

УДК 532.5:534.1

© 1997 г. А.Т. Ильичев, А.В. Марченко

**ФОРМИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВОДОВ
ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН**

Исследуется резонансное взаимодействие трех двумерных волновых пакетов капиллярных и изгибно-гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой идеальной жидкости. С использованием гамильтонова подхода получены универсальные асимптотические уравнения. Определены основные типы распадных взаимодействий в зависимости от групповых скоростей волновых пакетов. Получены и исследованы новые точные решения волноводного типа уравнений взаимодействия трех волн с учетом дисперсии. С использованием метода редукции исследуемой динамической системы на центральное многообразие доказано существование широкого класса решений волноводного типа, зависящих от пяти произвольных постоянных. Доказана их устойчивость по отношению к медленным изменениям границ волновода и амплитуд волн, распространяющихся вдоль него.

Основной особенностью нелинейного взаимодействия трех плоских волновых пакетов без учета дисперсии является распад огибающей волны "накачки" при ее столкновении с вторичными волнами [1, 2]. Полный распад происходит только в случае, когда скорость волны "накачки" промежуточная. Считалось [3], что в большинстве физических приложений при резонансном взаимодействии трех волн скорость волны "накачки" экстремальна. Ниже показано, что в одной и той же физической системе в зависимости от соотношения между волновыми векторами резонансных гармоник могут осуществляться различные типы распадных взаимодействий.

Было показано [4], что влияние дисперсных эффектов при взаимодействии трех плоских волн может приводить к формированию связанных солитонов, когда все три волны распространяются под одной огибающей. Решения типа связанных солитонов исследовались численными методами. В данной работе аналитически получены и исследованы новые решения волноводного типа уравнений взаимодействия трех двумерных волновых пакетов с дисперсией.

1. Вывод асимптотических уравнений. Уравнения потенциальных движений бесконечно глубокого слоя жидкости записываются в виде [5, 6]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \phi^s} \quad \frac{\partial \phi^s}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (1.1)$$

где $z = \eta(t, \mathbf{x})$ и $\phi^s(t, \mathbf{x})$ – возвышение поверхности жидкости над горизонтальным положением равновесия и значение потенциала скоростей на ней, $\mathbf{x} = (x, y)$ – горизонтальные координаты, z – вертикальная координата.

Гамильтониан H равен сумме полной энергии жидкости E и поверхностной энергии F

$$H = E + F \quad (1.2)$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta} \left[(\nabla \varphi)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + g \eta^2 \right\} dx dy$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Гамильтониан H – функционал от φ^s и η при условии, что φ^s – граничное значение потенциала скоростей φ , удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad -\infty < z < \eta \quad (1.3)$$

и граничному условию

$$\partial \varphi / \partial z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1) являются кинематическим граничным условием и интегралом Коши – Лагранжа на неизвестной границе жидкости $z = \eta$.

Выражение для F зависит от физической природы изучаемых явлений. Далее рассматриваются два конкретных случая: капиллярно-гравитационные и изгибно-гравитационные волны малой амплитуды.

Волнами малой амплитуды будем называть решения уравнений (1.1), для которых выполняется условие $\varepsilon = a / \lambda \ll 1$, где a и λ – характерные амплитуда и ширина волнового пакета. При изучении взаимодействия волновых пакетов малой амплитуды зависимость $(\partial \varphi / \partial z)^s$ от φ^s и η может быть получена в виде рядов по степеням ε .

Для выделения в явном виде параметра ε в (1.1) перейдем к безразмерным переменным, обозначаемым буквами со штрихами

$$t' \sqrt{\lambda} = t \sqrt{g}, \quad \lambda(x', y', z') = (x, y, z), \quad \varphi' \sqrt{ag\lambda} = \varphi, \quad \eta' a = \eta \quad (1.5)$$

$$E' a^2 g = E, \quad F' a^2 g = F$$

(ρ – плотность жидкости). Далее штрихи опускаются.

В безразмерных переменных полная энергия E , энергия F_{st} поверхностного натяжения [7] и энергия F_{ep} упругой пластины [8] имеют вид

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi^s \left[\varepsilon \nabla \varphi^s \nabla \eta - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^s (1 + \varepsilon^2 (\nabla \eta^2)) \right] + \eta^2 \right\} dx dy$$

$$F_{st} = -\frac{\tau}{2\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$F_{ep} = \frac{D}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\Delta \eta)^2 + 2(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy$$

$$\tau = \frac{\kappa}{\rho g \lambda^2}, \quad D = \frac{E h^3}{12 \rho g (1 - \nu^2) \lambda^4}$$

Здесь κ – коэффициент поверхностного натяжения, E – модуль Юнга, ν , h – коэффициент Пуассона и толщина пластины.

Решение уравнения (1.3), соответствующее достаточно быстро убывающим начальным данным, имеет вид

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_f(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + kz} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad k = |\mathbf{k}| \quad (1.6)$$

Предположим, что в начальный момент времени функция φ отлична от нуля только в ε -окрестности волновых векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$. С течением времени в результате нелинейных взаимодействий спектр будет расширяться за счет возбуждения кратных гармоник. Поэтому в любой момент времени можно формально написать разложение

$$\varphi^\circ = \sum_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{m}}^\circ(\mathbf{X}, t) e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{m}}\mathbf{x}}, \quad \varphi_{\mathbf{m}}^\circ = (\varphi_{-\mathbf{m}}^\circ)^* \quad (1.7)$$

$$\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}, \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2), \quad \mathbf{k}_{\mathbf{m}} = m_1 \mathbf{k}_1 + m_2 \mathbf{k}_2$$

Индекс $^\circ$ означает, что значение функции берется при $z = 0$, звездочка означает комплексное сопряжение. Символ $\sum_{\mathbf{m}}$ означает суммирование по $m_{1,2}$ от $-\infty$ до ∞ . Из (1.6), (1.7) с точностью до $O(\varepsilon^2)$ следует

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^\circ = \sum_{\mathbf{m}} \left\{ \left[k - i\varepsilon \nabla_k^\alpha k \nabla_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nabla_k^{\alpha\beta} k \nabla_{\alpha\beta} \right] \varphi_{\mathbf{m}}^\circ \right\} e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{m}}\mathbf{x}} \quad (1.8)$$

$$(\alpha, \beta) = (\dot{x}, y), \quad \nabla_k^x = \frac{\partial}{\partial k_x}, \quad \nabla_k^{xx} = \frac{\partial^2}{\partial k_x^2}, \quad \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$$

Индекс $\mathbf{m}$ означает, что значение функции берется при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\mathbf{m}}$. По повторяющимся индексам α, β предполагается суммирование.

С точностью до $O(\varepsilon^2)$ функции $\varphi^s, (\partial \varphi / \partial z)^\circ$ представляются в виде

$$\begin{aligned} \varphi^s &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \eta^2 \Delta \right) \varphi^\circ + \varepsilon \eta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^\circ \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^s &= \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \eta^2 \Delta \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^\circ - \varepsilon \eta \Delta \varphi^\circ \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из (1.7)–(1.9) вытекают формулы

$$\begin{aligned} \left(\eta, \varphi^s, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^s \right) &= \sum_{\mathbf{m}} (\eta_{\mathbf{m}}, \varphi_{\mathbf{m}}^s, \varphi_{z,\mathbf{m}}^s)(\mathbf{X}, t) e^{i\mathbf{k}_{\mathbf{m}}\mathbf{x}} \\ (\eta_{-\mathbf{m}}^*, \varphi_{-\mathbf{m}}^{s*}, \varphi_{z,-\mathbf{m}}^*) &= (\eta_{\mathbf{m}}, \varphi_{\mathbf{m}}^s, \varphi_{z,\mathbf{m}}^s) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\varphi_{z,\mathbf{m}}^s = k_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{m}}^s + \varepsilon \sum_{\mathbf{n}} (k_{\mathbf{m}-\mathbf{n}}^2 - k_{\mathbf{m}} k_{\mathbf{m}-\mathbf{n}}) \eta_{\mathbf{n}} \varphi_{\mathbf{m}-\mathbf{n}}^s - i\varepsilon (\nabla_k^\alpha k)_{\mathbf{m}} \nabla_\alpha \varphi_{\mathbf{m}}^s + O(\varepsilon^2)$$

Используя разложения (1.10), гамильтониан H можно выразить явным образом через $\eta_{\mathbf{m}}, \varphi_{\mathbf{m}}^s$.

Асимптотические уравнения для медленно изменяющихся амплитуд волновых пакетов имеют вид [6]

$$\frac{\partial \eta_{\mathbf{m}}}{\partial t} = \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \varphi_{-\mathbf{m}}^s}, \quad \frac{\partial \varphi_{\mathbf{m}}^s}{\partial t} = - \frac{\delta \tilde{H}}{\delta \eta_{-\mathbf{m}}^s} \quad (1.11)$$

Выражение для осредненного гамильтониана $\tilde{H}$ получается из (1.2), (1.10) при отбрасывании под знаком интегралов всех слагаемых, пропорциональных быстро-изменяющимся экспонентам.

Подставляя в (1.11) формулы

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{m}}(\mathbf{X}, t) &= \tilde{\eta}_{\mathbf{m}}(\mathbf{X}, T) e^{i\omega_{\mathbf{m}} t}, \quad \varphi_{\mathbf{m}}^s(\mathbf{X}, t) = \varphi_{\mathbf{m}}^s(\mathbf{X}, T) e^{i\omega_{\mathbf{m}} t}, \quad \omega_{\mathbf{m}} = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2, \quad T = \varepsilon t \\ \omega_{\mathbf{m}} &= \omega(\mathbf{k}_{\mathbf{m}}) = k_{\mathbf{m}} L(\mathbf{k}_{\mathbf{m}}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\omega = \omega(k)$ – дисперсионное соотношение линейного приближения, и исключая из

полученных уравнений $\tilde{\eta}_m$, находим

$$i \frac{\omega_m^2 - \omega^2(\mathbf{k}_m)}{\omega_m} \varphi_m + 2\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial T} - \nabla_k^\alpha \omega_m \nabla_\alpha \right) \varphi_m + \\ + \varepsilon \sum_m \alpha_{mn} \varphi_{m-n} + i\varepsilon^2 \nabla^{\alpha\beta} \omega_m \nabla_{\alpha\beta} \varphi_m + \dots = 0 \quad (1.13)$$

$$\alpha_{mn} = \frac{L_m k_n}{\omega_m \omega_n} (k_m k_{m-n} - k_{m-n}^2 - \mathbf{k}_n \mathbf{k}_{m-n}) - \frac{1}{2} (\mathbf{k}_n \mathbf{k}_{m-n} + k_n k_{m-n})$$

Из (1.13) видно, что амплитуда φ_m имеет порядок ε , если $\omega_m^2 - \omega^2(\mathbf{k}_m) = O(1)$. Поэтому наиболее интенсивно взаимодействуют гармоники, волновые числа которых удовлетворяют условиям синхронизма

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) \quad (1.14)$$

Бездисперсионные уравнения резонансного взаимодействия трех волновых пакетов вытекают из (1.13):

$$i \left(\frac{\partial}{\partial T} - \nabla_k^\alpha \omega_j \nabla_\alpha \right) \varphi_j = W c_j N_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.15)$$

$$N_1 = \varphi_2^* \varphi_3, \quad N_2 = \varphi_1^* \varphi_3, \quad N_3 = \varphi_1 \varphi_2, \quad c_j = \omega_j / k_j$$

$$W = \frac{1}{2} [c_2^{-1} (k_1 k_3 - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3) + c_1^{-1} (k_2 k_3 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3) - c_3^{-1} (k_1 k_2 + \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)]$$

Уравнения (1.15) универсальны, и при рассмотрении различных поверхностных явлений отличаются только коэффициентами при нелинейности, которые определяются дисперсионным соотношением линейного приближения.

Свойства решений уравнений (1.15) зависят от соотношений между групповыми скоростями $\nabla_k^\alpha \omega_j$ и от знаков коэффициентов при квадратичных членах, которые в рассматриваемом случае одинаковы. Отсюда вытекает невозможность реализации взаимодействий взрывного типа [3].

В общем случае взаимодействия двумерных волновых пакетов с неравными групповыми скоростями аналитически получены решения, описывающие частичный или полный (в зависимости от соотношения амплитуд) распад локализованной на плоскости волны φ_3 на локализованные волны φ_1 и φ_2 . При этом форма волновых пакетов не меняется [9].

2. Условия резонансного взаимодействия. Предположим, что в плоскости (x, y) существует направление, вдоль которого групповые скорости взаимодействующих волновых пакетов $\nabla_k^x \omega_j$ равны c . Выберем это направление за ось x . Переходя к системе координат, перемещающейся в пространстве со скоростью c , находим, что в уравнениях (1.15) исчезают частные производные по направлению x , и система сводится к плоскому случаю.

Свойства решений системы (1.15) в плоском случае хорошо изучены [3, 10, 11] и зависят от соотношения между групповыми скоростями $\nabla_k^y \omega_j$. Если скорость $\nabla_k^y \omega_3$ волны накачки φ_3 промежуточная, $\nabla_k^y \omega_3 \in (\nabla_k^y \omega_1, \nabla_k^y \omega_2)$, то φ_3 распадается на φ_1, φ_2 полностью в течение бесконечного интервала времени при как угодно малых φ_1, φ_2 до начала взаимодействия. Решения уравнений, описывающие это явление, получены аналитически с использованием метода обратной задачи рассеяния [1, 3] или сдвигом по группе симметрий из нулевого "затравочного" решения [10, 11].

Было отмечено [3], что в большинстве задач, имеющих физическое приложение,

скорость волны накачки оказывается экстремальной. В этом случае аналитически полученные решения не имеют физического смысла, так как содержат особенности, где амплитуды ϕ_j обращаются в бесконечность в любой момент времени. Численные исследования [1, 2] показывают, что интенсивность волны накачки существенно падает только после столкновения с достаточно большой волной ϕ_1 или ϕ_2 . При этом в результате взаимодействия значительная часть энергии уходит в волны ряби, которые образуют "хвост" у солитона волны накачки.

В обоих случаях распадные процессы существенным образом зависят от амплитуд взаимодействующих волн. Если ϕ_j зависят от x , то параметры взаимодействия различны для различных значений x . Отсюда видно, что производные $\partial\phi_j/\partial x$ могут вырасти с течением времени. В этом случае дисперсия в направлении x может оказать влияние на взаимодействие волновых пакетов.

Уравнения взаимодействия трех волн с учетом дисперсии в направлении x выводятся из (1.13) аналогично (1.15). При этом полагается, что характерные размеры волновых пакетов таковы, что выполняется условие $\partial\phi_j/\partial Y = O(\partial^2\phi_j/\partial X^2)$. В системе координат, движущейся вдоль оси x со скоростью c , они имеют вид

$$i\left(\frac{\partial}{\partial T} - \nabla_k^y \omega_j \frac{\partial}{\partial Y}\right)\phi_j + \frac{1}{2} \nabla_k^{xx} \omega_j \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \phi_j = W_{c_j} N_j, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$\xi = X + cT$$

Отметим, что уравнения взаимодействия трех волн с учетом дисперсии исследовались ранее [4, 11]. Добавочный дисперсионный член в уравнениях в этом случае много меньше членов с первыми производными, так как пропорционален $\partial^2\phi_j/\partial Y^2$. Поэтому при исследовании точных решений надо следить за выполнением этого условия. В рассматриваемом случае все члены в (2.1) имеют одинаковый порядок малости.

Рассмотрим подробнее условия вывода уравнений (2.1). Они состоят из условий синхронизма (1.14) и условий равенства групповых скоростей вдоль оси x

$$\nabla_k^x \omega_1 = \nabla_k^x \omega_2 = \nabla_k^x \omega_3 \quad (2.2)$$

Для удобства решения уравнений (1.14) примем

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= k(\cos \theta_1, \sin \theta_1), \quad \mathbf{k}_2 = \alpha k(\cos \theta_2, \sin \theta_2) \\ \mathbf{k}_3 &= k(\cos \theta_1 + \alpha \cos \theta_2, \sin \theta_1 + \alpha \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

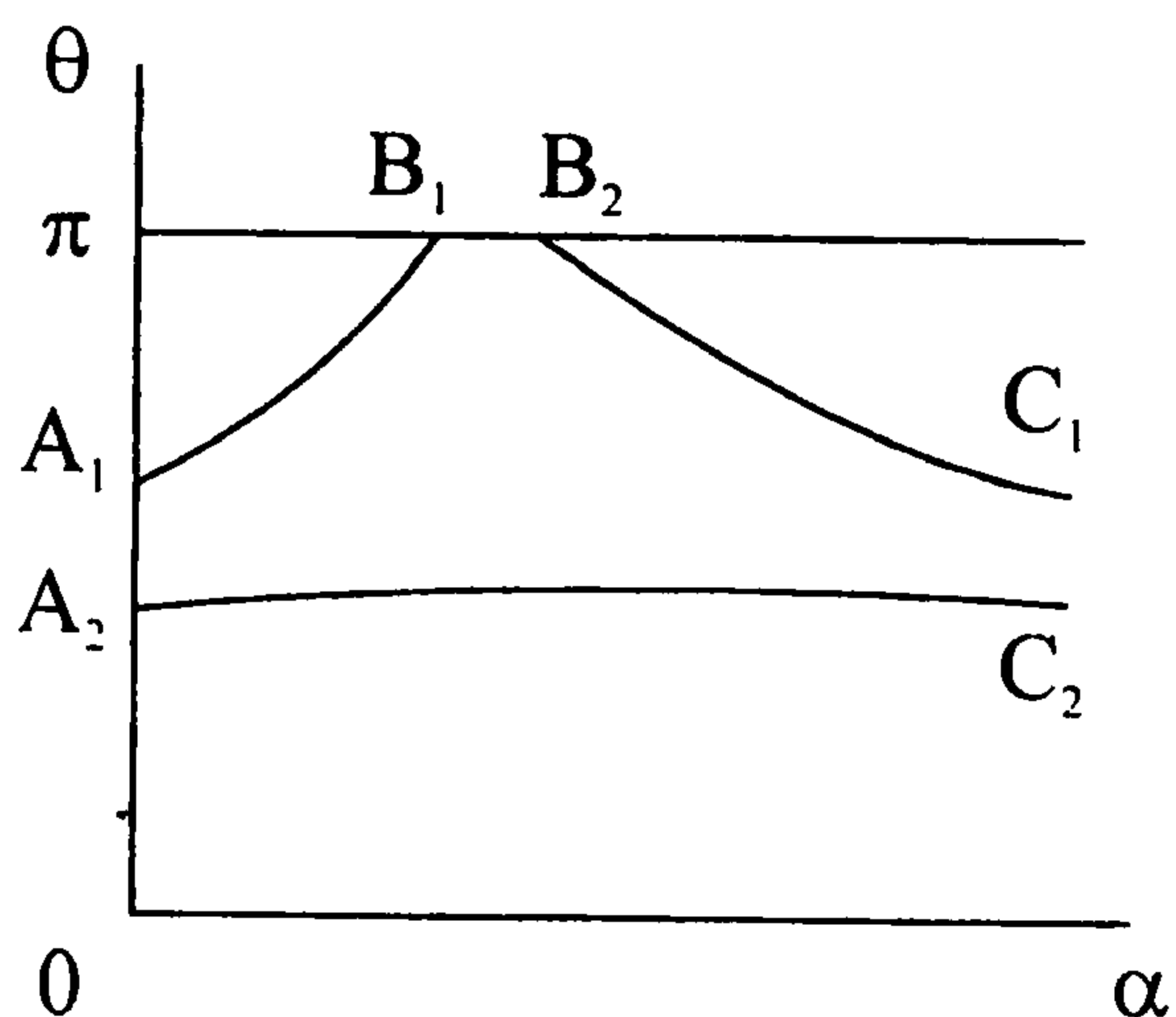
Подставляя (2.3) в (1.14), находим для капиллярно-гравитационных и изгибно-гравитационных волн соответственно

$$\tau k^2 = r_{st}(\theta, \alpha), \quad Dk^4 = r_{ep}(\theta, \alpha), \quad \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad (2.4)$$

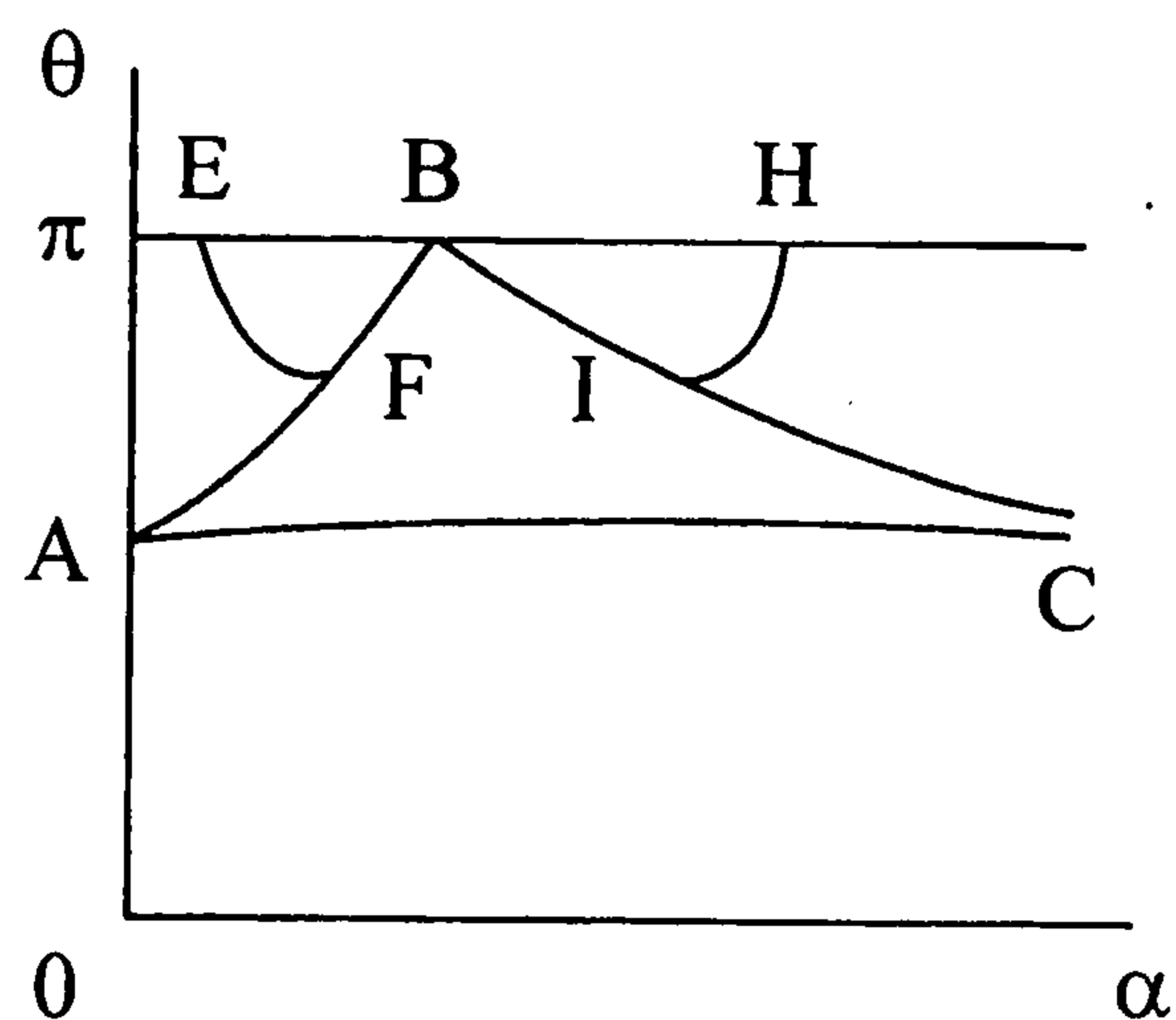
Здесь

$$\begin{aligned} r_{st,ep} &= \left(b_{st,ep} + \sqrt{b_{st,ep}^2 - f_{st,ep} g_{st,ep}} \right) / f_{st,ep} \\ b_{st} &= 2\alpha(1 + \alpha^2) - A_1 A_3, \quad b_{ep} = 2\alpha(1 + \alpha^4) - A_1 A_5 \\ f_{st} &= A_3^2 - 4\alpha^3, \quad f_{ep} = A_5^2 - 4\alpha^5, \quad g_{st,ep} = A_1^2 - 4\alpha \\ \alpha &= \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \theta}, \quad A_n = 1 + \alpha^n - \tilde{a}^n \end{aligned}$$

Формулы (2.4) параметрически определяют волновые вектора взаимодействующих волновых пакетов. Параметрами являются отношения модулей волновых векторов $\alpha = k_2/k_1$ и угол θ между ними.



Фиг. 1



Фиг. 2

Функции r_{st}, r_{ep} имеют физический смысл только в областях, где они больше нуля. На фиг. 1 и фиг. 2 эти области ограничены прямыми $\alpha = 0, \theta = 0, \theta = \pi$ и кривыми A_1B_1, B_2C_1, A_2C_2 для r_{st} и AB, BC и AC для r_{ep} . При приближении к $\alpha = 0$ и криволинейным границам функции r_{st}, r_{ep} стремятся к бесконечности.

Уравнения (2.2) имеют тривиальное решение $\theta_1 = \theta_2 = \pi / 2$. В этом случае выполняется $\nabla_k^x \omega_i = 0$ и $\nabla_k^y \omega_3 > (\nabla_k^y \omega_1, \nabla_k^y \omega_2)$, т.е. скорость волны накачки экстремальна.

Нетривиальное решение существует для изгибно-гравитационных волн. На фиг. 2 оно представлено кривыми EF и IH. Граничные точки этих кривых имеют координаты $E(0.5, \pi), F(0.88, 0.8\pi), I(1.14, 0.8\pi), H(1.47, \pi)$. Можно показать, что для этого решения выполняются

$$\nabla_k^y \omega_1 > \nabla_k^y \omega_3 > \nabla_k^y \omega_2, \quad \nabla_k^y \omega_2 < 0, \quad \theta_1 \in (0, \pi / 2)$$

т.е. скорость волны накачки промежуточная.

Таким образом, показано, что в одной и той же системе в зависимости от волновых векторов взаимодействующих волн могут осуществляться различные типы распадных взаимодействий, описываемых системой (2.1).

3. Существование решений волноводного типа. Исследуем некоторые свойства уравнений (2.1). Эта система имеет два закона сохранения, являющиеся аналогом соотношений Мэнли – Роу, и закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} (c_{1,2}^{-1} |\varphi_{1,2}|^2 + c_3^{-1} |\varphi_3|^2) + \frac{\partial}{\partial Y} (c_{1,2}^{-1} \nabla_k^y \omega_{1,2} |\varphi_{1,2}|^2 + c_3^{-1} \nabla_k^y \omega_3 |\varphi_3|^2) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \text{Im} [c_{1,2}^{-1} \nabla_k^{xx} \omega_{1,2} \varphi_{1,2}^* \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{1,2} + c_3^{-1} \nabla_k^{xx} \omega_3 \varphi_3^* \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_3] = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 c_k c_l \left(\nabla_k^y \omega_j \text{Im} \left(\varphi_j^* \frac{\partial}{\partial Y} \varphi_j \right) + \frac{1}{2} \nabla_k^{xx} \omega_j \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_j \right|^2 \right) + \right. \\ & \left. + 2W c_1 c_2 c_3 \text{Re}(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3^*) \right] d\xi dY = 0 \quad (j, k, l) = (1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Будем искать решение (2.1) в виде

$$\varphi_j = \varphi_j(\zeta) \exp i(r_j^x \xi + r_j^y Y + s_j T) \quad (3.3)$$

$$\zeta = c_x \xi + c_y Y + T, \quad r_1^{x,y} + r_2^{x,y} = r_3^{x,y}, \quad s_1 + s_2 = s_3$$

Полагая

$$\begin{aligned} c_y &= \Delta^{-1} (\nabla_k^{xx} \omega_3 (\nabla_k^{xx} \omega_1 + \nabla_k^{xx} \omega_2) - \nabla_k^{xx} \omega_1 \nabla_k^{xx} \omega_2) \\ r_{1,2}^{x,y} &= (c_x \Delta)^{-1} (\nabla_k^{xx} \omega_3 (\nabla_k^y \omega_{1,2} - \nabla_k^y \omega_{2,1}) + \nabla_k^{xx} \omega_{2,1} (\nabla_k^y \omega_3 - \nabla_k^y \omega_{1,2})) \\ \Delta &= \nabla_k^{xx} \omega_3 (\nabla_k^y \omega_1 \nabla_k^{xx} \omega_2 + \nabla_k^y \omega_2 \nabla_k^{xx} \omega_1) - \nabla_k^y \omega_3 \nabla_k^{xx} \omega_1 \nabla_k^{xx} \omega_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

подставляя (3.3) в (2.1) и проводя масштабное преобразование ϕ_j , находим

$$\ddot{\phi}_j - \Delta_j \phi_j = \phi_k \phi_l, \quad (j, k, l) = (1, 2, 3) \quad (3.5)$$

$$\Delta_j = (2s_j + 2\nabla_k^y \omega_j^y + \nabla_j^{xx} (r_j^x)^2) / (c_x^2 \nabla_k^{xx} \omega_j)$$

Система уравнений (3.5) имеет интеграл

$$\sum_{j=1}^3 (\Delta_j \phi_j^2 - \dot{\phi}_j^2) + 2\phi_1 \phi_2 \phi_3 = C, \quad C = \text{const} \quad (3.6)$$

Заметим, что три величины Δ_j зависят от пяти произвольных постоянных $c_x, r_{1,2}^y, s_{1,2}$. Поэтому их всегда можно подобрать так, что все Δ_j будут одинаковы и равны $\Delta > 0$. В этом случае легко находится класс точных решений (3.5), выражающихся через эллиптические функции [14, 15]; среди этих решений имеются локализованные решения волноводного типа

$$\phi_j^* = -\frac{3}{2} \text{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \zeta \right) \quad (3.7)$$

В решениях (3.7) параметры $c_x, r_{1,2}^y, s_{1,2}$ не являются произвольными и связаны соотношениями, вытекающими из равенства $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 > 0$. Численно были найдены [15] некоторые частные решения системы (3.5) для других значений этих параметров. Покажем, что при достаточно малом изменении параметров Δ_i в окрестности Δ уравнения (3.5) допускают локализованные решения типа (3.7). Очевидно, что это семейство решений будет пятипараметрическим с параметрами $c_x, r_{1,2}^y, s_{1,2}$.

Последнее утверждение формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Предположим, что $\phi^* = (\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*)'$, $\phi_1^* = \phi_2^* = \phi_3^* = \phi^*$ – солитоноподобное решение системы (3.5) для $\Delta_i = \Delta$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда при достаточно малых μ_i существует семейство солитоноподобных решений $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)'$ уравнений (3.5) с $\Delta_i = \Delta + \mu_i$. Кроме того, справедливы оценки

$$|\phi - \phi^*| \leq c_0 |\mu| \exp(-\sigma |\zeta|)$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)'$, $\sigma < \sqrt{\Delta}$ и c_0 не зависит от μ .

Доказательство. Представим решение уравнений (3.5) для Δ_i , указанных в формулировке теоремы, в виде $\phi_i = \phi^* + \hat{\phi}_i$. Тогда система (3.5) может быть переписана в матричном виде

$$L\phi = g \quad (3.8)$$

$$L = \begin{vmatrix} \frac{d^2}{dx^2} - \Delta & -\phi^* & -\phi^* \\ -\phi^* & \frac{d^2}{dx^2} - \Delta & -\phi^* \\ -\phi^* & -\phi^* & \frac{d^2}{dx^2} - \Delta \end{vmatrix}$$

$$g_i = \mu_i \hat{\phi}_i + \mu_i \hat{\phi}^* + \hat{\phi}_k \hat{\phi}_l, \quad i \neq k \neq l$$

Определим далее банаховы пространства

$$C_{\sigma,j}^e = \left\{ \varphi \in C^j(\mathbf{R}), \sup_x \exp(\sigma|\zeta|) |\varphi^{(m)}| < \infty, \varphi(\zeta) = \varphi(-\zeta), j = 0, 2, m \leq j \right\}$$

и обозначим $X_\sigma = C_{\sigma,2}^e \times C_{\sigma,2}^e \times C_{\sigma,2}^e$ и $Y_\sigma = C_{\sigma,0}^e \times C_{\sigma,0}^e \times C_{\sigma,0}^e$. Очевидно, что $\hat{\phi}^* \in X_{\sqrt{\Delta}}$. Из теоремы о неявной функции следует существование и единственность $\Phi(\mu) \in X_\sigma$ (для достаточно малых μ), удовлетворяющих системе (3.5) если оператор $L: X_\sigma \rightarrow Y_\sigma$ имеет ограниченный обратный. Иными словами, требуется доказать, что уравнение

$$L\Phi = f \quad (3.9)$$

имеет единственное решение $\Phi \in X_\sigma$, для каждого $f \in Y_\sigma$. Система (3.9) эквивалентна системе, полученной из нее попарным вычитанием уравнений. Последняя в свою очередь эквивалентна уравнению

$$l\chi + \hat{\phi}^* \chi = f (l = d^2 / dx^2 - \Delta: C_{\sigma,2}^e \rightarrow C_{\sigma,0}^e), \quad (3.10)$$

где χ – разность $\hat{\phi}_i$ и $\hat{\phi}_j$ с любыми неравными индексами i и j , а $f \in C_{\sigma,0}^e$. Таким образом, доказательство обратимости оператора L сводится к доказательству того, что уравнение (3.10) имеет единственное решение для любых f из $C_{\sigma,0}^e$.

Оператор l обратим, так как $\Delta > 0$. Поэтому (3.10) можно переписать в виде

$$(1 + l^{-1}\hat{\phi}^*)\chi = l^{-1}f$$

Оператор $l^{-1}\hat{\phi}^*: C_{\sigma,2}^e \rightarrow C_{\sigma,2}^e$, $\sigma < \sqrt{\Delta}$ компактен. В самом деле, ограниченное в $C_{\sigma,2}^e$ множество отображается этим оператором в ограниченное множество в $C_{\sigma,2}^e$ с элементами, имеющими равномерное экспоненциальное убывание на бесконечности. Это означает, что применима теорема Арцела – Асколи и образ ограниченного множества является предкомпактным. Покажем, что 1 не является собственным значением оператора $-l^{-1}\hat{\phi}^*$. Тогда из теоремы 1 на стр. 476 в [12] следует обратимость и непрерывность обратного оператора $(1 + l^{-1}\hat{\phi}^*)^{-1}$. Уравнение $l^{-1}\hat{\phi}^*\chi = \chi$ эквивалентно уравнению Шредингера с отрицательным рассеивающим потенциалом $\chi'' - \Delta\chi + \hat{\phi}^*\chi = 0$, а значит, соответствующий оператор Штурма – Лиувилля не имеет дискретного спектра. Отсюда следует, что единственным решением, принадлежащим $C_{\sigma,2}^e$, является $\chi = 0$.

Запишем (3.8) в виде

$$L\hat{\Phi} + G(\hat{\Phi}) = \Psi, \quad \|G\|_{Y_\sigma} \leq \gamma \|\hat{\Phi}\|_{X_\sigma}^2 \|\Psi\|_{X_\sigma} \leq c|\mu| \quad (3.11)$$

$\|\cdot\|_{X_\sigma}$ и $\|\cdot\|_{Y_\sigma}$ – нормы в соответствующих пространствах. Из (3.11) немедленно следуют оценки, указанные в формулировке теоремы.

4. Асимптотические формулы для нелинейных волноводов Продемонстрируем существование решений системы (3.5) волноводного типа, отличных от (3.7). Для этого используем метод редукции динамической системы, порожденной системой (3.5), на центральное многообразие (ЦМ) [13, 14] Поток на ЦМ описывает все ограниченные решения, не покидающие малой окрестности состояния покоя для всех положительных и отрицательных значений "времени". Роль "времени" для бегущих волн играет пространственная переменная $-\infty < x < \infty$. Все малые ограниченные решения динамической системы

$$\dot{w} = Aw + F(\mu, w) \quad (4.1)$$

($A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ – линейный оператор – постоянная матрица, среди собственных значений

которой находятся чисто мнимые, $F \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ для достаточно большого целого k , $F(0,0) = 0$, $\partial_w F(0,0) = 0$, μ – параметр бифуркации), лежат на ЦМ $w_1 = h(\mu, w_0)$, $w_0 \in E_0$, инвариантном подпространству, натянутому на собственные векторы, отвечающие чисто мнимым собственным значениям A , $w_1 \in E_h$, $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_h$ и $w = w_0 + w_1$. Функция h имеет второй порядок малости по μ и w_0 и наследует свойства симметрии системы (4.1).

Выделим [15] три последовательных этапа исследования существования солитоноподобных решений в рассматриваемом случае:

сведение динамической системы (3.5) шестого порядка к системе второго порядка, описывающей поток на ЦМ;

приближение системы на ЦМ последовательностью интегрируемых систем (в квазинормальной форме [14]) и описание солитоноподобных решений системы в квазинормальной форме;

доказательство грубости солитоноподобных решений по отношению к любым обратимым возмущениям высшего порядка по амплитуде.

Обратимость этих возмущений отвечает соответствующей симметрии исходных уравнений. Последовательность решений систем уравнений в квазинормальной форме, таким образом, является сколь угодно точным приближением солитоноподобного решения полной системы (3.5).

Положим в (3.5) $\varphi_1 = \varphi_3$, $\Delta_1 = \Delta_3 = \mu$, где μ – малая величина, $\Delta_2 = \Delta > 0$. В этом случае система (3.5) может быть представлена в форме (4.1), где $w = (\varphi_1, \varphi_2, \eta_1, \eta_2)'$, $\eta_j = \dot{\varphi}_j$, $j = 0, 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 \\ \varphi_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Заметим, что правая часть системы (3.5) в рассматриваемом случае антикоммутирует с изометрией $R = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, т.е. $AR = -RA$ и $F(\mu, Rw) = -RF(\mu, w)$. Это означает, что система (3.5) обратима, т.е. среди ее решений находятся решения с четными φ_1 и φ_2 и нечетными η_1 и η_2 . Такие решения будем называть также обратимыми. Собственные значения λ матрицы A удовлетворяют уравнению $\lambda^2(\lambda^2 - \Delta) = 0$, имеющему четыре корня, из них нуль кратности два лежит на мнимой оси. Заметим, что $|F(\mu, w)| \leq c(|\mu| |w| + |w|^2)$ для w , достаточно близких к нулю.

Пусть $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in E_0$, а $w_1 \in E_h$, и аналогично для F_0 и F_1 ; $A_0 = A|_{E_0}$, $A_1 = A|_{E_h}$ и система уравнений (3.5) имеет вид

$$\dot{w}_0 = A_0 w_0 + F_0(\mu, w_0 + w_1), \quad \dot{w}_1 = A_1 w_1 + F_1(\mu, w_0 + w_1) \quad (4.3)$$

Кроме того, очевидно, что существуют окрестности нуля $U'_0 \subset E_0$, $U'_1 \subset E_h$ и окрестность Λ точки $\mu = 0$, такие, что

$$F = (F_0, F_1)' \in C^k(\Lambda \times U'_0 \times U'_1, E_0 \times E_h)$$

$$F(0, 0), \quad \partial_w F(0, 0) = 0$$

Воспользуемся далее теоремой о центральном многообразии [14], согласно которой существуют окрестности нуля $U_0 \subset U'_0 \subset E_0$, $U_1 \subset U'_1 \subset E_h$, окрестность $\Lambda_0 \subset \Lambda$ точки $\mu = 0$ и функция

$$h(\mu, w_0) \in C^{k-1}(\Lambda_0 \times U_0, U_1)$$

обладающая следующими свойствами:

множество

$$M = \{(w_0, h(\mu, w_0)) \subset E_0 \times E_h | w_0 \in U_0\}$$

является локальным интегральным многообразием системы (4.3) с $\mu \in \Lambda_0$;

каждое решение системы (4.3) с $\mu \in \Lambda_0$, $w_0(\xi)$, $w_1(\xi) \in U_0 \times U_1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$ принадлежит M ;

$$h(0, 0) = \partial_{w_0} h(0, 0) = 0;$$

если $R_0: E_0 \rightarrow E_0$, $R_1: E_h \rightarrow E_h$ являются линейными изометриями, так что $F_j(\mu, R_0 w_0, R_1 w_1) = -R_j F_j(\mu, w_0, w_1)$, $A_j R_j = -R_j A_j$ ($j = 0, 1$), то $h(\mu, R_0 w_0) = R_1 h(\mu, w_1)$.

Из теоремы о ЦМ следует редукция системы (4.3) для решений остающихся в $U_0 \times U_1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Эти решения удовлетворяют уравнениям

$$\dot{w}_0 = A_0 w_0 + f_0(\mu, w_0), \quad f_0(\mu, w_0) = F_0(\mu, w_0 + h(\mu, w_0)) \quad (4.4)$$

Более того, решения уравнений (4.4) обратимы по отношению к матрице R_0 : $R = R_0 \oplus R_1$, $R_0: E_0 \rightarrow E_0$. В рассматриваемом случае размерность E_0 (а значит, и ЦМ) равна двум. Собственный и присоединенный векторы оператора A , соответствующие $\lambda = 0$, имеют вид

$$\varphi_0 = \text{col}(1, 0, 0, 0), \quad \varphi_1 = \text{col}(0, 0, 1, 0)$$

$$(A_0 \varphi_0 = 0, A_0 \varphi_1 = \varphi_0, R_0 \varphi_0 = \varphi_0, R_0 \varphi_1 = -\varphi_1)$$

а значит,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для $w_0 \in E_0$

$$w_0 = \text{col}(\varphi_1, \varphi_2, \eta_1, \eta_2) = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1$$

Присоединенный ψ_0 и собственный ψ_1 векторы оператора A^* , сопряженного оператору A , совпадают с φ_0 и φ_1 соответственно.

Уравнение (4.4) в базисе φ_0, φ_1 имеет вид

$$\dot{a} = A_0 a + g_0(\mu, a), \quad a = (a_0, a_1)' \quad (4.5)$$

и вектор $g_0 = O(\mu|a| + |a|^2)$ имеет компоненты $\langle F, \varphi_j \rangle$ ($j = 0, 1$), F – вектор (4.2) и $\langle, \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$, причем

$$\langle F, \varphi_0 \rangle = 0, \quad \langle F, \varphi_1 \rangle = 1/2(\mu a_0 + a_0 \varphi_2)$$

Функции φ_2 и η_2 имеют второй порядок малости по a и выражаются через вектор функцию $h(\mu, a) = (h_0, h_1)'$, которая фигурирует в теореме о ЦМ, по формуле $\varphi_2 = h_0 + h_1$.

Вычислим далее компоненты h_0 и h_1 с точностью до членов порядка $\mu|a|^2 + |a|^2$, удовлетворяющие второй системе уравнений (4.3), из которой в данном случае имеем

$$\varphi_2 = -\frac{1}{\Delta} a_0^2 - \frac{2}{\Delta^2} a_1^2 + o(\mu|a| + |a|^2)$$

Отсюда следует, что поток на ЦМ имеет вид

$$\dot{a}_0 = a_1, \quad \dot{a}_1 = \frac{1}{2} \mu a_0 - \frac{1}{2\Delta} a_0^3 - \frac{1}{\Delta^2} a_0 a_1^2 + o(\mu|a| + |a|^3) \quad (4.6)$$

Производя масштабные преобразования $\alpha_0 = 2\Delta|\mu|^{1/2} \beta_0(\xi)$, $\alpha_1 = 2\Delta|\mu|^{1/2} \delta\beta_1(\xi)$, $\xi = \delta\zeta$, $\delta = |\mu|/2|^{1/2}$, получим с точностью до $O(\mu)$

$$\partial_\xi \beta_0 = \beta_1, \quad \partial_\xi \beta_1 = \text{sign}(\mu)\beta_0 - \beta_0^3 \quad (4.7)$$

Уравнения (4.7) для $\mu > 0$ имеют решения типа уединенных волн $\beta_0 = \pm\sqrt{2} \text{ch}^{-1} \xi / 2$.

Теорема 2 (о грубости солитоноподобных решений). Предположим, что $\beta^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)$ – солитоноподобное решение уравнений (4.8). Тогда для достаточно малых $\mu_0, \mu \in (0, \mu_0)$ существует семейство солитоноподобных решений $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ (μ) полной системы (4.7). Справедливы оценки

$$|\alpha - \alpha^*| \leq c_0 \mu \exp(-\sigma|\zeta|)$$

где c_0 зависит только от $\mu_0, \sigma < 1$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Рассматриваемые решения, таким образом, имеют вид

$$\varphi_1^* = \varphi_3^* = \pm \frac{\sqrt{2}\Delta|\mu|^{1/2}}{\text{ch}(|\mu|/2|^{1/2}\zeta)} + O(\mu), \quad \varphi_2^* = -\frac{2\Delta|\mu|}{\text{ch}^2(|\mu|/2|^{1/2}\zeta)} + o(\mu)$$

5. Устойчивость нелинейных волноводов. В разд. 3, 4 было доказано существование пятипараметрических семейств решений волноводного типа уравнений (3.5). Исследуем их эволюцию при медленных локализованных возмущениях фронта, амплитуды и фазы волн, распространяющихся в волноводе:

$$\varphi_j = \varphi_j(c_x(\mu Y, \mu T)\xi + c_y Y + T) \exp i(r_j^x \xi + r_j^y Y + s_j T + \theta_j(\mu Y, \mu T))$$

$$r_1^x = R_1 / c_x, \quad r_2^x = R_2 / c_x, \quad r_3^x = r_1^x + r_2^x, \quad \theta_3 = \theta_1 + \theta_2, \quad \mu \ll 1 \quad (5.1)$$

Медленное изменение c_x означает малое изменение фронта и амплитуды солитона φ_j . Функции $\theta_j(\mu Y, \mu T)$ соответствуют медленно меняющейся фазе волн. При $\mu = 0$ функции (5.1) удовлетворяют уравнениям (3.5).

Подставляя (5.1) в (2.1), в первом порядке по μ находим

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \zeta} \xi \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{T}} + \nabla_k^y \omega_j \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \right) c_x + \varphi_j \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{T}} + \nabla_k^y \omega_j \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \right) \theta_j = 0$$

$$\tilde{T} = \mu T, \quad \tilde{Y} = \mu Y$$

Интегрируя эти уравнения по ξ от $-\infty$ до ∞ , получаем систему, общее решение которой имеет вид

$$c_x = \exp(f_1 + f_2 - f_3), \quad f_j = f_j(\tilde{Y} - \nabla_k^y \omega_j \tilde{T})$$

$$\theta_1 = f_2 - f_3, \quad \theta_2 = f_1 - f_3, \quad \theta_3 = f_1 - f_3$$

и описывает распространение малых возмущений вдоль фронта нелинейного волновода, параллельного прямой $c_x X + c_y Y = 0$. Возмущения φ_j изменяют кривизну фронта и фазы резонансно взаимодействующих волн и распространяются со своими групповыми скоростями. Проекции их скоростей на ось Y равны $\nabla_k^y \omega_j$.

Итак, доказана устойчивость рассматриваемых решений по отношению к медленным изменениям границ волновода и амплитуд волн, распространяющихся вдоль него.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17355) и Международного научного фонда (MDM000, MFE000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaup D.J. The three wave interaction – a nondispersive phenomenon // Stud. Appl. Math. 1976. V. 55. N 1. P. 9–44.
2. Kaup D.J., Reiman A., Bers A. Space-time evolution of nonlinear three wave interaction. I // Rev. Modern. Phys. 1979. V. 51. N 2. P. 275–309.
3. Захаров В.Е., Манаков С.В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. N 5. С. 1654–1673.
4. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 231 с.
5. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. N 2. С. 86–94.
6. Марченко А.В. О гамильтоновом подходе к исследованию потенциальных движений идеальной жидкости // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 102–108.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
9. Craik A.D.D. Wave interaction and fluid flows. Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press., 1985. 322 с.
10. Сибгатуллин Н.Р. Группы Ли-Беклунда некоторых модельных уравнений механики сплошной среды и классических полей // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. N 1. С. 302–305.
11. Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р. Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. N 6. С. 57–64.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
13. Плисс В.А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1964. Т. 28. N 6. С. 1297–1324.
14. Iooss G., Adelmeyer M. Topics in bifurcation theory and applications. River Edge: World Scient. Publ. 1992. 160 p.
15. Iooss G., Kirchgässner K. Water waves for small surface tension: an approach via normal form // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1992. V. 122A. N 3/4. P. 267–299.

Москва

Поступила в редакцию
24.VIII.1994