

УДК 539.3:534.231.1

© 1997 г. И.В. Андронов, Б.П. Белинский

РАССЕЯНИЕ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УЗКОМ ВЫРЕЗЕ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассматривается рассеяние волн на покрывающей акустическое полупространство бесконечной упругой пластине с трещиной, представляющей собой бесконечно длинный вырез конечной ширины с параллельными краями. Рассеянное поле выражается через решение интегро-алгебраической системы уравнений на трещине. Логарифмическая особенность ядра позволяет использовать для численного анализа метод Галеркина с базисом, содержащим полиномы Чебышева первого рода. Особое внимание уделяется асимптотическому исследованию диаграммы рассеяния и амплитуд поверхностных волн по малой ширине трещины и малой толщине пластины. Сравнение с известной моделью точечной трещины позволяет указать область параметров задачи, где точечная модель применима.

Ранее [1, 2] было рассмотрено рассеяние акустических волн на упругой пластине, ослабленной одной или несколькими точечными трещинами. Рассеяние на пластине, подкрепленной точечными ребрами, рассматривалось многими авторами. Была получена [3] явная форма решения и проведен численный анализ эффективного сечения рассеяния. Обзор работ зарубежных авторов, посвященных низкочастотному рассеянию на пластинах с неоднородностями, приведен в [4]. Более сложные задачи рассеяния сводятся к интегральным уравнениям [5], которые затем могут быть исследованы асимптотически.

Ко всем моделям пластин с точечными неоднородностями может быть адресован вопрос об условиях их применимости. Анализ возможности замены реальных неоднородностей точечными моделями представляется существенным. Была исследована [6] задача рассеяния на выступающем ребре малой высоты и для модели точечного ребра найдены условия применимости.

Ниже установлено, что некоторые особенности рассеянного на узкой трещине поля не воспроизводятся в точечной модели.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из однородного акустического полупространства $\{y > 0\}$, ограниченного тонкой упругой пластиной $\{|x| > a, y = 0\}$ с трещиной $\{|x| < a\}$. Поле в системе описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad y > 0 \quad (1.1)$$

Зависимость от времени предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$. Колебания пластины описываются моделью Кирхгофа [7]

$$\left(D \frac{d^4}{dx^4} - \rho \omega^2 h \right) \xi + U = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a; \quad \xi = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \sigma^2)} \quad (1.2)$$

Здесь ξ – изгибное смещение пластины, D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, ρ и ρ_0 – плотности пластины и акустической среды.

Контактные условия на краях трещины выражают отсутствие перерезывающих сил и изгибающих моментов и имеют вид

$$\frac{d^n \xi}{dx^n}(\pm a) = 0, \quad n = 2, 3 \quad (1.3)$$

На трещине выполняется условие Дирихле

$$U = 0, \quad y = 0, \quad |x| < a \quad (1.4)$$

В точках $\{x = \pm a, y = 0\}$ ставятся условия Майкснера, что гарантирует конечность энергии в акустической среде.

Волновое поле возбуждается некоторой пространственной волной, падающей из полупространства, или поверхностной волной, набегающей вдоль пластины из бесконечности. Поле U^s , которое возникало бы при отсутствии трещины, может быть легко получено. В случае падения плоской волны

$$U^i = \exp(ik(x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0)) \quad (1.5)$$

оно состоит из падающей и отраженной волн

$$U^s = U^i + R(\varphi_0) \exp(ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)) \quad (1.6)$$

$$R(\varphi_0) = -\frac{\overline{L(\varphi_0)}}{L(\varphi_0)}, \quad L(\varphi_0) = ik \sin \varphi_0 (k^4 \cos^4 \varphi_0 - k_0^4) + \nu, \quad k_0^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}, \quad \nu = \frac{\rho_0 \omega^2}{D}$$

Здесь черта – символ комплексного сопряжения, и введены стандартные обозначения [1].

Поправку к U^s будем называть рассеянным полем. Рассеянное поле $U^s = U - U^s$ должно удовлетворять условию излучения, т.е. не должно содержать приходящих волн. Как будет показано ниже, на больших расстояниях от трещины рассеянное поле представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну и две поверхностные волны, сосредоточенные вблизи пластины. Цель работы – построение поля U^s . Ширину трещины ниже будем полагать малой по сравнению с длиной волны падающего поля.

2. Сведение задачи к интегральным уравнениям. Введем функцию Грина G краевой задачи для однородной пластины

$$(\Delta + k^2)G = -\delta(x - x_0, y - y_0)$$

$$\left(\frac{d^4}{dx^4} - k_0^4 \right) \frac{\partial G}{\partial y} + \nu G = 0$$

Тогда, применяя вторую формулу Грина, можно получить представление для рассеянного поля

$$\begin{aligned} -U^s(x_0, y_0) = & \int_{-a}^a G(x, 0, x_0, y_0) \frac{\partial U(x, 0)}{\partial y} dx + D \xi(a) G_{yxxx}(a, 0, x_0, y_0) - \\ & - D \xi(-a) G_{yxxx}(-a, 0, x_0, y_0) - D \xi_x(a) G_{yxx}(a, 0, x_0, y_0) + D \xi_x(-a) G_{yxx}(-a, 0, x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

(производные обозначены соответствующими нижними индексами).

Таким образом, если на трещине известна нормальная производная суммарного поля $\phi(x) \equiv \partial U(x, 0) / \partial y$ и известны суммарные смещения $\xi(\pm a)$ и углы поворота $\xi_x(\pm a)$ краев пластин, рассеянное поле U^s может быть вычислено по формуле (2.1). Это поле автоматически, при произвольных $\phi(x)$, $\xi(\pm a)$ и $\xi_x(\pm a)$ удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2) и условию излучения. Граничное условие (1.4) и контактные условия (1.3)

приводят к системе уравнений относительно функции $\phi(x)$ и постоянных $\xi(\pm a)$ и $\xi_x(\pm a)$

$$\int_{-a}^a G(x, 0, x_0, y_0) \phi(x) dx + D\xi(a)G_{yxxx}(a, 0, x, x_0, 0) - D\xi(-a)G_{yxxx}(-a, 0, x, x_0, 0) - \\ - D\xi_x(a)G_{yxx}(a, 0, x_0, 0) + D\xi_x(-a)G_{yxx}(-a, 0, x_0, 0) = U^g(x_0, 0), \quad -a < x_0 < a \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{D} \int_{-a}^a \frac{\partial^{n+1} G(x, 0, x_0, 0)}{\partial y_0 \partial x_0^n} \phi(x) dx + \xi(a) \frac{\partial^{5+n} G(a, 0, \pm(a+0), 0)}{\partial y \partial y_0 \partial x^3 \partial x_0^n} - \\ - \xi(-a) \frac{\partial^{5+n} G(-a, 0, \pm(a+0), 0)}{\partial y \partial y_0 \partial x^3 \partial x_0^n} - \xi_x(a) \frac{\partial^{4+n} G(a, 0, \pm(a+0), 0)}{\partial y \partial y_0 \partial x^2 \partial x_0^n} + \\ + \xi_x(-a) \frac{\partial^{4+n} G(-a, 0, \pm(a+0), 0)}{\partial y \partial y_0 \partial x^2 \partial x_0^n} = v \frac{\partial^n}{\partial x^n} \xi^g(\pm a), \quad n = 2, 3 \quad (2.3)$$

Класс функций, в котором должно лежать решение $\phi(x)$, определяется условиями Майкснера

$$\phi(x) = O((x \mp a)^{\delta-1}), \quad \delta > 0$$

Оператор интегро-алгебраической системы (2.2), (2.3) выражается через функцию Грина $G(x, y, x_0, y_0)$. Эта функция Грина хорошо известна и может быть получена методом Фурье. Для следов G и $\partial G / \partial y_0$ на границе $\{y = 0\}$ получим

$$G(x, 0, x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda(x - x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0\right) \frac{(\lambda^4 - k_0^4)}{l(\lambda)} d\lambda \quad (2.4)$$

$$G_y(x, 0, x_0, y_0) = -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\lambda(x - x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0\right) \frac{d\lambda}{l(\lambda)} \quad (2.5)$$

$$l(\lambda) = (\lambda^4 - k_0^4) \sqrt{\lambda^2 - k^2} - v$$

Нули функции $l(\lambda)$ в точках $\lambda = \pm \kappa$ обходятся контуром интегрирования соответственно снизу и сверху.

Для вычисления производных высоких порядков, входящих в интегро-алгебраическую систему, необходима регуляризация интегралов, которая проводится стандартными для теории гранично-контактных задач методами [2]. Подынтегральное выражение в представлении ядра (2.4) при больших λ будет $O(1/|\lambda|)$ и, таким образом, ядро интегрального уравнения (2.2) имеет логарифмическую особенность. Можно убедиться, что остальные функции, вовлеченные в систему, ограничены.

3. Численная процедура. Вводя новые неизвестные

$$[\xi_x] = \rho_0 \omega^2 \left(\frac{\partial \xi(a)}{\partial x} - \frac{\partial \xi(-a)}{\partial x} \right), \quad \{\xi_x\} = \rho_0 \omega^2 \left(\frac{\partial \xi(a)}{\partial x} + \frac{\partial \xi(-a)}{\partial x} \right)$$

$$[\xi] = \rho_0 \omega^2 (\xi(a) - \xi(-a)), \quad \{\xi\} = \rho_0 \omega^2 (\xi(a) + \xi(-a))$$

систему (2.2), (2.3) можно переписать в симметричном виде. При реализации численной процедуры это позволит расщепить систему на две, отвечающие четной и нечетной по x частям поля.

Для численного анализа воспользуемся методом Галеркина [8]. В качестве базиса удобно выбрать полиномы Чебышева первого рода $T_p(x/a)$ деленные на квадратный корень $\sqrt{a^2 - x^2}$. Указанный базис является базисом собственных функций интегрального оператора первого рода с логарифмическим ядром [9].

Разложим функцию $\phi(x)$ в ряд (всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется от $p = 0$ до $p = \infty$)

$$\phi(x) = \sum \phi_p \frac{T_p(x/a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (3.1)$$

подставим в систему и спроектируем интегральное уравнение на $T_q(x/a)$. В результате получим две бесконечные алгебраические системы для определения коэффициентов разложения (3.1) и постоянных $[\xi_x]$, $\{\xi_x\}$, $[\xi]$ и $\{\xi\}$. Для краткости приведем лишь систему, отвечающую четной по x части поля

$$\begin{aligned} \sum A_{2p2q} \phi_{2p} + B_{2q} [\xi_x] + C_{2q} \{\xi\} &= u_{2q}, \quad q = 0, 1, \dots \\ \sum B_{2p} \phi_{2p} + \frac{D_0 + E_0}{2} [\xi_x] - \frac{E_1}{2} \{\xi\} &= -\frac{D}{2} (\xi_{xx}^g(a) + \xi_{xx}^g(-a)) \\ \sum C_{2p} \phi_{2p} - \frac{E_1}{2} [\xi_x] - \frac{D_2 - E_2}{2} \{\xi\} &= \frac{D}{2} (\xi_{xxx}^g(a) - \xi_{xxx}^g(-a)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Элементы матриц этих систем выражаются двукратными интегралами по квадрату $-a < x < a$, $-a < t < a$, или после подстановки представлений для ядра и вычисления интегралов по x и t — интегралами по полуоси

$$\begin{aligned} A_{pq} &= i^{p+q} \pi \int_0^{+\infty} J_p(a\lambda) J_q(a\lambda) \frac{\lambda^4 - k_0^4}{l(\lambda)} d\lambda \\ B_{2p} &= (-1)^{p+1} \int_0^{+\infty} J_{2p}(a\lambda) \cos(a\lambda) \frac{\lambda^2}{l(\lambda)} d\lambda, \quad B_{2p+1} = (-1)^{p+1} \int_0^{+\infty} J_{2p+1}(a\lambda) \sin(a\lambda) \frac{\lambda^2}{l(\lambda)} d\lambda \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} C_{2p} &= (-1)^p \int_0^{+\infty} J_{2p}(a\lambda) \sin(a\lambda) \frac{\lambda^3}{l(\lambda)} d\lambda, \quad C_{2p+1} = (-1)^p \int_0^{+\infty} J_{2p+1}(a\lambda) \cos(a\lambda) \frac{\lambda^3}{l(\lambda)} d\lambda \\ D_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{k_0^4}{v} \sqrt{\lambda^2 - k^2} + 1 \right\} \frac{(i\lambda)^j}{l(\lambda)} d\lambda, \quad j = 0, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$E_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ia\lambda} \left\{ \frac{k_0^4}{v} \sqrt{\lambda^2 - k^2} + 1 \right\} \frac{(i\lambda)^j}{l(\lambda)} d\lambda, \quad j = 0, 1, 2$$

Для оправдания метода усечения оценим поведение элементов матрицы (3.3) по номерам. Для этого вычленим асимптотику $1/|\lambda|$ символа $(\lambda^4 - k_0^4)/l(\lambda)$ на бесконечности

$$A_{pq} = i^{p+q} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\delta_p^q}{2p} + \int_0^{+\infty} J_p(a\lambda) J_q(a\lambda) \left(\frac{\lambda^4 - k_0^4}{l(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right) d\lambda \right\}, \quad p + q > 0 \quad (3.5)$$

($\delta_p^q = 1$ при $p = q$, $\delta_p^q = 0$ при $p \neq q$). Оценки интегралов (3.5) могут быть получены аналогично [10] с дополнительным учетом вклада полюса в точке $\lambda = \kappa$. Приведем лишь окончательное выражение

$$|A_{pq}| < C \left(\frac{a}{2} \right)^{2-9/(p+q+4)} (p!q!)^{-3/(p+q+4)} \left[1 + \left(\frac{a}{2} \right)^{6/(p+q+4)} \right] \quad (3.6)$$

Оценка (3.6) позволяет заключить, что для каждого фиксированного p сумма недиагональных элементов $S_p = \sum_{q \neq p} |A_{pq}|$ конечна и убывает с ростом p . Анало-

гичные оценки для интегралов B_p и C_p показывают, что $\sum |B_p|$ и $\sum |C_p|$ конечны. Указанные свойства матрицы доказывают применимость метода усечения [11].

4. Асимптотики диаграммы направленности и амплитуд поверхностных волн. Рассеянное поле U^s может быть представлено на больших расстояниях от трещины в виде суммы цилиндрической расходящейся волны U^0 и поверхностных волн $U^\pm$. Выражение для цилиндрической волны

$$U^0 = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{ikr - i\pi/4} \Psi(\varphi) \quad (4.1)$$

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{k \sin \varphi}{ik \sin \varphi (k^4 \cos^4 \varphi - k_0^4) + v} \left\{ \left(k^4 \cos^4 \varphi - k_0^4 \right) \int_{-a}^a e^{-ikx \cos \varphi} \phi(x) dx + \right.$$

$$+ ik^2 \cos^2 \varphi \sin(ka \cos \varphi) \{\xi_x\} - k^2 \cos^2 \varphi \cos(ka \cos \varphi) [\xi_x] -$$

$$\left. - k^3 \cos^3 \varphi \sin(ka \cos \varphi) \{\xi\} - ik^3 \cos^3 \varphi \cos(ka \cos \varphi) [\xi] \right\}$$

возникает после применения метода перевала к интегралу в (2.1). Здесь введены полярные координаты $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\varphi = \arctg(y_0 / x_0)$. Выражения для поверхностных волн

$$U^\pm = A_\pm \exp\left(\pm i\kappa x_0 - \sqrt{\kappa^2 - k^2} y_0\right)$$

$$A_\pm = \frac{-i}{5\kappa^4 - 4k^2\kappa^2 - k_0^4} \left\{ \frac{v}{\kappa} \int_{-a}^a e^{\mp i\kappa x} \phi(x) dx - \kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} (\cos(\kappa a) [\xi_x] + \kappa \sin(\kappa a) \{\xi\}) \mp \right.$$

$$\left. \mp i\kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} (\kappa \cos(\kappa a) [\xi] - \sin(\kappa a) \{\xi_x\}) \right\} \quad (4.2)$$

возникают в результате взятия вычета в точке $\lambda = \pm \kappa$.

Рассмотрим случай узкой трещины, т.е. получим асимптотику диаграммы Ψ и амплитуд $A^\pm$ при $ka \ll 1$. Используя оценку (3.6), можно убедиться, что недиагональные элементы матрицы A_{pq} асимптотически малы. Правые части и элементы B_p и C_p при $p > 0$ стремятся к нулю. Таким образом, система (3.2) для малых ka может быть усечена по первому уравнению. В результате имеем (волна означает старший член асимптотики при $ka \ll 1$, γ – постоянная Эйлера)

$$\tilde{A}_{00}\phi_0 - \tilde{B}_0[\xi_x] = \pi U^s(0), \quad -\tilde{B}_0\phi_0 + D_0[\xi_x] = -D\xi_{xx}^s(0), \quad D_2[\xi] = -D\xi_{xxx}^s(0) \quad (4.3)$$

$$\tilde{B}_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{l(\lambda)}, \quad \tilde{A}_{00} = -\pi \left(A - \frac{\pi i}{2} - \frac{v}{2} I \right)$$

$$A = \ln \frac{ka}{4} + \gamma, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{l(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad (4.4)$$

При возбуждении колебаний системы падающей из акустического полупространства плоской волной (1.5) правые части системы уравнений (4.3) зависят от угла падения φ_0 . Можно показать, что постоянные $\{\xi_x\}$ и $\{\xi\}$ ограничены, а коэффициенты разложения (3.1) с $p > 0$ асимптотически малы. Вычисляя коэффициент ϕ_0 и постоянные $[\xi_x]$ и $[\xi]$ из системы (4.3), на основании точных выражений (4.1) и (4.2) получим асимптотические разложения диаграммы и амплитуд

$$\Psi(\varphi, \varphi_0) = \frac{i}{\pi} \frac{k^2 \sin \varphi \sin \varphi_0}{L(\varphi) L(\varphi_0)} \left\{ \frac{k^4}{D_0} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 - \frac{k^6}{D_2} \cos^3 \varphi \cos^3 \varphi_0 + \right.$$

$$+ \frac{1}{\tilde{A}_{00}} \left\{ \pi^2 L_1(\varphi) L_1(\varphi_0) - \pi \frac{k^2 \tilde{B}_0}{D_0} (\cos^2 \varphi L_1(\varphi_0) + L_1(\varphi) \cos^2 \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{k^4 \tilde{B}_0^2}{D_0^2} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi_0 \right\} + \dots \quad (4.5)$$

$$A_{\pm} = - \frac{2k \sin \varphi_0}{L(\varphi_0)} \frac{1}{5\kappa^4 - 4k^2 \kappa^2 - k_0^4} \left\{ \kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{k^2}{D_0} \cos^2 \varphi_0 \pm \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{k^3}{D_2} \cos^3 \varphi_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tilde{A}_{00}} \left(\frac{\pi v}{\kappa} - \kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \right) \left(\pi L_1(\varphi_0) - k^2 \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \cos^2 \varphi_0 \right) + \dots \right\}$$

$$L_1(\varphi_0) = k^4 \cos^4 \varphi_0 - k_0^4$$

Функция L определена в (1.6).

Из второй формулы (4.4) следует, что члены, содержащие $1/\tilde{A}_{00}$, являются поправочными по малому параметру ka .

Для случая рассеяния поверхностной волны

$$U^i = \exp(i\kappa x - \sqrt{\kappa^2 - k^2} y) \quad (4.6)$$

асимптотики имеют вид

$$\Psi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa k \sin \varphi}{v L(\varphi)} \left\{ \kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{k^2}{D_0} \cos^2 \varphi - \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{k^3}{D_2} \cos^3 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tilde{A}_{00}} \left(\frac{\pi v}{\kappa} - \kappa \sqrt{\kappa^2 - k^2} \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \right) \left(\pi L_1(\varphi) - k^2 \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \cos^2 \varphi \right) + \dots \right\} \\ A_{\pm} = i \frac{\kappa(\kappa^2 - k^2)}{(5\kappa^4 - 4\kappa^2 k^2 - k_0^4)v} \left\{ \frac{\kappa^2}{D_0} \pm \frac{\kappa^4}{D_2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\tilde{A}_{00}} \left(\frac{\pi v}{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 - k^2}} - \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \right) \left(\pi \kappa^4 - \frac{\tilde{B}_0}{D_0} \kappa^2 - \pi k_0^4 \right) + \dots \right\} \quad (4.7)$$

Найденные асимптотические разложения (4.5) и (4.7) для основных характеристик рассеянного поля содержат специальные интегралы I , D_0 , D_2 и $\tilde{B}_0$, зависящие от параметров пластины и акустической среды. В случае тонкой пластины ($kh \ll 1$) интегралы могут быть упрощены, что приводит к более наглядным формулам, приведенным в следующем разделе.

5. Обсуждение результатов и заключение. Отметим, что старшие по параметру ka члены первого асимптотического разложения (4.5) совпадают с полученной в [1] асимптотикой для модели точечной трещины. Поправочные члены зависят от ширины трещины $2a$ и анализ их вклада в асимптотику будет проведен ниже.

При построении асимптотик рассеянного поля предполагалась малость лишь одного параметра — ka . Остальные параметры системы считались порядка единицы. В рамках этих предположений для произвольного угла падения φ_0 характеристики поля, рассеянного на узкой трещине, оказываются близки к характеристикам поля, рассеянного на точечной трещине. В то же время, если плоская волна падает ортогонально к пластине, два старших члена в (4.5) исчезают и старший вклад в асимптотику дают члены порядка $1/\ln(ka)$. Таким образом, приближение точечной трещины неприменимо в случае падения плоской волны под углами, близкими к $\pi/2$ (а именно, $|\varphi_0 - \pi/2| < 1/\sqrt{|\ln(ka)|}$).

Как было указано, коэффициенты асимптотических разложений зависят от параметров пластины и акустической среды. Введем безразмерные параметры

$$p = 12(1 - \sigma^2)\rho_0 c^2 / E, \quad d = \rho_0 / \rho$$

где c – скорость звука в акустическом полупространстве, а остальные величины были введены в разд. 1. В терминах введенных параметров и параметра $\varepsilon = kh$ имеем

$$vh^5 = p\varepsilon^2, \quad k_0^4 h^4 = p / d\varepsilon^2$$

Асимптотические разложения характеристик рассеянного поля для точечной модели при $\varepsilon \ll 1$ получены в [1]. Можно показать, что приведенные в [1] формулы справедливы, если

$$\varepsilon \ll d^{5/2} p^{-1/2}, \quad \varepsilon \ll p^{1/3} \quad (5.1)$$

Основным моментом при получении указанных асимптотик является анализ дисперсионного уравнения

$$l(\lambda)h^5 = ((\lambda h)^4 - p / d\varepsilon^2) \sqrt{(\lambda h)^2 - \varepsilon^2} - p\varepsilon^2 = 0$$

при малом ε в предположении, что параметры p и d – порядка единицы. В этом случае корни символа $l(\lambda)$ на обоих листах двулистной римановой поверхности λ приближенно располагаются в вершинах правильного пятиугольника

$$\kappa_j = \pm h^{-1} p^{1/5} e^{2\pi i j / 5} \varepsilon^{2/5}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5.2)$$

Корень κ_0 является волновым числом поверхностной волны и выше обозначался как κ . При помощи формулы (5.2) входящие в асимптотики (4.5) интегралы могут быть вычислены сведением к сумме вычетов (см. [1])

$$I = -\frac{3\pi i}{5v}, \quad \tilde{B}_0 = v^{-2/5} \pi \left(\frac{i}{5} + \frac{\sqrt{2}}{50} \left(3\sqrt{5-\sqrt{5}} - \sqrt{5+\sqrt{5}} \right) \right)$$

$$D_0 = \frac{2i}{5v^{4/5}} (1 - e^{2\pi i / 5})^{-1}, \quad D_2 = \frac{2i}{5v^{2/5}} (1 - e^{6\pi i / 5})^{-1} \quad (5.3)$$

Подставляя формулы (5.3) в первое асимптотическое разложение (4.5), можно увидеть, что член, пропорциональный $\tilde{A}_{00}^{-1}$ и дающий поправку по параметру ka , оказывается старшим по параметру ε . Действительно, отношение диаграмм в точечной модели и в модели узкой трещины имеет порядок $\varepsilon^{8/5} \ln(ka)$. Для амплитуд поверхностных волн член, содержащий $\tilde{A}_{00}^{-1}$, также является старшим по параметру ε . Таким образом, даже для неортогонального падения члены, отвечающие точечной модели трещины, превалируют лишь для очень малых ka , а именно $ka \ll \exp(-\varepsilon^{-8/5})$ в асимптотике диаграммы и $ka \ll (-\varepsilon^{-4/5})$ в асимптотике амплитуд поверхностных волн. Справедливость исследованной в данной работе модели для настолько узких трещин сомнительна и требует дополнительного исследования. Однако, если $ka > \varepsilon = kh$, модель узкой трещины применима, а модель точечной трещины, очевидно, нет.

При неэкспоненциально малых ka основные вклады в асимптотики характеристик рассеянного поля дают члены, отсутствующие в точечной модели. Приведем их:

$$\Psi(\varphi, \varphi_0) = 5 \frac{\varepsilon^2}{d^2} \frac{\pi - 5iA}{B^2} \sin \varphi \sin \varphi_0, \quad A_{\pm} = 2\pi \frac{\varepsilon}{d} e^{\pi i / 5} \frac{\pi i + 5A}{B^2} \sin \varphi_0, \quad B^2 = \pi^2 + 25A^2 \quad (5.4)$$

Можно проверить, что асимптотики (5.4) удовлетворяют оптической теореме [12]. Вычисления показывают, что основную часть энергии, рассеянной на трещине, уносят поверхностные волны. Эффективное сечение рассеяния имеет асимптотику

$$\Sigma(\varphi_0) = \frac{20\pi^2}{B^2} \frac{\epsilon h}{d^2} \sin^2 \varphi_0 \quad (5.5)$$

Проведенный выше анализ применимости точечной модели трещины базировался на рассмотрении возбуждения системы пространственной волной. Рассмотрим теперь случай падения поверхностной волны. Асимптотика для $A_{\pm}$ в (4.7) приводит к выражению

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} (1 - e^{2\pi i/5}) \pm \frac{1}{2} (1 - e^{6\pi i/5}) - \pi e^{9\pi i/10} \frac{\pi i + 5A}{B^2} \quad (5.6)$$

Первые два члена отвечают точечной модели и являются старшими. Поправка в (5.6) в $1/|\ln(ka)|$ раз меньше. Таким образом, модель точечной трещины дает правильные асимптотики поверхностного волнового процесса.

Исследование асимптотик было проведено в предположении (5.1). Если эти предположения не выполнены, необходим численный счет интегралов $D_0, D_2, \tilde{B}_0$ и I .

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д.П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037–1043.
2. Коузов Д.П. О явлении резонанса при дифракции плоской гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 409–417.
3. Коновалюк И.П., Красильников В.Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: Изд-во ЛГУ. 1965. Вып. 4. С. 149–165.
4. Crighton D.G., Innes D. Low frequency acoustic radiation and vibration response of locally excited fluid-loaded structures // J. Sound and Vibration. 1983. Т. 91. № 2. С. 293–314.
5. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.
6. Белинский Б.П. Дифракция плоской волны на пластине, подкреплённой выступающим ребром жесткости // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 486–493.
7. Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовича и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Андронов И.В. Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 312–321.
11. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 696 с.
12. Белинский Б.П., Коузов Д.П. Оптическая теорема для системы пластина – жидкость // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 1. С. 13–19.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
2.XI.1995