

УДК 539.3:534.22

© 1997 г. И.О. Осипов

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТИ И АНОМАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Изучается плоская задача отражения и преломления плоских продольных волн на границе жидкости и твердого анизотропного полупространства с упругими постоянными, удовлетворяющими условию $N = (a - d)b - c^2 < 0$. Выражение решений задачи через обратные кажущиеся скорости волн и однозначное определение на римановой поверхности позволяют провести детальное аналитическое исследование кинематических закономерностей рассматриваемых волновых процессов при различных соотношениях упругих постоянных контактирующих сред. Установлено, что при некоторых углах падения продольные волны возбуждают две преломленных квазипоперечных волны с разными нормальными скоростями и углами преломления. Эта особенность имеет прямую связь с существованием остроугольных кромок на фронтах квазипоперечных волн от точечного источника при условии $N < 0$.

Ранее [1, 2] методом В.И. Смирнова и С.Л. Соболева, впервые примененным для анизотропных сред В.А. Свекло [3], изучена плоская задача отражения и преломления плоских продольных волн на границе жидкости и твердого анизотропного полупространства с четырьмя упругими постоянными, удовлетворяющими условию $N > 0$. В данной работе продолжается изучение этой задачи для аномальных сред, удовлетворяющих условию $N < 0$. В таких средах рассматриваемые волновые процессы подчиняются более сложным закономерностям, изучение которых требует особого подхода.

1. Плоские волны в анизотропных средах. Плоские волны в анизотропной среде с четырьмя упругими постоянными выражаются функциями [2]

$$u_k = u(\Omega_k^+), \quad v_k = v(\Omega_k^+), \quad \Omega_k^\pm = t + \theta x \pm \lambda_k y \quad (1.1)$$

где

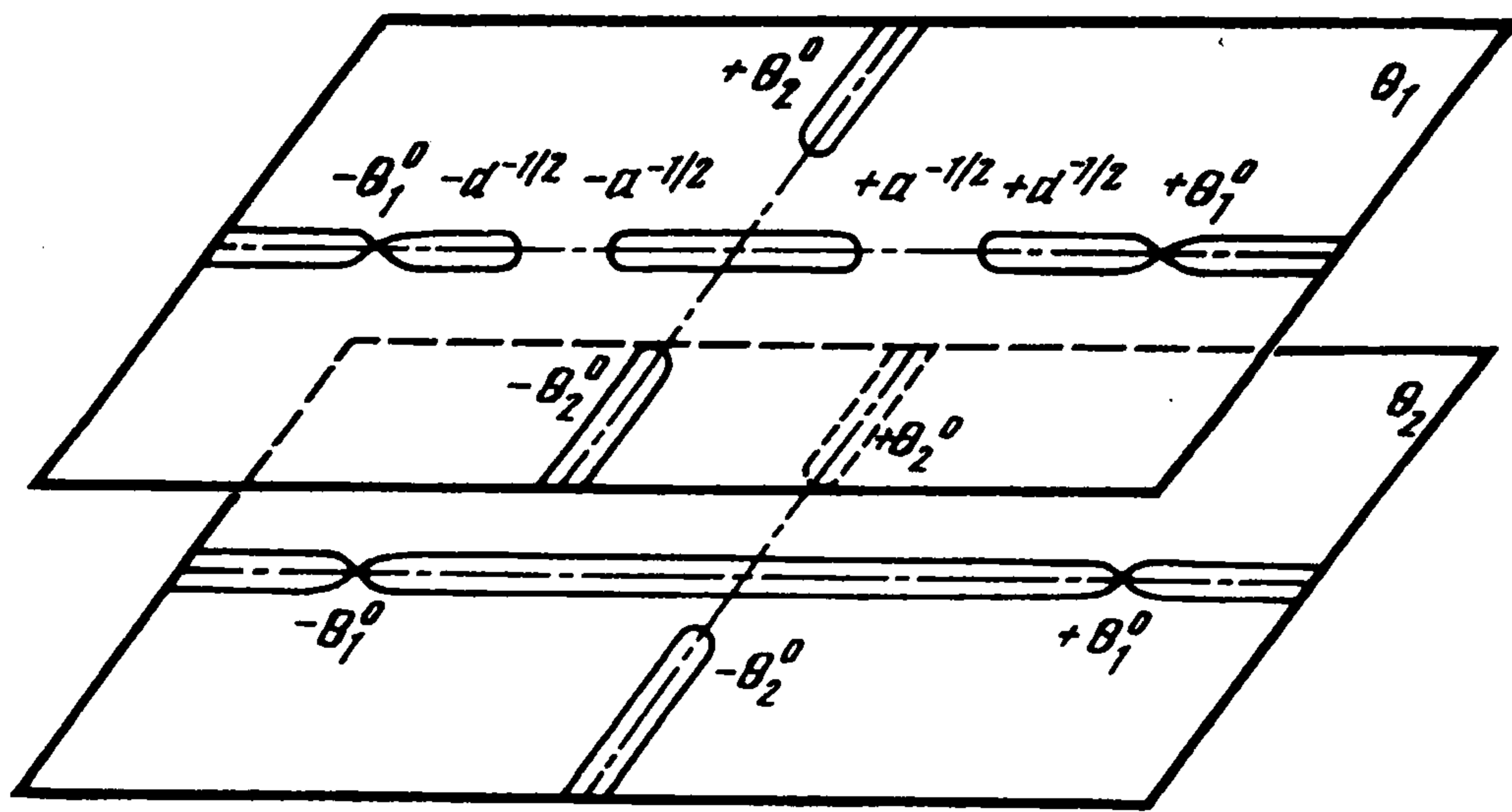
$$\lambda_k = \{H + (-1)^k [H^2 - (a/b)(1/a - \theta^2(1/d - \theta^2))]^{1/2}\}^{1/2} \quad (1.2)$$

$$H = [(b + d) - (ab + d^2 - c^2)\theta^2]/(2bd)$$

Функции (1.1) подчинены условиям

$$\begin{aligned} -u(\Omega_k^+)/ (c\theta\lambda_k) &= v(\Omega_k^+)/p_k = w(\Omega_k^+) \\ p_k &= a\theta^2 + d\lambda_k^2 - 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Под w понимается произвольная непрерывная дважды дифференцируемая функция, если в функции w коэффициенты при переменных величинах вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой-либо области пространства x, y, t — комплексные величины, под w понимается аналитическая функция в этой области.



Фиг. 1

Нормальные скорости b_k и углы α_k , образованные нормалью к фронтам волн с осью y , определяются выражениями

$$b_k = (\theta^2 + \lambda_k^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \theta / \lambda_k \quad (k = 1, 2) \quad (1.4)$$

Функции λ_1 и λ_2 , представленные выражениями (1.2), – ветви алгебраической функции λ , однозначно определенной на римановой поверхности, вид которой зависит от соотношений упругих постоянных.

Точками разветвления для внутренних радикалов (1.2) являются точки [4]

$$\theta_i^0 = \pm \{ [M \pm (4bdc^2 [c^2 - (a-d)(b-d)])^{1/2}] / (K_1 K_2) \}^{1/2} \quad (1.5)$$

$$K_1 = ab - (c-d)^2, \quad K_2 = ab - (c+d)^2$$

$$M = (b+d)[(a-d)(b-d) - c^2] - (a-d)(b-d)d$$

которые в зависимости от соотношений упругих постоянных могут быть комплексными, мнимыми и вещественными.

При условии $N > 0$ точками разветвления для внешних радикалов (1.2) являются точки $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$ при $k = 1$ и точки $\theta_2 = \pm d^{-1/2}$ при $k = 2$. В этом случае риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 соответственно с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$. Плоскости склеены крест-накрест вдоль соответствующих разрезов, соединяющих точки разветвления (1.5). Если точки разветвления – две мнимые, две вещественные, вид римановой поверхности был приведен ранее ([5], фиг. 1).

На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(-d^{-1/2}, +d^{-1/2})$ плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения, функции (1.1) выражают вещественные плоские волны: квазипродольные при $k = 1$, квазипоперечные при $k = 2$, распространяющиеся в любых направлениях. На участках $(\pm a^{-1/2}, \pm\infty)$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm\infty)$ вещественных осей плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения, функции (1.1) выражают комплексные квазипродольные и квазипоперечные волны.

Следовательно, при условии $N > 0$ квазипродольные и квазипоперечные плоские волны выражаются функциями (1.1) при $k = 1$ и $k = 2$, определенными на вещественных осях плоскостей θ_1 и θ_2 . Поэтому при решении поставленной задачи не было необходимости пользоваться римановой поверхностью [1, 2].

Сложнее обстоит дело при условии $N < 0$. Внешний радикал функции λ_1 имеет четыре точки разветвления: $\theta_1 = \pm a^{-1/2}$, $\theta_1 = \pm d^{-1/2}$; внешний радикал функции λ_2 не имеет точек разветвления. Из точек разветвления (1.5) – две вещественные, две

мнимые, причем для вещественных точек выполняется условие $\theta_1^0 > d^{-1/2}$. Функция λ_1 однозначна на плоскости θ_1 с разрезами $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$, $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Функция λ_2 однозначна на плоскости θ_2 с разрезами $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ и $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ вдоль вещественной оси и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ вдоль мнимой оси. Риманова поверхность состоит из плоскостей θ_1 и θ_2 , склеенных крест-накрест вдоль берегов разрезов $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ и $(\pm\theta_2^0, \pm i\infty)$ (фиг. 1).

На берегах разрезов $(-a^{-1/2}, +a^{-1/2})$ и $(\pm d^{-1/2}, \pm\theta_1^0)$ плоскости θ_1 и $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 функции λ_1 и λ_2 принимают вещественные значения, функции (1.1) выражают вещественные волны. На участках $(\pm a^{-1/2}, \pm d^{-1/2})$ плоскости θ_1 функция λ_1 имеет мнимые значения, на участках $(\pm\theta_1^0, \pm\infty)$ берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 имеют комплексные значения; функции (1.1) выражают комплексные волны.

Фиксируем функции λ_1 и λ_2 на плоскостях θ_1 и θ_2 так, чтобы они были положительными при $\theta = i\beta$, где β – достаточно малая положительная величина. Так как оси x и y совпадают с осями упругой симметрии среды, то распространение волн достаточно изучить при положительных вещественных значениях θ .

На участках

$$0 \leq \theta_1 \leq a^{-1/2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \theta_1^0 \quad (1.6)$$

верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 функции λ_1 и λ_2 – положительные, правые части вторых формул (1.4) монотонно возрастают от нуля до значений

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \theta_1^0 / \lambda_2(\theta_1^0) \quad (1.7)$$

Функции (1.1) выражают вещественные квазипродольные и квазипоперечные волны, распространяющиеся с непрерывно возрастающими углами α_1 и α_2 в интервалах

$$0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^0 \quad (\alpha_2^0 < \pi/2) \quad (1.8)$$

Нормальные скорости (1.4) волн на участках (1.6) – непрерывные функции, имеющие на границах участков значения

$$b_1(0) = b^{1/2}, \quad b_1(a^{-1/2}) = a^{1/2}, \quad b_2(0) = d^{1/2}, \quad b_2(\theta_1^0) < d^{1/2} \quad (1.9)$$

Характер изменения скоростей зависит от значений величин [4, 6]

$$N_1 = a - d - c, \quad N_2 = b - d - c, \quad N_3 = (a - d)(b - d) - c^2 \quad (1.10)$$

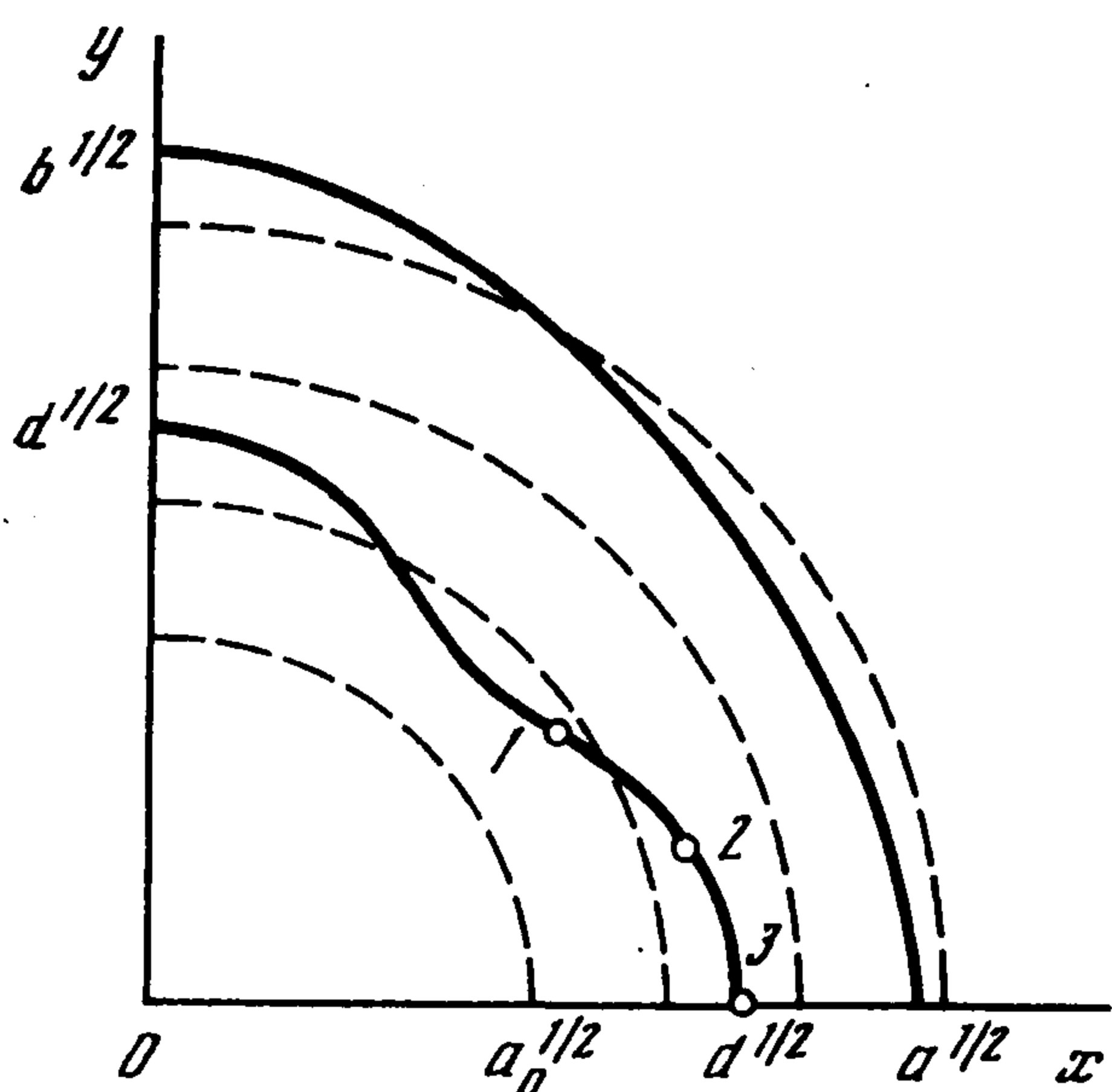
Так как при $N < 0$ имеем $N_1 < 0$, то при $N_2 > 0$ скорость квазипродольной волны на первом участке (1.6) непрерывно убывает и $b > a$. Если $N_2 < 0$, скорость квазипродольной волны внутри этого участка имеет максимум. Скорость квазипоперечной волны внутри второго участка (1.6) имеет минимум, так как $N_3 < 0$ при $N < 0$.

Экстремальные точки и скорости и направления распространения волн с этими скоростями имеют значения

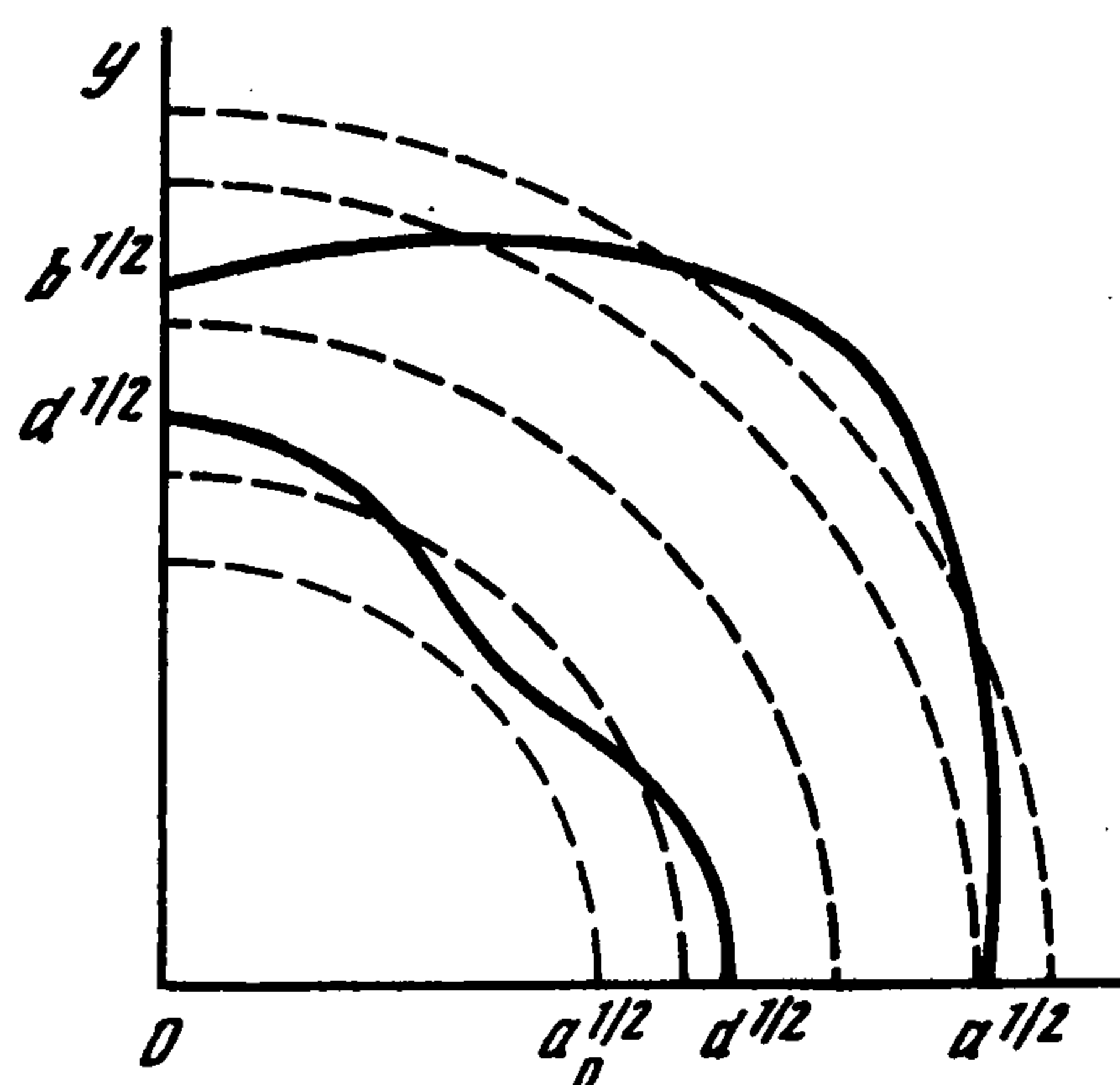
$$\begin{aligned} \theta_1^* &= [(b - n)/(ab - n^2)]^{1/2}, \quad \theta_2^* = [(b + m)/(ab - m^2)]^{1/2} \\ b_1(\theta_1^*) &= [(ab - n^2)/(a + b - 2n)]^{1/2}, \quad b_2(\theta_2^*) = [(ab - m^2)/(a + b + 2m)]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1^* = [(b - n)/(a - n)]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2^* = [(b + m)/(a + m)]^{1/2}$$

$$m = c - d, \quad n = c + d$$



Фиг. 2



Фиг. 3

При обходе точки разветвления θ_1^0 с верхнего берега разреза $(-\theta_1^0, +\theta_1^0)$ плоскости θ_2 римановой поверхности на нижний берег разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 внутренний радикал функции λ_2 изменяет знак с плюса на минус, функция λ_2 принимает значение λ_1 . Решения (1.1)–(1.4), выражающие при $k=2$ квазипоперечные волны, переходят в решения при $k=1$, представляющие собой вещественные плоские волны, определенные на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 . В точке разветвления θ_1^0 эти решения имеют одинаковые значения.

На участке

$$d^{-1/2} \leq \theta_1 \leq \theta_1^0 \quad (1.12)$$

нижнего берега разреза плоскости θ_1 правые части выражений (1.4) при $k=1$ монотонно убывают при значениях на границах

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \infty, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \theta_1^0 / \lambda_1(\theta_1^0) = \theta_1^0 / \lambda_2(\theta_1^0)$$

$$b_1(d^{-1/2}) = d^{1/2}, \quad b_1(\theta_1^0) = b_2(\theta_1^0)$$

Следовательно, функции (1.1)–(1.4) при $k=1$ на участке (1.12) нижнего берега разреза плоскости θ_1 выражают вещественные квазипоперечные волны, распространяющиеся в направлениях

$$\pi/2 \geq \alpha_1 \geq \alpha_1(\theta_1^0) = \alpha_2(\theta_1^0) \quad (1.13)$$

с нормальными скоростями

$$d^{1/2} \geq b_1 \geq b_1(\theta_1^0) = b_2(\theta_1^0) \quad (1.14)$$

Графики изменения нормальных скоростей квазипродольных и квазипоперечных волн от направления распространения изображены на фиг. 2, 3 сплошными линиями, штриховыми линиями показаны возможные характерные значения нормальных скоростей продольных волн в жидкости.

На верхнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 римановой поверхности функция λ_1 принимает отрицательные вещественные значения, функции (1.1) при $k=1$ принимают вид

$$u_1 = u(\Omega_1^-), \quad v_1 = v(\Omega_1^-) \quad (1.15)$$

$$u(\Omega_1^-)/(c\theta\lambda_1) = v(\Omega_1^-)/p_1 = w(\Omega_1^-)$$

где λ_1 имеет значение (1.2), и выражают квазипоперечные волны. Квазипоперечные волны (1.1) при $k=1$, определенные на нижнем берегу разреза $(+d^{-1/2}, +\theta_1^0)$ плоскости θ_1 , и (1.15) симметричны относительно x .

Направление распространения упругих колебаний связано с движением энергии в деформируемой среде и определяется вектором потока энергии, совпадающим с вектором лучевой (групповой) скорости [7]. Повторяя рассуждения, приведенные ранее [8], выражаем проекции векторов потоков энергии на координатные оси для рассматриваемого случая

$$S_x = -\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + (c-d) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial v}{\partial t} \left[d \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (1.16)$$

$$S_y = -\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[d \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial v}{\partial t} \left[(c-d) \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right\}$$

Учитывая условия (1.3), выражаем квазипродольные и квазипоперечные волны (1.1), определенные на участках $(0, +a^{-1/2})$ и $(0, +\theta_1^0)$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 , функциями

$$u_k = -c\theta\lambda_k w(\Omega_k^+), \quad v_k = p_k w(\Omega_k^+) \quad (1.17)$$

Подставляя значения (1.17) в выражения (1.16), получим

$$S_{xk} = -\rho\theta p_k N_k [w'(\Omega_k^+)]^2, \quad S_{yk} = -\rho\lambda_k p_k M_k [w'(\Omega_k^+)]^2 \quad (1.18)$$

$$N_k = 2ad\theta^2 + (ab + d^2 - c^2)\lambda_k^2 - (a+d)$$

$$M_k = (ab + d^2 - c^2)\theta^2 + 2bd\lambda_k^2 - (b+d)$$

Так как на участке $(0, a^{-1/2})$ $\lambda_1 > 0$, $p_1 < 0$, $M_1 < 0$, а на участке $(0, \theta_1^0)$ $\lambda_2 > 0$, $p_2 > 0$, $M_2 > 0$, то проекции векторов потоков энергии на ось ординат удовлетворяют условиям

$$S_{yk} = -\rho\lambda_k p_k M_k [w'(\Omega_k^+)]^2 < 0 \quad (1.19)$$

при $k=1$ и $k=2$ на участках $(0, a^{-1/2})$ и $(0, \theta_1^0)$.

Аналогично определяются компоненты вектора потока энергии квазипоперечных волн (1.15), определенных на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхнего берега разреза плоскости θ_1 ,

$$S_{x1} = -\rho\theta p_1 N_1 [w'(\Omega_1^-)]^2, \quad S_{y1} = \rho\lambda_1 p_1 M_1 [w'(\Omega_1^-)]^2 \quad (1.20)$$

где N_1 и M_1 — значения (1.18) при $k=1$. Так как на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ $\lambda_1 > 0$, $p_1 > 0$, $M_1 < 0$, то проекция вектора потока энергии волн (1.15) на ось ординат удовлетворяет условию

$$S_{y1} = \rho\lambda_1 p_1 M_1 [w'(\Omega_1^-)]^2 < 0 \quad (1.21)$$

Из условий (1.19) и (1.21) следует, что проекции векторов потоков энергии и лучевых скоростей волн (1.1) и (1.15) на рассмотренных участках их определения имеют отрицательные значения.

В дальнейшем при решении поставленной задачи преломленные квазипродольные и квазипоперечные волны выражаются с помощью функций (1.1) и (1.15), обеспечивающих отток энергии от границы раздела сред $y = 0$ вглубь анизотропной среды $y < 0$.

2. Отражение и преломление продольных волн. Из жидкости $y > 0$ падает на границу раздела $y = 0$ с анизотропным полупространством плоская продольная волна [2]

$$u_0 = u(\Omega_0^+), \quad v_0 = v(\Omega_0^+); \quad \lambda_0 = (1/a_0 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

Нормальная скорость и углы падения волны определяются выражениями

$$b_0 = a_0^{1/2} = (\mu_0/\rho_0)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = \theta/\lambda_0 \quad (2.2)$$

В интервале

$$0 \leq \theta \leq a_0^{-1/2} \quad (2.3)$$

функции (2.1) выражают вещественную волну с углами падения

$$0 \leq \alpha_0 \leq \Pi/2 \quad (2.4)$$

Качественная картина процесса отражения и преломления зависит от соотношений упругих постоянных контактирующих сред и характера изменения нормальных скоростей от направления движения волн в анизотропной среде, вызывая многообразие различных комбинаций в распределении скоростей и направлений движения вторичных волн и в возбуждении комплексных волн в зависимости от углов падения первичных волн. Изучение этих вопросов имеет определенный теоретический и практический интерес и сводится к рассмотрению трех основных случаев.

Случай 1. Выполняется условие

$$a_0 > a > d, \text{ т.е. } a_0^{-1/2} < a^{-1/2} < d^{-1/2} \quad (2.5)$$

Так как при (2.5) правые границы участков (1.6) на верхних берегах разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1) удовлетворяют условию $a_0^{-1/2} < a^{-1/2} < \theta_1^0$, то на участке (2.3) преломленные квазипродольная и квазипоперечная волны будут выражаться функциями (1.1) при $k = 1$ и $k = 2$ соответственно.

Отраженная продольная и преломленные квазипродольная и квазипоперечная волны представляют собой вещественные волны и имеют выражения [2]:

$$\begin{aligned} u_{00} &= (r_1/R)u(\Omega_0^-), \quad v_{00} = -(r_1/R)v(\Omega_0^-) \\ u_{01} &= -(\lambda_1 c r_2/R)u(\Omega_1^+), \quad v_{01} = (p_1 r_2/(\lambda_0 R))v(\Omega_1^+) \\ u_{02} &= -(\lambda_2 c r_3/R)u(\Omega_2^+), \quad v_{02} = (p_2 r_3/(\lambda_0 R))v(\Omega_2^+) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= c(a/b)^{1/2}(\lambda_1 - \lambda_2)\{(\rho/\rho_0)[(ab)^{1/2}\xi_a + \\ &+ (c-d)^2\theta^2\xi_d + ab\xi_a^2\xi_d]\lambda_0 - (ab)^{1/2}(\lambda_1 + \lambda_2)\xi_a\}\xi_a \\ r_2 &= 2[a\xi_a^2 + (c-d)\lambda_2^2], \quad r_3 = -2[a\xi_a^2 + (c-d)\lambda_1^2] \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$R = c(a/b)^{1/2}(\lambda_1 - \lambda_2)\{(\rho/\rho_0)[(ab)^{1/2}\xi_a + (c-d)^2\theta^2\xi_d + ab\xi_a^2\xi_d]\lambda_0 + (ab)^{1/2}(\lambda_1 + \lambda_2)\xi_a\}\xi_a$$

$$\xi_a = (1/a - \theta^2)^{1/2}, \quad \xi_d = (1/d - \theta^2)^{1/2}$$

$$(p_k = a\theta^2 + d\lambda_k - 1, \quad k = 1, 2)$$

Нормальные скорости отраженных и преломленных волн и углы отражения и преломления определяются формулами (2.2) и (1.4) и удовлетворяют закону синусов

$$\sin \alpha_0/b_0 = \sin \alpha_{00}/b_{00} = \sin \alpha_{01}/b_{01} = \sin \alpha_{02}/b_{02} = \theta \quad (2.8)$$

Функции (2.6) выражают вещественные волны при углах падения (2.4) продольной волны (2.1), определенной в интервале (2.3). При возрастании угла падения продольной волны углы отражения и преломления волн (2.6) непрерывно возрастают независимо от характера изменения нормальных скоростей от направления движения, так как на участках (2.3) и (1.6) правые части вторых выражений (2.2) и (1.7) непрерывно возрастают.

Рассмотрим распределение скоростей и направлений движения первичных и вторичных волн в зависимости от угла падения продольной волны при выполнении условия (2.5).

Если $a_0^{1/2} > \max b_1$, то из фиг. 2, 3 и закона синусов (2.8) следует, что при любых углах падения продольной волны, отвечающих интервалу (2.3), скорости и направления движения удовлетворяют условиям

$$b_0 = b_{00} > b_{01} > b_{02}, \quad \alpha_0 = \alpha_{00} > \alpha_{01} > \alpha_{02} \quad (2.9)$$

Если скорость квазипродольной волны имеет экстремальные значения на границах первого участка (1.6) (фиг. 2), то при $N < 0$ имеем $b > a$. В этом случае при выполнении условия

$$\max b_1 = b^{1/2} > a_0^{1/2} > a^{1/2} \quad (2.10)$$

в некоторой точке θ_{11} на участке $(0, a^{-1/2})$ скорость квазипродольной волны равна скорости продольной волны.

Если точка θ_{11} принадлежит участку $(0, a_0^{-1/2})$, то при углах падения продольной волны, определенных на участке $(0, \theta_{11})$, выполняются условия

$$b_{01} > b_0 = b_{00} > b_{02}, \quad \alpha_{01} > \alpha_0 = \alpha_{00} > \alpha_{02} \quad (2.11)$$

на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.9). При $\theta_{11} > a_0^{-1/2}$ на участке $(0, a_0^{-1/2})$ имеют место условия (2.11).

Если скорость b_1 внутри первого участка (1.6) имеет наибольшее значение (1.11), а наименьшее значение на левой границе участка (фиг. 3), то при (2.5) может иметь место условие

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > a_0^{1/2} > a^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2} \quad (2.12)$$

На участке $(0, \theta_1^*)$ скорость b_1 непрерывно возрастает, на участке $(\theta_1^*, a^{-1/2})$ непрерывно убывает. В точках θ_{11} и θ_{12} , принадлежащих участкам $(0, \theta_1^*)$ и $(\theta_1^*, a^{-1/2})$, скорость $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$, причем правая граница участка (2.3) находится на участке $(\theta_{12}, a^{-1/2})$.

Следовательно, при углах падения продольной волны, определенных в (2.3), на участке $(0, \theta_{11})$ выполняются условия (2.9); на участке $(\theta_{11}, \theta_{12})$ – условия (2.11); на участке $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.9). Если $\theta_{12} > a_0^{-1/2}$, то на участке $(0, \theta_{11})$ выполняются условия (2.9), на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.11).

Если характер изменения нормальных скоростей отличается от графика, изображенного на фиг. 3, только тем, что $b^{1/2} > a^{1/2}$, то при (2.5) могут выполняться ус-

ЛОВИЯ

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > a_0^{1/2} > b^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (2.13)$$

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > b^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = a^{1/2} \quad (2.14)$$

В этом случае при (2.13) на участках $(0, \theta_{11})$ и $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ выполняются условия (2.9), на участке $(\theta_{11}, \theta_{12})$ – условия (2.11). Если $\theta_{12} > a_0^{-1/2}$, на участке $(0, \theta_{11})$ выполняются условия (2.9), на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.11).

При условии (2.14) $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$ в точке θ_{11} на участке $(\theta_1^*, a^{-1/2})$, правая граница интервала (2.3) принадлежит участку $(\theta_{11}, a^{-1/2})$. Углам падения продольной волны в интервале (2.3) на участке $(0, \theta_{11})$ отвечают условия (2.11), на участке $(\theta_{11}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.9). При $\theta_{11} > a_0^{-1/2}$ на участке (2.3) выполняются условия (2.11).

Случай 2. При условии

$$a > a_0 > d, \quad \text{т.е.} \quad a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < d^{-1/2} \quad (2.15)$$

правые границы участков (1.6) на верхних берегах разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1) удовлетворяют условию

$$a^{-1/2} < a_0^{-1/2} < \theta_1^\circ$$

В интервале (2.3) определения падающей продольной волны (2.1) квазипродольная и квазипоперечная волны выражаются функциями (1.1) при $k = 1$ и $k = 2$ соответственно.

На участке $(0, a^{-1/2})$ интервала (2.3) функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения. Решение задачи выражается функциями (2.1) и (2.6), представляющими собой вещественные волны.

Если $b > a$ (фиг. 2, 3), на участке $(0, a^{-1/2})$ интервала (2.3) скорости и направления движения волн (2.1) и (2.6) удовлетворяют условиям (2.11).

При $b < a$ (фиг. 3) может выполняться условие

$$\max b_1 = b_1(\theta_1^*) > a^{1/2} > a_0^{1/2} > \min b_1 = b^{1/2}$$

Точка θ_{11} , в которой $b_1(\theta) = a_0^{1/2}$, принадлежит участку $(0, a^{-1/2})$. На участке $(0, \theta_{11})$ для скоростей и направлений движения волн выполняются условия (2.9), на участке $(\theta_{11}, a^{-1/2})$ – условия (2.11).

При условии

$$\min b_1 > a_0^{1/2} > d^{1/2}$$

(фиг. 2, 3) на участке $(0, a^{-1/2})$ выполняются условия (2.11).

На участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ интервала (2.3) функция λ_1 принимает мнимые значения. Решение задачи выражается функциями комплексного переменного [2]

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{Re}[u_1(\Omega_0^+)], \quad v_0 = \text{Re}[v_1(\Omega_0^+)] \\ u_{00} &= \text{Re}[(r_1^* / R^*)u_1(\Omega_0^-)], \quad v_{00} = \text{Re}[-(r_1^* / R)v_1(\Omega_0^-)] \\ u_{01} &= \text{Re}[(i\lambda_1^* cr_2^* / R^*)u_1(\Omega_1^*)], \quad v_{01} = \text{Re}[(p_1 r_2^* / (\lambda_0 R^*))v_1(\Omega_1^*)] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$u_{02} = \text{Re}[-(\lambda_2 c r_3^* / R^*) u_1(\Omega_2^+)], \quad v_{02} = \text{Re}[(p_2 r_3^* / (\lambda_0 R^*)) v_1(\Omega_2^+)]$$

$$\Omega_1^* = t + \theta x - i \lambda_1^* y$$

Величины r_i^* и R^* определяются выражениями (2.7) при

$$\xi_a = -i(\theta^2 - 1/a)^{1/2}, \quad \lambda_1 = -i \lambda_1^*$$

$$\lambda_1^* = \{-H + [H^2 - (1/a - \theta^2)(1/d - \theta^2)(a/b)]^{1/2}\}^{1/2} \quad (2.17)$$

Функции u_1 и v_1 – регулярные функции в верхней полуплоскости комплексного переменного. Преломленная квазипродольная волна – комплексная волна с мнимой фазовой скоростью в направлении оси y , остальные волны – вещественные.

Для скоростей и направлений движения вещественных волн, определенных на участке $(a^{-1/2}, a_0^{-1/2})$, выполняются условия

$$b_0 = b_{00} > b_{02}, \quad \alpha_0 = \alpha_{00} > \alpha_{02} \quad (2.18)$$

Случай 3. Пусть выполняется условие

$$a > d > a_0, \quad \text{т.е.} \quad a^{-1/2} < d^{-1/2} < a_0^{-1/2} \quad (2.19)$$

На участках (1.6) верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1) функции (1.1) при $k = 1$ и $k = 2$ выражают квазипродольные и квазипоперечные волны, распространяющиеся по направлениям (1.8). На участке (1.12) верхнего берега разреза плоскости θ_1 функция (1.1) при $k = 1$ принимает значение (1.15) и выражает квазипоперечные волны, распространяющиеся по направлениям (1.13).

Следовательно, падающая продольная волна (2.1), определенная на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$, возбуждает две преломленных квазипоперечных волны.

На участке $(0, a^{-1/2})$ интервала $(0, a_0^{-1/2})$ решение задачи выражается вещественными функциями (2.1) и (2.6). Преломленные волны представляют собой квазипродольные и квазипоперечные волны.

На участке $(a^{-1/2}, d^{-1/2})$ интервала $(0, a_0^{-1/2})$ решение задачи выражается функциями комплексного переменного (2.16). Преломленная квазипродольная волна – комплексная волна, остальные волны – вещественные.

При переходе на участки $(d^{-1/2}, \theta_1^0)$ верхних берегов разрезов плоскостей θ_1 и θ_2 римановой поверхности функции (2.16) принимают вещественные значения. Функции u_{01} и v_{01} становятся вещественными и выражают квазипоперечную преломленную волну.

На участках $(d^{-1/2}, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} \leq \theta_1^0$ решение задачи выражается вещественными функциями

$$u_0 = u(\Omega_0^+), \quad v_0 = v(\Omega_0^+)$$

$$u_{00} = (r_1^* / R^*) u(\Omega_0^-), \quad v_{00} = -(r_1^* / R^*) v(\Omega_1^-) \quad (2.20)$$

$$u_{01} = (c r_2^* \lambda_1 / R^*) u(\Omega_1^-), \quad v_{01} = (p_1 r_2^* / (\lambda_0 R^*)) v(\Omega_1^-)$$

$$u_{02} = -(c r_3^* \lambda_2 / R^*) u(\Omega_2^+), \quad v_{02} = (p_2 r_3^* / (\lambda_0 R^*)) v(\Omega_2^+)$$

Величины r_i^* и R^* определяются выражениями (2.7) при замене λ_1 на $-\lambda_1$ и

$$\xi_a = -i(\theta^2 - 1/a)^{1/2}, \quad \xi_d = -i(\theta^2 - 1/d)^{1/2}$$

и имеют вещественные значения.

В этом случае функции u_{0k} и v_{0k} ($k = 1, 2$) выражают вещественные преломленные квазипоперечные волны, имеющие разные нормальные скорости и углы преломления. Нормальные скорости и углы входа и выхода волн определяются выражениями (2.2) и (2.3), закон синусов (2.8) выполняется. Согласно (1.19) и (1.21) принцип излучения выполнен, преломленные волны обеспечивают отток энергии от границы раздела $y = 0$ вглубь анизотропной среды $y < 0$.

При $a_0^{-1/2} > \theta_1^\circ$ на участке $(\theta_1^\circ, a_0^{-1/2})$ углы падения продольной волны (2.1) превышают критический угол по отношению к преломленным квазипоперечным волнам, функции λ_1 и λ_2 принимают комплексные значения. Решение задачи выражается функциями комплексного переменного

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{Re}[u_1(\Omega_0^+)], \quad v_0 = \text{Re}[v_1(\Omega_0^+)] \\ u_{00} &= \text{Re}[(\tilde{r}_1 / \tilde{R})u_1(\Omega_0^-)], \quad v_{00} = \text{Re}[-(\tilde{r}_1 / \tilde{R})v_1(\Omega_0^-)] \\ u_{01} &= \text{Re}[(\tilde{\lambda}_1 c \tilde{r}_2 / \tilde{R})u_1(\tilde{\Omega}_1^-)], \quad v_{01} = \text{Re}[(\tilde{p}_1 \tilde{r}_2 / (\lambda_0 \tilde{R}))v_1(\tilde{\Omega}_1^-)] \\ u_{02} &= \text{Re}[-(\tilde{\lambda}_2 c \tilde{r}_3 / \tilde{R})u_1(\tilde{\Omega}_2^+)], \quad v_{02} = \text{Re}[(\tilde{p}_2 \tilde{r}_3 / (\lambda_0 \tilde{R}))v_1(\tilde{\Omega}_2^+)] \\ \tilde{\Omega}_k^\pm &= t + \theta x \pm \tilde{\lambda}_k y \end{aligned} \quad (2.21)$$

Величины $\tilde{p}_k$, $\tilde{r}_i$ и $\tilde{R}$ определяются выражениями (2.7) при

$$\begin{aligned} \lambda_k &= (-1)^k \tilde{\lambda}_k \\ \tilde{\lambda}_k &= \{H - (-1)^k i[(\theta^2 - 1/a)(\theta^2 - 1/d)(a/b) - H^2]^{1/2}\}^{1/2} \\ \xi_a &= -i(\theta^2 - 1/a)^{1/2}, \quad \xi_d = -i(\theta^2 - 1/d)^{1/2} \end{aligned}$$

Квазипоперечные преломленные волны u_{0k} , v_{0k} ($k = 1, 2$) – комплексные волны с комплексными фазовыми скоростями в направлении оси y .

Изучим распределение скоростей и направлений движения первичных и вторичных волн на участке $(0, a_0^{-1/2})$ при выполнении условия (2.19).

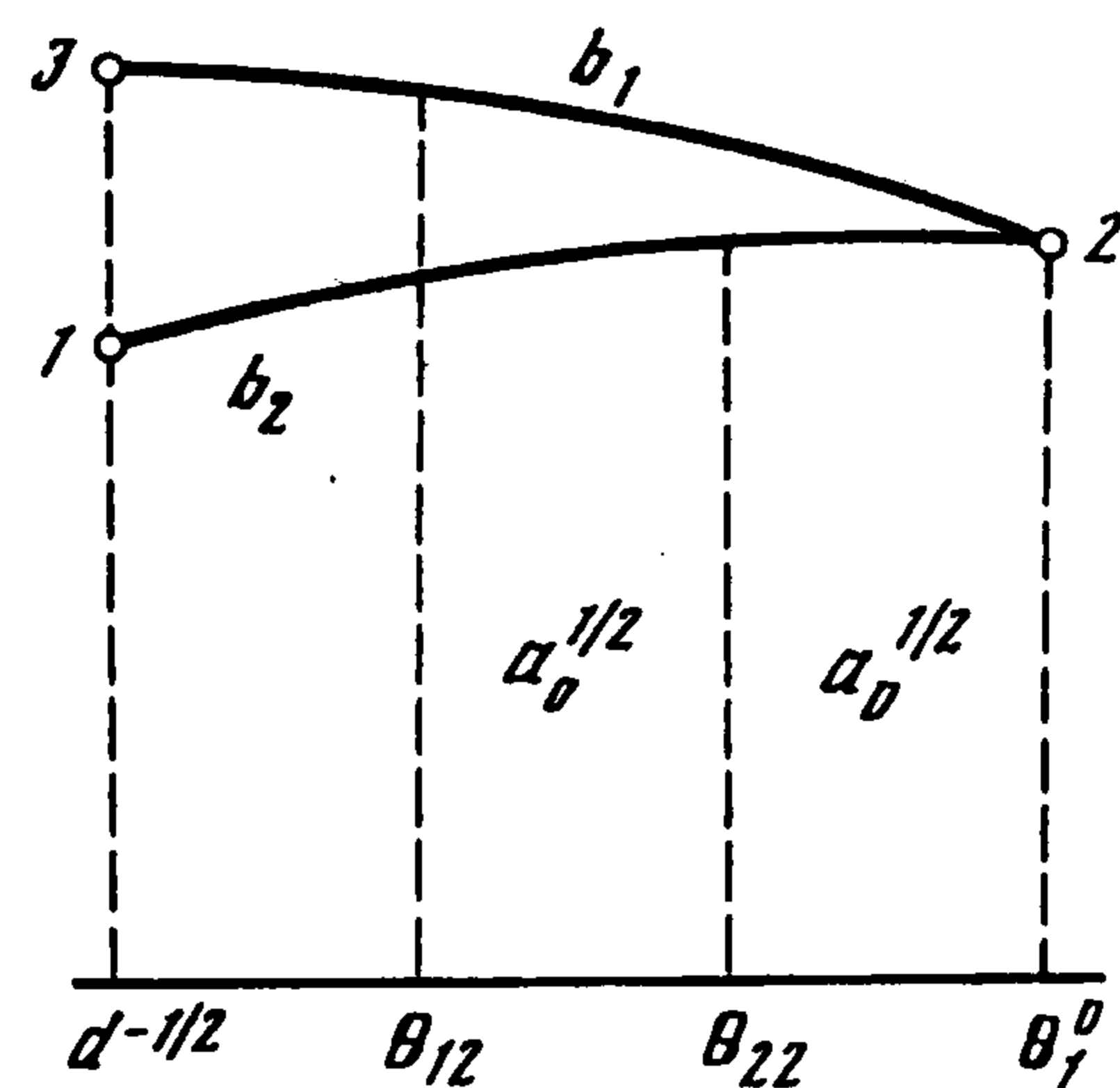
На графике изменения нормальных скоростей b_1 и b_2 от направлений распространения квазипоперечных волн (фиг. 2) значения этих скоростей, определенных на границах участков $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ на плоскостях θ_1 и θ_2 римановой поверхности (фиг. 1), отмечены точками: 1 – скорость $b_2(d^{-1/2})$, 2 – скорости $b_2(\theta_1^\circ) = b_1(\theta_1^\circ)$, 3 – скорость $b_1(d^{-1/2}) = d^{1/2}$.

Графики изменения этих скоростей в зависимости от значений θ на участках $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ изображены на фиг. 4. На этом участке скорость b_2 непрерывно возрастает, скорость b_1 непрерывно убывает, при $\theta = \theta_1^\circ$ они равны.

Из фиг. 2–4 следует, что при условии

$$b_1(d^{-1/2}) = d^{1/2} > a_0^{1/2} > b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ)$$

скорости преломленных квазипоперечных волн равны скорости продольной волны в точках θ_{21} и θ_{12} , определяемых условиями $b_2(\theta_{21}) = a_0^{1/2}$ и $b_1(\theta_{12}) = a_0^{1/2}$, при этом могут иметь место условия $a_0^{-1/2} < \theta_1^\circ$ или $a_0^{-1/2} > \theta_1^\circ$.



Фиг. 4

В этом случае при углах падения продольной волны, определенных в интервале $(0, a_0^{-1/2})$ для скоростей и направлений движения первичных и вторичных волн выполняются условия: на участке $(0, \theta_{21})$ – условия

$$b_{01} > b_{02} > b_0 = b_{00}, \quad \alpha_{01} > \alpha_{02} > \alpha_0 = \alpha_{00} \quad (2.22)$$

на участке $(\theta_{21}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.11), в которых b_{01} – скорости преломленных квазипродольных волн; на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (2.18); на участке $(d^{-1/2}, \theta_{12})$ – условия (2.11), на участках $(\theta_{12}, a_0^{-1/2})$ при $a_0^{-1/2} < \theta_1^\circ$ и $(\theta_{12}, \theta_1^\circ)$ при $a_0^{-1/2} > \theta_1^\circ$ – условия (2.9), в которых b_{01} – скорости преломленных квазипоперечных волн.

При условии

$$b_1(\theta_1^\circ) = b_2(\theta_1^\circ) > a_0^{1/2} > b_2(d^{-1/2})$$

скорости преломленных квазипоперечных волн равны скорости продольной волны в точках θ_{21} и θ_{22} , определяемых уравнением $b_2(\theta) = a_0^{1/2}$, причем имеет место условие $a_0^{-1/2} > \theta_1^\circ$. Для скоростей и направлений движения первичных и вторичных волн в интервале $(0, a_0^{-1/2})$ выполняются условия: на участке $(0, \theta_{21})$ – условия (2.22), на участке $(\theta_{21}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.11), где b_{01} – скорости преломленных квазипродольных волн; на участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ – условия (2.18); на участке $(d^{-1/2}, \theta_{22})$ – условия (2.11), на участке $(\theta_{22}, \theta_1^\circ)$ – условия (2.22), где b_{01} – скорости преломленных квазипоперечных волн.

При условии

$$b_2(d^{-1/2}) > a_0^{1/2} > b_2(\theta_2^*) = \min b_2 \quad (2.23)$$

точки θ_{21} и θ_{22} принадлежат участкам $(0, \theta_2^*)$ и $(\theta_2^*, d^{-1/2})$. Если $\theta_{22} < a_0^{-1/2}$, на участках $(0, \theta_{21})$ и $(\theta_{22}, a_0^{-1/2})$ выполняются условия (2.22), на участке $(\theta_{21}, \theta_{22})$ – условия (2.11). На участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ имеют место условия

$$b_{02} > b_0 = b_{00}, \quad \alpha_{02} > \alpha_0 = \alpha_{00} \quad (2.24)$$

При $\theta_{22} > a_0^{-1/2}$ на участке $(0, \theta_{21})$ выполняются условия (2.22), на участке $(\theta_{21}, a_0^{-1/2})$ – условия (2.11). Здесь всюду b_{01} – скорость преломленной квазипродольной волны.

В интервале $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ для вещественных волн на участке $(a_0^{-1/2}, \theta_{22})$ выполняются условия (2.18), на участке $(\theta_{22}, d^{-1/2})$ – условия (2.24).

При условии (2.23) на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ выполняются условия (2.22), здесь b_{01} – скорость преломленной квазипоперечной волны.

При выполнении условия

$$\min b_2 = b_2(\theta_2^*) > a_0^{1/2}$$

на участках $(0, a_0^{-1/2})$ и $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ выполняются условия (2.22). Скорость b_{01} на участке $(0, a_0^{-1/2})$ – скорость преломленной квазипродольной волны, на участке $(d^{-1/2}, \theta_1^\circ)$ – скорость преломленной квазипоперечной волны. На участке $(a_0^{-1/2}, d^{-1/2})$ для вещественных волн выполняются условия (2.24).

В заключение отметим, что задача отражения и преломления продольных волн на границе жидкости и анизотропной среды, удовлетворяющей условию $N < 0$, получила полное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов И.О.* Отражение и преломление плоских упругих волн на границе жидкости и твердого анизотропного тела // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1961. № 12. С. 1768–1783.
2. *Осипов И.О.* К отражению и преломлению плоских продольных волн на границе жидкости и твердого анизотропного полупространства // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 4. С. 88–96.
3. *Свекло В.А.* Упругие колебания анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук. 1949. Вып. 17. С. 28–71.
4. *Осипов И.О.* К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 548–555.
5. *Осипов И.О.* О волновых полях и остроугольных кромках на волновых фронтах в анизотропной среде от точечного источника // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 927–934.
6. *Осипов И.О.* Характер изменения скоростей распространения упругих волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 1. С. 3–10.
7. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
8. *Осипов И.О.* Движение сейсмической энергии в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 2. С. 181–185.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
10.XI.1995