом и не противоречат общим соотношениям (1.8), (1.9). Непосредственной подстановкой можно показать, что наиболее часто встречающиеся типы контактных условий

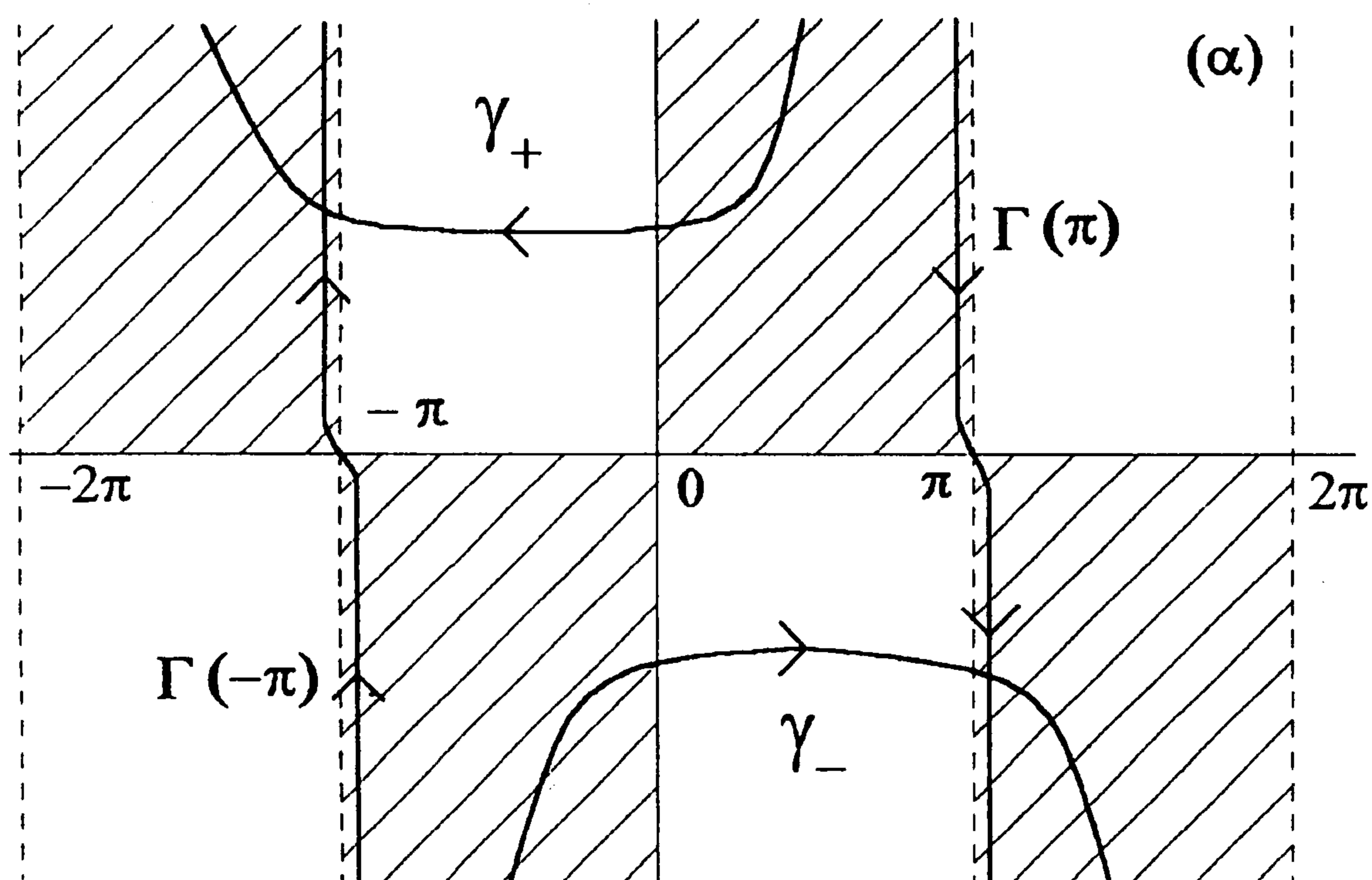
$$\xi_\pm(0) = 0, \quad \xi'_\pm(0) = 0 \quad (\text{жесткое защемление}) \quad (1.10)$$

$$\xi_\pm(0) = 0, \quad M_\pm = 0 \quad (\text{шарнирное соединение}) \quad (1.11)$$

$$M_\pm = 0, \quad F_\pm = 0 \quad (\text{свободные кромки}) \quad (1.12)$$

$$\xi_\pm(0) = 0, \quad \Phi_+ - \Phi_- = 2\Phi, \quad D_+ \xi''_+(0) = D_- \xi''_-(0) \quad (\text{жесткий спай}) \quad (1.13)$$

обращают соотношения (1.8), (1.9) в тождества. Поэтому использование любого из



Фиг. 2

них гарантирует, что соответствующая граничноконтактная задача имеет только одно решение, и это решение не противоречит принципу взаимности.

2. Преобразование к функциональным уравнениям. Решение задачи будем строить в виде интеграла Зоммерфельда [9]

$$p(r, \varphi) = \frac{P_0}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp(-ikr \cos \alpha) S(\alpha + \varphi) d\alpha \quad (2.1)$$

который, как можно убедиться прямой подстановкой, является частным решением уравнения Гельмгольца (1.2) при произвольном выборе функции $S(\alpha)$ – трансформанты интеграла Зоммерфельда. Контур интегрирования γ состоит из двух симметричных петель $\gamma_{\pm}$ в комплексной плоскости α (фиг. 2), концы которых располагаются так, чтобы интеграл (2.1) сходил. Предполагается, что внутри петель $\gamma_{\pm}$ нет ни одной особенности функции $S(\alpha + \varphi)$, когда $|\varphi| \leq \Phi$. Следует подчеркнуть, что возможность представления искомого решения интегралом (2.1) может быть обоснована для широкого круга задач дифракции, что в конечном счете вытекает из эквивалентности интегрального преобразования Малюжинца и преобразования Лапласа [17].

Трансформанта $S(\alpha)$ ищется в классе мероморфных функций, имеющих в полосе $\Pi_0 = \{\alpha: |\operatorname{Re} \alpha| < \Phi\}$ в точке $\alpha = \varphi_0$ единственный простой полюс с единичным вычетом и удовлетворяющих при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm \infty$ равномерно по φ условию $|S(\alpha + \varphi) - S(\pm \infty)| \rightarrow 0$, что обеспечивает соответственно выделение заданной падающей волны (1.1) при $r \rightarrow +\infty$ и выполнение условий на ребре (1.5). Заметим, что с помощью преобразования $S(\alpha) \rightarrow S(\alpha) + \text{const}$, относительно которого интегралы Зоммерфельда инвариантны, за счет выбора постоянной всегда можно добиться, чтобы выполнялось соотношение

$$S(+i\infty) = -S(-i\infty) \quad (2.2)$$

что ниже и будет предполагаться.

Подстановка интеграла (2.1) в краевые условия (1.3) приводит к системе двух интегральных тождеств

$$\int_{\gamma} \exp(-ikr \cos \alpha) L_{\pm}(\alpha) S(\alpha \pm \Phi) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r < +\infty \quad (2.3)$$

в которых функции $L_{\pm}(\alpha) = L_{\pm}(-ik \cos \alpha, -ik \sin \alpha)$ естественно назвать символами гра-

ничных операторов; согласно (1.4) они записываются в виде

$$L_{\pm}(\alpha) = \pm ik \sin \alpha (k^4 \cos^4 \alpha - \kappa_{\pm}^4) + v_{\pm} \quad (2.4)$$

Как известно [9, 17], необходимым и достаточным условием обращения в нуль интегралов (2.3) является равенство нечетной части подынтегрального выражения некоторому тригонометрическому полиному:

$$L_{\pm}(\alpha)S(\alpha \pm \Phi) - L_{\pm}(-\alpha)S(-\alpha \pm \Phi) = 2 \sin \alpha \sum_{n=1}^{N_{\pm}} C_n^{\pm} \cos^{n-1} \alpha \quad (2.5)$$

с произвольными коэффициентами $C_n^{\pm}$, не зависящими от α (данное утверждение с помощью замены переменной $q = -ik \cos \alpha$ сводится к обобщенной теореме Лиувилля). Порядки полиномов $N_{\pm}$ определяются поведением искомого решения и символов граничных операторов при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$; поэтому в рассматриваемом случае должно быть $N_{\pm} \leq 5$. Из уравнений системы (2.5) при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ следует, что без ограничения общности постоянные $C_5^{\pm}$ можно положить равными нулю, так как они оказываются пропорциональными сумме предельных значений $S(+i\infty) + S(-i\infty)$, равной нулю в силу условия нормировки (2.2). Итак, выполнение интегралом (2.1) краевых условий (1.3) свелось к системе двух функциональных разностных уравнений (2.5), в которых правая часть может содержать восемь произвольных постоянных $C_n^{\pm}$ ($n = 1, 2, 3, 4$).

3. Решение функциональных уравнений. При решении функциональных уравнений (2.5) применим метод, который был предложен и впервые использован в работе [10] по дифракции на клине с импедансными гранями. Метод состоит в преобразовании исходной системы с переменными коэффициентами в систему с постоянными коэффициентами с помощью замены

$$S(\alpha) = \Psi(\alpha)S_1(\alpha) \quad (3.1)$$

где $S_1(\alpha)$ – новая неизвестная функция, а функция $\Psi(\alpha)$ является вспомогательной и выбирается как некоторое частное решение системы (2.5) с нулевой правой частью. Тогда для $S_1(\alpha)$ задача сводится к системе неоднородных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами

$$S_1(\alpha \pm \Phi) - S_1(-\alpha \pm \Phi) = f_{\pm}(\alpha) \quad (3.2)$$

$$f_{\pm}(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha}{L_{\pm}(\alpha)\Psi(\alpha \pm \Phi)} \sum_{n=1}^4 C_n^{\pm} \cos^{n-1} \alpha$$

К системе с постоянными коэффициентами сводятся и уравнения для функции $\Psi(\alpha)$, если ввести в рассмотрение ее логарифмическую производную $Y(\alpha) = \Psi'(\alpha)/\Psi(\alpha)$:

$$Y(\alpha \pm \Phi) + Y(-\alpha \pm \Phi) = \pm \frac{R'_{\pm}(\alpha)}{R_{\pm}(\alpha)}, \quad R_{\pm}(\alpha) = -\frac{L_{\pm}(\mp \alpha)}{L_{\pm}(\pm \alpha)} \quad (3.3)$$

Можно проверить, что функции $R_{\pm}(\alpha)$ совпадают с коэффициентами отражения от бесконечной пластины плоской волны, падающей под углом скольжения α [18]. Поэтому числа $\alpha = \mp \alpha_n^{\pm}$, где $\alpha_n^{\pm}$ – нули символов граничных операторов, имеют смысл углов Брюстера (вообще говоря комплексных) для пластин, образующих граничные поверхности: коэффициент отражения плоской волны, падающей на них под такими углами, оказывается равным нулю. Из формулы (2.4) видно, что функции $L_{\pm}(\alpha)$ могут быть записаны как тригонометрические полиномы пятой степени от $\sin \alpha$, поэтому на комплексной плоскости α все корни этих функций можно выразить через пять корней, лежащих в какой-либо полосе шириной π . В качестве такой полосы выберем полосу $|\text{Re } \alpha| \leq \pi/2$, а корни, которые ей принадлежат, обозначим $\alpha = \mp \theta_n^{\pm}$ ($n = 1, 2, \dots, 5$).

Очевидно, что числа $\theta_n^\pm$ находятся с помощью соотношений $\theta_n^\pm = \arcsin \beta_n^\pm$, $\operatorname{Re} \theta_n^\pm \in (-\pi/2, \pi/2)$, где $\beta_n^\pm$ – корни характеристических уравнений

$$\beta^5 - 2\beta^3 + a_\pm \beta + ib_\pm = 0 \quad \left(a_\pm = 1 - \left(\frac{\kappa_\pm}{k} \right)^4, \quad b_\pm = \frac{v_\pm}{k^5} \right) \quad (3.4)$$

Решение системы (3.3), не имеющее ни нулей, ни полюсов в полосе Π_0 , строится в явном виде с помощью преобразования Фурье функции $Y(\alpha)$, что приводит к алгебраической задаче для определения ее трансформанты. В результате для вспомогательной функции $\Psi(\alpha)$ может быть получено представление

$$\Psi(\alpha) = \Psi_+(\alpha) \Psi_-(\alpha) \quad (3.5)$$

$$\Psi_\pm(\alpha) = \prod_{n=1}^5 \left\{ \psi_\Phi \left(\alpha \pm \Phi + \frac{\pi}{2} - s_n^\pm \theta_n^\pm \right) \psi_\Phi \left(\alpha \pm -\frac{\pi}{2} + s_n^\pm \theta_n^\pm \right) \right\}^{s_n^\pm}$$

$$s_n^\pm = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} \theta_n^\pm), \quad n = 1, 2, \dots, 5$$

где $\psi_\Phi(\alpha)$ – специальная функция Малюжинца [10], для которой при выводе формулы (3.5) было использовано интегральное представление [19]

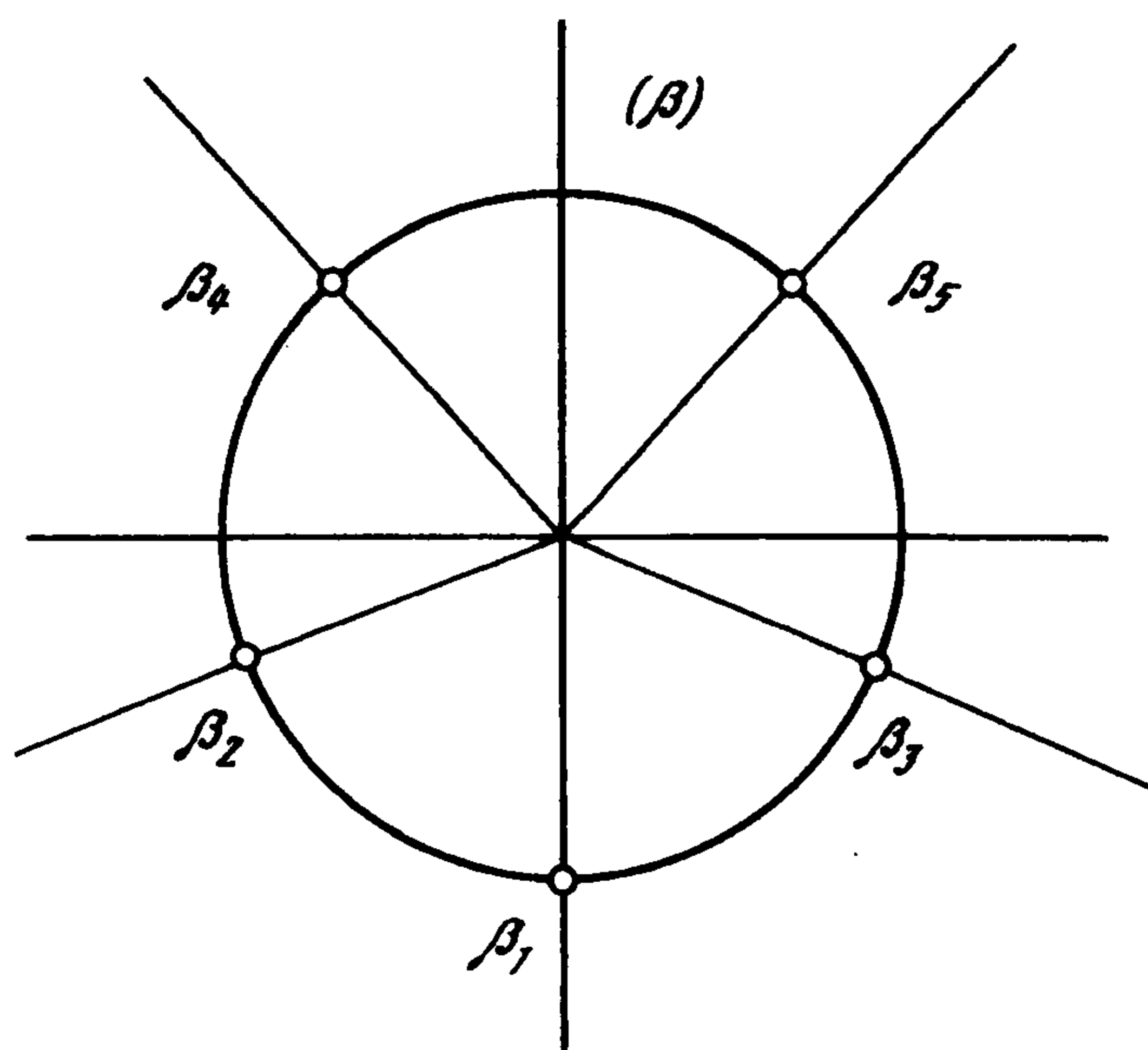
$$\psi_\Phi(\alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha t) - 1}{t \operatorname{ch}(\pi t / 2) \operatorname{sh}(2t\Phi)} dt \right\}$$

Функция $\psi_\Phi(\alpha)$ не имеет ни нулей, ни полюсов в полосе $|\operatorname{Re} \alpha| < \pi/2 + 2\Phi$, поэтому выражение (3.5) действительно представляет функцию, которая обладает аналогичным свойством в полосе Π_0 . В том, что функция $\Psi(\alpha)$ удовлетворяет однородной системе (2.5), можно убедиться и непосредственной подстановкой, если для коэффициентов системы записать разложения

$$L_\pm(\alpha) = \pm ik^5 \prod_{n=1}^5 (\sin \alpha \pm \sin \theta_n^\pm)$$

и учесть свойства функции Малюжинца [10].

Вид формулы (3.5) зависит от расположения чисел $\theta_n^\pm$ на комплексной плоскости, точнее от знаков их вещественных частей. Поэтому необходимо рассмотреть расположение корней уравнения (3.4) на комплексной плоскости β . Анализ показывает, что при вещественных коэффициентах $a_\pm, b_\pm$ его корни лежат симметрично относительно мнимой оси, и оно имеет один, и только один, чисто мнимый корень с отрицательной мнимой частью. Например, для тонкой стальной пластины, находящейся в воде, корни уравнения приближенно находятся в местах пересечения окружности радиуса $|\beta| = |b_\pm|^{1/5}$ с лучами, выходящими из точки $\beta = 0$ и образующими с отрицательной частью мнимой оси углы, кратные $2\pi/5$ (фиг. 3). При других сочетаниях параметров пластины и акустической среды (например, сталь – воздух) приближенное выражение для корней и их расположение в комплексной плоскости могут быть другими, однако для развиваемой здесь теории существенно только, чтобы два корня характеристического уравнения (3.4) (в принятых обозначениях это корни $\beta_{2,4}^\pm$) имели отрицательную вещественную часть, и корни $\beta_{3,5}^\pm$ – положительную. При вещественных коэффициентах уравнения знак вещественной части чисел $\beta_1^\pm$ не определен, так как они оказываются чисто мнимыми. В дальнейшем при построении решения системы функциональных уравнений (2.5) удобно будет считать, что числа $\beta_1^\pm$ все же имеют некоторую, малую, но не равную нулю, положительную вещественную часть. Так будет, например, если сделать коэффициенты $b_\pm$ комплексными: $b_\pm = |b_\pm| \exp(i \arg b_\pm)$,



Фиг. 3

где $0 < \arg b_{\pm} \ll 1$. В окончательных формулах можно вернуться к чисто вещественным коэффициентам, устремляя $\arg b_{\pm}$ к нулю.

При сделанных предположениях получаем для параметров $s_n^{\pm}$ в выражении (3.5) $s_n^{\pm} = (-1)^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots, 5$), что полностью определяет вид и свойства функции $\Psi(\alpha)$. В частности при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$, в силу асимптотических свойств функции Малюжинца при больших и комплексных аргументах [10, 20]

$$\Psi_{\Phi}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\Phi}\left(\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-i \frac{\pi \alpha}{8\Phi} \text{sign}(\text{Im } \alpha)\right) (1 + o(1))$$

имеем

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{4} \Psi_{\Phi}^4\left(\frac{\pi}{2}\right) \exp(-i\mu\alpha \text{sign}(\text{Im } \alpha)) (1 + o(1)), \quad \mu = \frac{\pi}{2\Phi} \quad (3.6)$$

Обратимся к построению функции $S_1(\alpha)$. Общее решение системы (3.2) должно строиться из частного решения неоднородной системы и, возможно, общего решения соответствующих однородных уравнений [21]. Частное решение неоднородной задачи, аналитическое в полосе Π_0 , находится с помощью преобразования Фурье как

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda_+(\alpha) + \Lambda_-(\alpha) \quad (3.7)$$

$$\Lambda_{\pm}(\alpha) = \pm \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \text{tg}\left(\frac{\pi}{4\Phi}(\alpha + \beta \pm \Phi)\right) f_{\pm}(\beta) d\beta$$

Интегралы $\Lambda_{\pm}(\alpha)$ сходятся абсолютно, так как ввиду оценки (3.6) функции $f_{\pm}(\beta)$ при $\text{Im } \beta \rightarrow \pm \infty$ убывают быстрее, чем $\exp(-\mu|\text{Im } \beta|)$. При $\text{Im } \alpha \rightarrow \pm \infty$ функция $\Lambda(\alpha)$ описывается асимптотической формулой

$$\Lambda(\alpha) = \pm \frac{i}{4\Phi} \exp(\pm i\mu\alpha) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(i\mu\beta) (f_+(\beta) + f_-(\beta)) d\beta (1 + o(1)) \quad (3.8)$$

которую можно получить, если в подынтегральных выражениях в интегралах $\Lambda_{\pm}(\alpha)$ заменить функцию тангенс на два старших члена ее разложения при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ и учесть нечетность функций $f_{\pm}(\beta)$. Во внешность полосы Π_0 функция $\Lambda(\alpha)$ продолжается или непосредственно – с помощью интегральной формулы (3.7), или с помощью функциональных уравнений

$$\Lambda(\alpha \pm \Phi) - \Lambda(-\alpha \pm \Phi) = f_{\pm}(\alpha) \quad (3.9)$$

которые вытекают из формулы (3.2).

Функция $\Lambda(\alpha)$ не имеет полюсов в полосе Π_0 , что следует из сходимости интегралов $\Lambda_{\pm}(\alpha)$ в этой полосе. Поэтому, чтобы получить в решении полюс в точке $\alpha = \varphi_0$, введем в рассмотрение мероморфную функцию

$$\sigma(\alpha, \varphi_0) = \frac{\mu \cos(\mu \varphi_0)}{\sin(\mu \alpha) - \sin(\mu \varphi_0)} \quad (3.10)$$

которая имеет единичный вычет в точке $\alpha = \varphi_0$ и в то же время является решением однородной системы (3.2) (в чем можно убедиться непосредственно). Тогда функция

$$S_2(\alpha) = \frac{\sigma(\alpha, \varphi_0)}{\Psi(\varphi_0)} + \Lambda(\alpha) \quad (3.11)$$

будет решением системы (3.2) с требуемой особенностью при $\alpha = \varphi_0$.

Из формул (3.8), (3.10) следует, что при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ функция $S_2(\alpha)$ убывает как $O(\exp(-\mu |\text{Im } \alpha|))$, что при учете асимптотики (3.6) обеспечивает ограниченность произведения $\Psi(\alpha)S_2(\alpha)$ в окрестности бесконечно удаленной точки на комплексной плоскости α . С другой стороны, по построению, функция $\Psi(\alpha)S_2(\alpha)$ имеет внутри полосы Π_0 только один полюс, который находится в точке $\alpha = \varphi_0$ и имеет вычет равный единице. Таким образом, подстановка в формулу (3.1) в качестве функции $S_1(\alpha)$ функции $S_2(\alpha)$ дает искомое решение системы функциональных уравнений (2.5), обладающее требуемыми аналитическими свойствами. Однородные уравнения (3.2) имеют и другие решения, отличные от функции $\sigma(\alpha, \varphi_0)$, которые делятся на два типа – мероморфные и целые (последние представляют собой просто линейные комбинации косинусов $\cos(\mu n(\alpha - \Phi))$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)) [21]. Решение неоднородной системы (3.2) остается ее решением после добавления или вычитания решений однородных уравнений, а также после умножения или деления на эти решения. При этом, однако, изменяются его аналитические свойства: появляются или исчезают полюсы, становится другим поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. Можно показать, что к функции $S_2(\alpha)$ нельзя добавить ни аддитивно, ни мультипликативно никаких других решений однородных уравнений без того, чтобы не нарушить его убывание при $\text{Im } \alpha \rightarrow \infty$ или не ввести в полосу Π_0 полюсы, не соответствующие поставленным условиям.

Итак, выражение

$$S(\alpha) = \Psi(\alpha)S_2(\alpha) \quad (3.12)$$

(функция $\Psi(\alpha)$ определена формулой (3.5), а $S_2(\alpha)$ – формулой (3.11)) дает в наиболее общем виде искомое решение функциональных уравнений. Оно содержит восемь неопределенных постоянных $C_n^{\pm}$ ($n = 1, 2, 3, 4$). При произвольных значениях этих постоянных интеграл (2.1) с трансформантой (3.12) является решением уравнения Гельмгольца (1.2) всюду внутри угловой области $|\varphi| < \Phi$, удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4) на ее сторонах, обеспечивает выделение падающей волны (1.1) (в "освещенной" части пространства $|\varphi - \varphi_0| < \pi$), а также оказывается ограниченной и непрерывной функцией в точке $r = 0$. Для значения звукового давления на ребре, как простое следствие асимптотик (3.6), (3.8) и формулы Малюжинца [22]

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r, \varphi) = iP_0(S(i\infty) - S(-i\infty)) \quad (3.13)$$

можно записать точное представление

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r, \varphi) = P_0 \Psi^4 \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\mu \cos(\mu \varphi_0)}{\Psi(\varphi_0)} - \frac{1}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(i\mu\beta)(f_+(\beta) + f_-(\beta))d\beta \right)$$

не зависящее от направления стремления точки наблюдения к угловой точке.

Постоянные $C_n^{\pm}$ в общем решении определяются из оставшихся условий: условий на бесконечности (1.6) и контактных условий (1.7).

4. Полюсы трансформанты и условия на бесконечности. Рассмотрим поведение интеграла (2.1) при $r \rightarrow +\infty$. Путем непрерывной деформации контуры $\gamma_{\pm}$ могут быть преобразованы в два параллельных контура $\Gamma(\pm\pi)$, проходящих вдоль линий $\operatorname{Re} \alpha = \pm\pi$ на комплексной плоскости α (фиг. 2). Выбирая эти контуры так, чтобы они были чуть (сколь угодно мало) смещены в области, где выполняется условие $\operatorname{Im} \cos \alpha < 0$ (показаны штриховкой), получаем интегралы, которые при $r \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю, так как их подынтегральные выражения стремятся к нулю во всех точках контуров интегрирования $\Gamma(\pm\pi)$. В процессе деформации могут пересекаться полюсы функции $S(\alpha + \varphi)$, если они попадают внутрь области, ограниченной сверху и снизу контурами $\gamma_{\pm}$, а справа и слева – контурами $\Gamma(\pm\pi)$. Если среди них имеются полюсы, находящиеся в незаштрихованных частях указанной области, то в оценке интеграла (2.1), как вычеты в этих полюсах, появляются слагаемые, экспоненциально растущие при $r \rightarrow +\infty$, что приводит к нарушению условия на бесконечности (1.6). Таким образом, на выполнение условия на бесконечности могут влиять только такие полюсы трансформанты $S(\alpha)$, которые располагаются в полосе $\Pi = \{\alpha: |\operatorname{Re} \alpha| \leq \pi + \Phi\}$. Те из них, которые приводят к появлению членов, растущих при $r \rightarrow +\infty$, должны быть исключены из разыскиваемого решения (такие полюсы дальше будут называться "запрещенными").

Перейдем к рассмотрению полюсов выражения (3.12). Полюсы функции $\sigma(\alpha, \varphi_0)$ (см. формулу (3.10)) образуют два семейства

$$\alpha_j = \begin{cases} \varphi_0 + 4j\Phi \\ 2\Phi - \varphi_0 + 4j\Phi \end{cases}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1)$$

Положение полюсов этих семейств на комплексной плоскости зависит от величины угла падения φ_0 , и среди них имеется полюс $\alpha = \varphi_0$, соответствующий падающей волне (1.1). Вычеты в этом и остальных полюсах семейств (4.1) не содержат постоянных $C_n^{\pm}$ и дают вклады

$$p_j^g(r, \varphi) = P_0 \frac{\Psi(\alpha_j) \cos(\mu\varphi_0)}{\Psi(\varphi_0) \cos(\mu\alpha_j)} \exp(-ikr \cos(\alpha_j - \varphi)) \quad (4.2)$$

Эти вклады и по фазе и по амплитуде совпадают с плоскими волнами, отраженными от сторон области (преобразование амплитудного множителя в формуле (4.2) к коэффициентам отражения или их произведениям в случае многократных переотражений, которые могут иметь место в узких угловых областях $\Phi < \pi/2$, осуществляется на основе известных функциональных свойств функций Малюжинца, вполне аналогично тому, как это было сделано для импедансных граничных условий в статье [16]). Таким образом, все полюсы функции $\sigma(\alpha, \varphi_0)$ оказываются разрешенными; попадая в полосу Π , они приводят при оценке интеграла (2.1) вдали от линии скрепления пластин к выделению вычетов, которые описывают волны геометрической акустики.

Функции $\Psi_{\pm}(\alpha)$, входящие в выражение (3.5), запишем как

$$\Psi_{\pm}(\alpha) = \Psi_1^{\pm}(\alpha) \frac{\Psi_3^{\pm}(\alpha) \Psi_5^{\pm}(\alpha)}{\Psi_2^{\pm}(\alpha) \Psi_4^{\pm}(\alpha)} \quad (4.3)$$

$$\Psi_q^{\pm}(\alpha) = \psi_{\Phi} \left(\alpha \pm \Phi + \frac{\pi}{2} + (-1)^q \theta_q^{\pm} \right) \psi_{\Phi} \left(\alpha \pm \Phi - \frac{\pi}{2} - (-1)^q \theta_q^{\pm} \right)$$

Из формул (3.5), (4.3) следует, что полюсы функции $\Psi(\alpha)$ совпадают с полюсами функций $\Psi_q^{\pm}(\alpha)$ при $q = 1, 3, 5$ и их нулями – при $q = 2, 4$. Как известно [10], функция Малюжинца $\psi_{\Phi}(\alpha)$ при $\alpha = \pm\alpha_{nm}$, где $\alpha_{nm} = \pi(2m - 1)/2 + 2\Phi(2n - 1)$ ($n, m = 1, 2, 3, \dots$), имеет нули, если m нечетно, и полюсы, если m четно. Поэтому полюсы функции

$\Psi(\alpha)$ могут быть найдены из соотношений

$$\alpha = \begin{cases} -\Phi - \pi/2 + \chi\theta_q^+ \pm \alpha_{nm} \\ -\Phi + \pi/2 - \chi\theta_q^+ \pm \alpha_{nm} \\ \Phi - \pi/2 + \chi\theta_q^- \pm \alpha_{nm} \\ \Phi + \pi/2 - \chi\theta_q^- \pm \alpha_{nm} \end{cases}, \quad \chi = \begin{cases} 1 & \text{при } q=1,3,5, \quad m=2,4,6,\dots \\ -1 & \text{при } q=2,4, \quad m=1,3,5,\dots \end{cases} \quad n=1,2,3,\dots \quad (4.4)$$

Прежде чем анализировать расположение полюсов функции $\Psi(\alpha)$ на комплексной плоскости, убедимся, что функция $\Lambda(\alpha)$, которая дается формулой (3.7) и входит в выражение для трансформанты (3.12) через функцию $S_2(\alpha)$, не вносит новых полюсов в решение, и все особенности функции $S(\alpha)$ исчерпываются полюсами функций $\sigma(\alpha, \Phi_0)$ и $\Psi(\alpha)$.

Чтобы это показать, сравним аналитические свойства функций $\Psi(\alpha)$ и $\Omega(\alpha) = \Psi(\alpha)\Lambda(\alpha)$. По построению (см. раздел 3) эти функции являются аналитическими в полосе Π_0 и, соответственно, не имеющими полюсов в этой полосе решениями функциональных уравнений

$$L_{\pm}(\alpha)\Psi(\alpha \pm \Phi) - L_{\pm}(-\alpha)\Psi(-\alpha \pm \Phi) = 0 \quad (4.5)$$

$$L_{\pm}(\alpha)\Omega(\alpha \pm \Phi) - L_{\pm}(-\alpha)\Omega(-\alpha \pm \Phi) = 2\sin\alpha \sum_{n=1}^4 C_n^{\pm} \cos^{n-1}\alpha$$

(коэффициенты $L_{\pm}(\alpha)$ описываются формулой (2.4)). Во внешность полосы Π_0 функции $\Psi(\alpha)$, $\Omega(\alpha)$ продолжаютсся с помощью соотношений (4.5). Например, в полосе $\Pi_1 = \{\alpha: \Phi < \operatorname{Re} \alpha \leq 3\Phi\}$ эти функции могут быть найдены с помощью формул

$$\Psi(\alpha + 2\Phi) = \frac{L_+(-\alpha - \Phi)}{L_+(\alpha + \Phi)} \Psi(-\alpha), \quad \alpha \in \Pi_0$$

$$\Omega(\alpha + 2\Phi) = \frac{1}{L_+(\alpha + \Phi)} \left(L_+(-\alpha - \Phi)\Omega(-\alpha) + 2\sin(\alpha + \Phi) \sum_{n=1}^4 C_n^+ \cos^{n-1}(\alpha + \Phi) \right)$$

И в том и в другом случае полюсы обеих функций в полосе Π_1 совпадают с нулем одной и той же функции $L_+(\alpha + \Phi)$. Аналогичным образом можно сравнить особенности функций $\Psi(\alpha)$, $\Omega(\alpha)$ в любой другой полосе на комплексной плоскости α и убедиться, что их полюсы совпадают (хотя вычеты в этих полюсах могут быть разными). Отсюда следует, что, несмотря на то, что функция $\Lambda(\alpha)$ мероморфна (в чем можно убедиться, например, с помощью ее интегрального представления (3.7), продолжая его во внешность полосы Π_0), каждый ее полюс обязательно совпадает с каким-нибудь из нулей функции $\Psi(\alpha)$, и в результате функция $\Lambda(\alpha)$ не вносит новых полюсов, отличных от (4.4), в произведение $\Psi(\alpha)\Lambda(\alpha)$ и соответственно в функцию $S(\alpha)$.

Определим, какие из полюсов функции $\Psi(\alpha)$ могут попадать в полосу Π . Прежде всего заметим, что полюсы, соответствующие значениям $m \geq 3$ в формулах (4.4), лежат вне этой полосы, поэтому анализ можно ограничить случаями $m = 1, 2$. Далее можно убедиться, что при $q = 1, 3, 5$ ни один из полюсов семейства (4.4) не попадает в Π , что обусловлено наличием у чисел $\theta_q^{\pm}$ положительной вещественной части. В результате оказывается, что в рассматриваемой полосе могут располагаться только полюсы семейства (4.4), отвечающие значениям $q = 2, 4, m = 1$. Количество полюсов, находящихся в Π , зависит от раствора угловой области Φ , который определяет сдвиг между полюсами с разными значениями параметра n : чем меньше величина параметра Φ , тем ближе полюсы друг к другу, тем большее их число может лежать внутри Π .

Принимая во внимание знаки мнимых частей $\operatorname{Im} \theta_2^{\pm} < 0$, $\operatorname{Im} \theta_4^{\pm} > 0$ (см. разд. 3), можно показать, что среди всех полюсов, находящихся в полосе Π , запрещенными

полюсами, т.е. такими, вычеты в которых приводят к росту решения при $r \rightarrow +\infty$ и нарушению условия на бесконечности (1.6), будут полюсы, принадлежащие к одному из перечисленных ниже семейств:

$$\alpha_{pn}^f = \begin{cases} \theta_2^+ + \pi + \Phi + 4n\Phi, & p=1 \\ -\theta_2^+ - \pi - 3\Phi - 4n\Phi, & p=2 \\ -\theta_4^+ + \Phi + 4n\Phi, & p=3 \\ \theta_4^+ - 3\Phi - 4n\Phi, & p=4 \end{cases}, \quad \alpha_{pn}^f = \begin{cases} -\theta_2^- - \pi - \Phi - 4n\Phi, & p=5 \\ \theta_2^- + \pi + 3\Phi + 4n\Phi, & p=6 \\ \theta_4^- - \Phi - 4n\Phi, & p=7 \\ -\theta_4^- + 3\Phi + 4n\Phi, & p=8 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N_p$$

(количество полюсов в семействе с номером p равно $N_p + 1$ и зависит от конкретных значений параметров Φ и $\text{Re } \theta_{2,4}^\pm$). Вычеты интеграла (2.1) в остальных полюсах трансформанты $S(\alpha)$ из полосы Π стремятся к нулю при $r \rightarrow +\infty$ и не нарушают условий на бесконечности.

Чтобы сформулировать условия, обеспечивающие требуемое поведение решения при $r \rightarrow +\infty$, рассмотрим сначала более простой случай, когда угол раствора между пластинами удовлетворяет неравенству $\Phi > \pi/2$. Тогда внутри полосы Π могут находиться восемь полюсов

$$\alpha = \Phi - \theta_q^+, \quad \Phi + \pi + \theta_q^+, \quad -\Phi - \pi - \theta_q^-, \quad -\Phi + \theta_q^-, \quad q = 2, 4$$

среди которых запрещенными будут четыре:

$$\alpha = \alpha_{10}^f, \quad \alpha_{30}^f, \quad \alpha_{50}^f, \quad \alpha_{70}^f \quad (4.7)$$

Чтобы обеспечить правильное поведение решения при $r \rightarrow +\infty$, необходимо приравнять нулю вычеты функции $S(\alpha)$ в полюсах (4.7). Так как эти полюсы являются полюсами функции $\Psi(\alpha)$, то соответствующие условия могут быть записаны как условия обращения в нуль в этих точках функции $S_2(\alpha)$, которая стоит сомножителем после $\Psi(\alpha)$ в общем решении (3.12), что при учете формулы (3.11) дает

$$\sigma(\alpha_{p0}^f, \varphi_0) / \Psi(\varphi_0) + \Lambda(\alpha_{p0}^f) = 0, \quad p = 1, 3, 5, 7 \quad (4.8)$$

Видно, что условия (4.8) имеют вид линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных $C_n^\pm$ ($n = 1, 2, 3, 4$). В полной системе из восьми уравнений, которая строится в данном исследовании и которую удобно записывать в матричном виде

$$\mathbf{E}\mathbf{C} = \mathbf{g} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{C} = (C_1^+, C_2^+, C_3^+, C_4^+, C_1^-, C_2^-, C_3^-, C_4^-)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_8)^T$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11}^+ & E_{12}^+ & E_{13}^+ & E_{14}^+ & E_{11}^- & E_{12}^- & E_{13}^- & E_{14}^- \\ E_{21}^+ & E_{22}^+ & E_{23}^+ & E_{24}^+ & E_{21}^- & E_{22}^- & E_{23}^- & E_{24}^- \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{81}^+ & E_{82}^+ & E_{83}^+ & E_{84}^+ & E_{81}^- & E_{82}^- & E_{83}^- & E_{84}^- \end{pmatrix}$$

условиям (4.8) соответствуют первые четыре строки системы (4.9). Для первых четырех элементов вектора $\mathbf{g}$ согласно (4.8) получаем

$$g_p = -\sigma(\alpha_p^f, \varphi_0) / \Psi(\varphi_0), \quad p = 1, 2, 3, 4$$

$$\alpha_1^f = \alpha_{10}^f, \quad \alpha_2^f = \alpha_{30}^f, \quad \alpha_3^f = \alpha_{50}^f, \quad \alpha_4^f = \alpha_{70}^f$$

Элементы первых четырех строк матрицы $\mathbf{E}$ выводятся на основе представления (3.7);

при этом следует учитывать, что полюсы $\alpha_{p_0}^f$ лежат вне полосы Π_0 и для функции $\Lambda(\alpha)$ необходимо использовать выражения, полученные путем аналитического продолжения в соответствующие части комплексной плоскости α . Кроме того, при записи окончательных формул можно снять вспомогательное предположение относительно наличия у коэффициентов $b_{\pm}$ в характеристических уравнениях (3.4) малой положительной мнимой части, которое было сделано из соображений удобства при построении общего решения задачи (см. разд. 3). В процессе предельного перехода $\arg b_{\pm} \rightarrow 0$ полюсы подынтегральных выражений в интегралах (3.7), связанные с нулями функций $L_{\pm}(\beta)$ в точках $\beta = \mp\theta_1^{\pm}$, выходят на контур интегрирования, что приводит к возникновению дополнительных полувычетных слагаемых. В результате для элементов первых четырех строк матрицы E могут быть получены следующие формулы

$$\begin{aligned}
E_{1n}^{+} &= Q_n^{+}(\pi + \theta_2^{+}) + X_n^{+} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_1^{+} + \theta_2^{+})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_2^{+} - \beta)\right) Q_n^{+}(\beta) d\beta \\
E_{1n}^{-} &= X_n^{-} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_2^{+} - \theta_1^{-})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_2^{+} - \beta)\right) Q_n^{-}(\beta) d\beta \\
E_{2n}^{+} &= -Q_n^{+}(\theta_4^{+}) + X_n^{+} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_1^{+} - \theta_4^{+})\right) - \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_4^{+} + \beta)\right) Q_n^{+}(\beta) d\beta \\
E_{2n}^{-} &= -X_n^{-} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_4^{+} + \theta_1^{-})\right) - \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_4^{+} + \beta)\right) Q_n^{-}(\beta) d\beta \\
E_{3n}^{+} &= X_n^{+} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi - \theta_1^{+} + \theta_2^{-})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_2^{-} + \beta)\right) Q_n^{+}(\beta) d\beta \\
E_{3n}^{-} &= -Q_n^{-}(\pi + \theta_2^{-}) + X_n^{-} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_1^{-} + \theta_2^{-})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\pi + \theta_2^{-} + \beta)\right) Q_n^{-}(\beta) d\beta \\
E_{4n}^{+} &= -X_n^{+} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_1^{+} + \theta_4^{-})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu}{2}(-\theta_4^{-} + \beta)\right) Q_n^{+}(\beta) d\beta \\
E_{4n}^{-} &= -Q_n^{-}(-\theta_4^{-}) + X_n^{-} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(\theta_1^{-} - \theta_4^{-})\right) + \frac{i}{8\Phi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \operatorname{ctg}\left(\frac{\mu}{2}(-\theta_4^{-} + \beta)\right) Q_n^{-}(\beta) d\beta \\
Q_n^{\pm}(\beta) &= \frac{2 \sin \beta \cos^{n-1} \beta}{L_{\pm}(\beta) \Psi(\beta \pm \Phi)}, \quad X_n^{\pm} = \frac{\mu}{2} \frac{\sin \theta_1^{\pm} \cos^{n-1} \theta_1^{\pm}}{L'_{\pm}(\mp\theta_1^{\pm}) \Psi(\mp\theta_1^{\pm} \pm \Phi)}, \quad n = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

Все интегралы в формуле (4.10) берутся в смысле главного значения в точках $\beta = \mp\theta_1^{\pm}$, лежащих на контуре интегрирования. При $\beta \rightarrow \pm i\infty$ эти интегралы сходятся абсолютно, так как функция $\Psi(\alpha)$ при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow \pm\infty$ имеет оценку (3.6). Матрица E приобретает определенные свойства симметрии, если пластины, составляющие угол, одинаковы. Тогда $L_{+}(\alpha) = L_{-}(-\alpha)$, $\theta_n^{+} = \theta_n^{-}$, $\Psi(\alpha) = \Psi(-\alpha)$, $Q_n^{+}(-\beta) = -Q_n^{-}(\beta)$, $X_n^{+} = -X_n^{-}$, что приводит к соотношениям

$$E_{1n}^{\pm} + E_{3n}^{\mp} = 0, \quad E_{2n}^{\pm} + E_{4n}^{\mp} = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4$$

Рассмотрим теперь случай, когда угол раствора области удовлетворяет условию

$\Phi < \pi/2$. Тогда у функции $S(\alpha + \Phi)$ в интеграле (2.1) внутри незаштрихованных полуполос (фиг. 2) появляются дополнительные полюсы, отличные от тех, что описываются формулой (4.7); все они принадлежат семействам (4.6). Существенно, однако, что это не приводит к дополнительным условиям, накладываемым на вычеты трансформанты в этих полюсах. Можно показать, что, если постоянные $C_n^\pm$ подобраны из условий (4.8), то тем самым автоматически обеспечивается обращение в нуль вычетов функции $S(\alpha)$ и в этих, дополнительных, полюсах, появившихся внутри незаштрихованных частей комплексной плоскости α при переходе от случая $\Phi > \pi/2$ к случаю $\Phi < \pi/2$.

Например, пусть $\pi/4 < \Phi < \pi/2$. Тогда кроме полюсов (4.7) запрещенными станут еще два полюса: в точках $\alpha = \alpha_{40}^f$ и $\alpha = \alpha_{80}^f$. Однако оказывается, что в этих точках функции из формулы (3.11) принимают те же значения, что и в точках $\alpha = \alpha_{30}^f$ и $\alpha = \alpha_{70}^f$, а именно

$$\sigma(\alpha_{40}^f, \Phi_0) = \sigma(\alpha_{30}^f, \Phi_0), \quad \sigma(\alpha_{80}^f, \Phi_0) = \sigma(\alpha_{70}^f, \Phi_0)$$

$$\Lambda(\alpha_{40}^f) = \Lambda(\alpha_{30}^f), \quad \Lambda(\alpha_{80}^f) = \Lambda(\alpha_{70}^f)$$

что обеспечивает равенство нулю вычетов $S(\alpha)$ в полюсах α_{40}^f и α_{80}^f , если равны нулю вычеты в полюсах α_{30}^f и α_{70}^f соответственно. Заметим, что равенства для функции $\sigma(\alpha, \Phi_0)$ вытекают из элементарных свойств тригонометрических функций, а равенства для функции $\Lambda(\alpha)$ — из известных свойств функции Малюжинца и функциональных уравнений (3.9), которым она удовлетворяет.

Вычислим, например, значение функции $\Lambda(\alpha)$ в точке $\alpha = \alpha_{80}^f = 3\Phi - \theta_4^-$. Путем замены $\alpha \rightarrow \alpha + 2\Phi$ в первом из уравнений (3.9) получаем выражение

$$\Lambda(\alpha + 3\Phi) = f_+(\alpha + 2\Phi) + \Lambda(-\alpha - \Phi)$$

которое с помощью второго уравнения из той же системы можно записать как

$$\Lambda(\alpha + 3\Phi) = f_+(\alpha + 2\Phi) - f_-(\alpha) + \Lambda(\alpha - \Phi)$$

Подстановка $\alpha = -\theta_4^-$, с учетом нечетности функции $f_-(\alpha)$, а также тождества

$$f_+(2\Phi - \theta_4^-) = 0,$$

которое следует из обращения в нуль одной из функций Малюжинца в функции $\Psi_4^-(3\Phi - \theta_4^-)$ (см. представление (4.3)), приводит к формуле

$$\Lambda(\alpha_{80}^f) = f_-(\theta_4^-) + \Lambda(-\theta_4^- - \Phi)$$

где правая часть есть не что иное как $\Lambda(\alpha_{70}^f)$ в силу второго уравнения системы (3.9). Сходным образом выводится и второе из выписанных выше соотношений для функции $\Lambda(\alpha)$.

Аналогично может быть проверено, что решение задачи, в котором постоянные $C_n^\pm$ выбраны с помощью четырех условий (4.8), остается корректным не только при $\pi/4 < \Phi < \pi/2$, но и в случае $\pi/6 < \Phi < \pi/4$ и т.д. Очевидно, нет необходимости проверять это свойство и дальше, поскольку оно отражает аналитический характер зависимости решения краевой задачи дифракции от параметра Φ : решение, найденное для некоторого ненулевого интервала значений этого параметра (здесь $\pi/2 < \Phi < \pi$) может быть аналитически продолжено и на всю остальную область значений этого параметра. С физической точки зрения, равенство нулю вычетов во всех остальных полюсах (4.6) означает лишь, что эти вычеты описывают всевозможные переотражения относительно сторон рассматриваемой угловой

области пространства некоторых четырех основных волновых процессов, отвечающих вычетам в полюсах (4.7). Так как эти, последние, ввиду условий (4.8) не возбуждаются, то соответственно нет и их переотражений (о переотражениях внутри угловых областей при импедансных краевых условиях см. [16]).

Итак, выполнение условий на бесконечности (1.6) достигается с помощью четырех условий (4.8), которые накладываются на восемь постоянных $C_n^\pm$ ($n = 1, 2, 3, 4$), содержащихся в общем решении задачи. Остальные четыре условия, необходимые для однозначного определения всех постоянных, должны быть получены из контактных условий (1.7).

5. Удовлетворение контактным условиям. Используя общее решение, представленное в разд. 3, вычислим входящие в контактные условия (1.7) значения физических параметров $\xi_\pm(0)$, $\Phi_\pm$, $M_\pm$, $F_\pm$, которые последовательно выражаются через предельные значения величин

$$\frac{d^m}{dr^m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Phi}(r, \pm \Phi) \right), \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

Дифференцирование интеграла (2.1) после перехода к интегрированию по контуру γ_+ дает

$$\frac{d^m}{dr^m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Phi}(r, \pm \Phi) \right) = \frac{(-ik)^{m+1}}{2\pi i} P_0 \times \quad (5.1)$$

$$\times \int_{\gamma_+} \exp(-ikr \cos \alpha) \sin \alpha \cos^m \alpha (S(\alpha \pm \Phi) + S(-\alpha \pm \Phi)) d\alpha, \quad m = 0, 1, 2, 3$$

Предельные значения этих интегралов при $r \rightarrow 0$ определяются поведением подынтегрального выражения на концах контура интегрирования при $\text{Im } \alpha \rightarrow +\infty$ (см. формулу (3.13)).

Чтобы оценить это поведение, воспользуемся функциональными уравнениями (2.5), которым удовлетворяет функция $S(\alpha)$, а запишем

$$S(\alpha \pm \Phi) + S(-\alpha \pm \Phi) = S(\alpha \pm \Phi) \left(1 + \frac{L_\pm(\alpha)}{L_\pm(-\alpha)} \right) - \frac{2 \sin \alpha}{L_\pm(-\alpha)} \sum_{n=1}^4 C_n^\pm \cos^{n-1} \alpha \quad (5.2)$$

При $\text{Im } \alpha \rightarrow +\infty$ символы граничных операторов имеют оценки

$$\frac{1}{L_\pm(\alpha)} = \mp \frac{i}{k^5 \sin \alpha \cos^4 \alpha} (1 + O(\exp(-4 \text{Im } \alpha))) \quad (5.3)$$

Поэтому $1 + L_\pm(\alpha) / L_\pm(-\alpha) = O(\exp(-5 \text{Im } \alpha))$, и первый член в правой части формулы (5.2) не вносит вклада в предельные значения интегралов (5.1), так как ввиду ограниченности функции $S(\alpha)$ при $\text{Im } \alpha = \infty$ и ее аналитичности внутри петли γ_+ при интегрировании этого слагаемого контур γ_+ может быть стянут в точку. Упрощая подынтегральное выражение в оставшемся слагаемом с помощью формулы (5.3), можно получить

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^m}{dr^m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Phi}(r, \pm \Phi) \right) = \mp \frac{(-ik)^{m+1}}{\pi k^5} P_0 \sum_{n=1}^4 C_n^\pm \lim_{r \rightarrow 0} I_{mn}(r), \quad m = 0, 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

$$I_{mn}(r) = \int_{\gamma_+} \exp(-ikr \cos \alpha) \sin \alpha \cos^{n+m-5} \alpha d\alpha = \begin{cases} -\frac{2\pi i (-ikr)^{4-n-m}}{(4-n-m)!}, & 1 \leq m+n \leq 4 \\ 0, & m+n \geq 5 \end{cases}$$

(интегралы $I_{mn}(r)$ вычисляются при помощи замены переменной $t = \cos \alpha$ и теоремы о

вычетах). После перехода к пределу в выражении (5.4) получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^m}{dr^m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \Phi}(r, \pm \Phi) \right) = \pm 2(-i)^m k^{m-4} C_{4-m}^{\pm} P_0, \quad m = 0, 1, 2, 3$$

Таким образом, каждая из постоянных $C_n^{\pm}$ приобретает четкий физический смысл:

$$C_4^{\pm} = -\frac{\omega^2 \rho k^4}{2P_0} \xi_{\pm}(0), \quad C_3^{\pm} = \frac{\omega^2 \rho k^3}{2iP_0} \xi'_{\pm}(0)$$

$$C_2^{\pm} = \pm \frac{\omega^2 \rho k^2}{2D_{\pm} P_0} M_{\pm}, \quad C_1^{\pm} = \frac{\omega^2 \rho k}{2iD_{\pm} P_0} F_{\pm},$$

определяя значения смещений, углов выхода, моментов сил и сил на кромках пластин.

Приведенные соотношения показывают, что контактные условия (1.7) сводятся к линейным алгебраическим уравнениям относительно постоянных $C_n^{\pm}$ ($n = 1, 2, 3, 4$) и в общем случае могут быть записаны как четыре нижние строки матричного уравнения (4.9). Например, для условий (1.10)–(1.13) можно получить: $C_3^{\pm} = 0$, $C_4^{\pm} = 0$ (жесткое защемление); $C_2^{\pm} = 0$, $C_4^{\pm} = 0$ (шарнирное соединение); $C_1^{\pm} = 0$, $C_2^{\pm} = 0$ (свободные концы); $D_+ C_2^+ = D_- C_2^-$, $C_3^+ = -C_3^-$, $C_4^{\pm} = 0$ (жесткий спай). Таким образом, для указанных способов скрепления кромок пластин между собой контактные условия сводятся к очень простым уравнениям для постоянных $C_n^{\pm}$. С помощью этих уравнений исключаются четыре неизвестные постоянные и система (4.9) сводится к системе из четырех линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся четырех постоянных $C_n^{\pm}$. Матричные элементы в этой системе записываются через интегралы (4.10), которые могут быть найдены численно, а в некоторых случаях и аналитически.

После определения всех постоянных $C_n^{\pm}$ интегральная формула (2.1) с трансформантой (3.12) дает искомое решение поставленной задачи, которое будет единственным для заданной падающей волны (1.1), выбранной модели пластин (1.4) и способа их скрепления, зафиксированного в контактных условиях (1.7). Для контактных условий, не противоречащих соотношению (1.9), это решение необходимо должно удовлетворять соотношению взаимности (в смысле симметричности относительно углов падения Φ_0 и наблюдения Φ диаграммы волны, рассеянной на сочленении).

Можно ожидать, что построенное решение окажется эффективным средством в исследованиях дифракции и рассеяния звуковых волн на оболочках сложной формы, находящихся в акустической среде, так как оно требует решения линейной алгебраической системы не выше, чем восьмого порядка, содержит только изученные специальные функции $\psi_{\Phi}(\alpha)$ – функции Малюжинца (см., например, [10, 20]), и записано в виде интеграла Зоммерфельда, для которого разработаны методы исследования как в ближней ($kr < 1$) [23], так и в дальней ($kr > 1$) [10, 11, 16, 17, 24] зонах.

6. Приложение. Условие единственности. Покажем, что задача дифракции, сформулированная в разд. 1, имеет единственное решение при $0 < \arg k < \pi/2$ и вещественных значениях параметров пластин, если выполняется условие (1.8). В процессе вывода будем полагать, что имеют смысл все производные искомого решения, встречающиеся в граничных условиях и уравнении Гельмгольца.

Предположим, что задача имеет еще одно решение $p_1(r, \Phi)$, которое удовлетворяет тем же условиям, что и функция $p(r, \Phi)$. Тогда функция $u(r, \Phi) = p(r, \Phi) - p_1(r, \Phi)$ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.2), краевым условиям (1.3), (1.4), условиям на ребре (1.5), контактным условиям (1.7), а при $r \rightarrow +\infty$ стремиться к нулю, так как поля

геометрической акустики для функций $p(r, \varphi)$ и $p_1(r, \varphi)$, очевидно, должны совпадать. Умножим уравнение Гельмгольца для функции $u(r, \varphi)$ на комплексно-сопряженную функцию $\bar{u}(r, \varphi)$ и проинтегрируем полученное выражение по плоской ограниченной области $S_{\varepsilon R}$, граница которой $C_{\varepsilon R}$ состоит из отрезков, идущих вдоль реальных граничных поверхностей $\varphi = \pm\Phi$, и дуг окружностей малого ε и большого R радиусов с центром в точке $r = 0$. Применяя формулу Грина и отделяя в результате мнимую часть, получаем соотношение

$$\operatorname{Im} k^2 \int_{\varepsilon-\Phi}^{R+\Phi} |u(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi + \operatorname{Im} \oint_{C_{\varepsilon R}} \bar{u}(r, \varphi) \frac{\partial u}{\partial n}(r, \varphi) d\tau = 0 \quad (6.1)$$

где $\partial/\partial n$ обозначает операцию дифференцирования вдоль направления внешней нормали к области $S_{\varepsilon R}$, а $d\tau$ – элемент длины контура $C_{\varepsilon R}$. В формуле (6.1) можно перейти к пределам $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$, так как функция $u(r, \varphi)$ равномерно по угловой координате φ удовлетворяет условиям на ребре и на бесконечности. Предельное соотношение содержит контурные интегралы только вдоль реальных границ $\varphi = \pm\Phi, 0 \leq r < +\infty$, где можно записать $\partial/\partial n = \pm r^{-1} \partial/\partial \varphi$; вводя теперь нормальные компоненты векторов смещения точек пластин

$$\xi_{\pm}(r) = \mp \frac{1}{\omega^2 \rho r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \pm\Phi) \quad (6.2)$$

получаем

$$\frac{\operatorname{Im} k^2}{\omega^2 \rho} \int_0^{+\infty} \int_{-\Phi}^{+\Phi} |u(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} (\bar{u}(r, \Phi) \xi_+(r) + \bar{u}(r, -\Phi) \xi_-(r)) dr \quad (6.3)$$

С помощью краевых условий выразим функции $u(r, \pm\Phi)$ через соответствующие смещения

$$u(r, \pm\Phi) = -D_{\pm} \left(\frac{d^4}{dr^4} - \kappa_{\pm}^4 \right) \xi_{\pm}(r)$$

подставим эти соотношения в формулу (6.3) и выполним дважды интегрирование по частям, что приводит к равенству

$$\frac{\operatorname{Im} k^2}{\omega^2 \rho} \int_0^{+\infty} \int_{-\Phi}^{+\Phi} |u(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi + U_+ + U_- = 0 \quad (6.4)$$

в котором внеинтегральные члены $U_{\pm}$ определяются выражениями в скобках в (1.8). Если кинематические и динамические условия контакта пластин в точке $r = 0$ таковы, что выполнено неравенство (1.8), то из формулы (6.4) следует, что функция $u(r, \varphi)$ может быть только тождественным нулем всюду в области, что и доказывает единственность решения поставленной задачи дифракции.

Соотношение взаимности. Пусть $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ – функция Грина задачи, поставленной в разд. 1, т.е. функция, которая является решением неоднородного уравнения Гельмгольца с дельта-функцией $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ в правой части, удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4), условиям на ребре (1.5), контактными условиями (1.7), а также стремится к нулю на бесконечности, если $\operatorname{Im} k > 0$. Под свойством взаимности решения задачи дифракции обычно понимают симметричность функции Грина относительно перестановки ее аргументов – координат источника и точки наблюдения

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (6.5)$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – две произвольные точки области.

Выберем две функции $v(r, \varphi) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, и $w(r, \varphi) = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ и применим к ним вторую формулу Грина

$$\int_{S_{\varepsilon R}} (v \Delta w - w \Delta v) r dr d\varphi = \int_{C_{\varepsilon R}} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\tau \quad (6.6)$$

в которой вид области $S_{\varepsilon R}$ и ее границы $C_{\varepsilon R}$ были описаны выше, при выводе условия

единственности. Учитывая уравнения Гельмгольца, которым удовлетворяют функции $v(r, \varphi)$ и $w(r, \varphi)$, а также условия на ребре и на бесконечности, из формулы (6.6) получаем

$$G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) - G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = I_+ + I_- \left(I_{\pm} = \pm \int_0^{+\infty} \left(v \frac{\partial w}{\partial \varphi} - w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\pm\Phi} \frac{dr}{r} \right) \quad (6.7)$$

Соотношение (6.5) будет, очевидно, выполнено, если выражение в правой части равенства (6.7) равняется нулю. С помощью краевых условий, которым удовлетворяют функции $v(r, \varphi)$ и $w(r, \varphi)$ при $\varphi = \pm\Phi$, и интегрирования по частям интегралы $I_{\pm}$ можно привести к виду

$$I_{\pm} = \frac{1}{v_{\pm}} \lim_{r \rightarrow 0} (V_{\pm} W_{\pm}''' - V_{\pm}' W_{\pm}'' + V_{\pm}'' W_{\pm}' - V_{\pm}''' W_{\pm})$$

$$\left(V_{\pm} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}(r, \pm\Phi), \quad W_{\pm} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}(r, \pm\Phi) \right)$$

и затем перейти от функций Грина $v(r, \varphi)$, $w(r, \varphi)$ к решениям для плоских волн с помощью предельного перехода

$$p(r, \varphi, \varphi_m) = \lim_{r_m \rightarrow \infty} 4i \frac{G(r, \varphi, r_m, \varphi_m)}{H_0^{(1)}(kr_m)}, \quad m=1, 2,$$

где $H_0^{(1)}(kr_m)$ – функция Ганкеля. В результате соотношение взаимности приводит к условию, которому должны подчиняться решения задач дифракции плоских волн при произвольных значениях углов падения φ_1 и φ_2 . Переходя к компонентам вектора смещений (6.2), получаем формулу (1.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюжинец Г.Д. Точное решение задачи о дифракции плоских звуковых волн на полубесконечной упругой пластине // 4-я Всес. Акуст. конф. Реф. докл. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 45.
2. Малюжинец Г.Д. Дифракция звука и поверхностные волны, распространяющиеся вдоль полубесконечной упругой пластинки // Тр. Акуст. ин-та. 1971. Вып. 15. С. 80–96.
3. Малюжинец Г.Д., Тужилин А.А. Дифракция плоской звуковой волны на тонкой полубесконечной упругой пластине // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1970. Т. 10. № 5. С. 1210–1227.
4. Lamb G.L. Diffraction of a plane sound wave by a semi-infinite thin elastic plate // J. Acoust. Soc. Amer. 1959. V. 31. № 7. P. 929–935.
5. Коузов Д.П. Дифракция плоской гидроакустической волны на границе двух упругих пластин // ПММ. 1963. Т. 27 № 3. С. 541–546.
6. Белинский Б.П., Коузов Д.П., Чельцова В.Д. О дифракции акустических волн на пластинах, сочлененных под прямым углом // ПММ. 1973. Т. 37. № 2. С. 291–299.
7. Вешев В.А., Коузов Д.П. О влиянии среды на колебания пластин, сочлененных под прямым углом // Акуст. журн. 1977. Т. 23. Вып. 3. С. 368–377.
8. Вешев В.А., Коузов Д.П. Об изгибных колебаниях T-образно сочлененных пластин, находящихся в контакте с жидкостью // Акуст. ж. 1980. Т. 26. Вып. 3. С. 347–355.
9. Малюжинец Г.Д. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 6. С. 1099–1102.
10. Малюжинец Г.Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 3. С. 436–439.
11. Тужилин А.А. Дифракция плоской звуковой волны в угловой области, грани которой являются абсолютно твердыми и скользкими и покрыты тонкими упругими пластинами // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1875–1888.
12. Осипов А.В. О двумерных задачах дифракции на клине при граничных условиях высокого порядка // Вест. С.-Пб. ун-та. Сер. 4: Физика, химия. 1993. Вып. 4. С. 81–85.

13. *Osipov A.V.* General solution for a class of diffraction problems // *J. Phys. A.: Math. Gen.* 1994. V. 27. N. 2. P. L27–L32.
14. *Osipov A.V.* On formulation of the high-order boundary conditions for stratified media // *Proc. 3rd Intern. Cong. Air- and Structure-born Sound and Vibration, Montreal, Canada, 1994.* V. 3. P. 1635–1642.
15. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 301 с.
16. *Осипов А.В.* Об асимптотическом представлении акустического поля в узкой угловой области с импедансными границами // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. Вып. 3. С. 516–522.
17. *Осипов А.В.* Преобразование Малюжинца и метод интегралов Зоммерфельда в теории дифракции волн в угловых областях // *Проблемы дифракции и распространения волн.* СПб.: 1993. Вып. 25. С. 148–173.
18. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
19. *Завадский В.Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
20. *Осипов А.В.* Вычисление функции Малюжинца в комплексной области // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 116–121.
21. *Тужилин А.А.* Теория функциональных уравнений Малюжинца. I // *Дифференц. уравнения.* 1970. Т. 6. № 4. С. 692–704.
22. *Malyughinets G.D.* Das Sommerfeldsche Integral und die Lösung von Beugungsaufgaben in Winkelgebieten // *Ann. Phys.* 1960. Bd. 6. S. 107–112.
23. *Осипов А.В.* О дифракции плоской волны в угловой области с импедансными граничными условиями // *Акуст. журн.* 1991. Т. 37. Вып. 4. С. 733–740.
24. *Осипов А.В.* Равномерная асимптотическая формула для вычисления акустического поля вблизи грани импедансного клина // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. Вып. 2. С. 332–337.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
9.VI.1995