

УДК 532.59;534.1

© 1997 г. Ли Чжи, Н.Р. Сибгатуллин

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ

С использованием гамильтонова формализма дается вывод уравнений, описывающих длинные волны на поверхности бесконечного слоя воды над горизонтальным ровным дном, при учете членов второго порядка по малым параметрам нелинейности и дисперсии, т.е. уточняются уравнения Буссинеска в теории мелкой воды. Выведено нелинейное эволюционное уравнение для возвышения свободной поверхности. Найдено преобразование, превращающее это уравнение в одно из высших уравнений Кортевега – де Фриза (КдФ). С помощью одно- и двухсолитонных решений продемонстрированы особенности поведения волн, описываемых приведенным уравнением и представляющих собой уточненный вариант солитонов КдФ.

Было опубликовано большое количество работ [1–5], где рассматривалась задача об учете членов более высокого порядка в теории длинных волн на поверхности воды. Основной результат статьи связан с получением и приведением к канонической форме для эволюционного уравнения, описывающего произвольные длинные волны, бегущие в одну сторону. Это уравнение допускает широкий класс решений, например, типа солитонов или конечнозонных решений, не сводящихся к описанию взаимодействия быстроосциллирующих волн.

1. Постановка задачи. Рассмотрим потенциальное движение воды над бесконечным горизонтальным дном. Вода считается идеальной несжимаемой однородной жидкостью и имеет глубину h в невозмущенном состоянии. Введем декартову систему координат (x, y, z) с осями i, j, k , причем ось z направлена вертикально вверх, $z = 0$ соответствует невозмущенной поверхности воды. Пусть $z = \eta(x, y, t)$ – уравнение свободной поверхности. Будем изучать длинные волны на поверхности воды, пренебрегая капиллярными силами и силами трения на дне.

Известно [6], что в линейном приближении скорость длинных волн на поверхности воды равна $\sqrt{gh}$, причем для волн, распространяющихся в одном направлении, горизонтальная скорость имеет порядок $\eta\sqrt{gh}/h$. Эти предположения дают подходящие масштабы нужных функций, и все дальнейшие рассуждения основаны на них.

Для анализа доминирующих слагаемых в длинноволновом приближении введем два безразмерных малых параметра ϵ и μ по формулам $\epsilon = h^2/\lambda^2$, $\mu = a/h$, где λ – характерная длина волн, a – характерная амплитуда волн. Будем рассматривать случай, когда $\epsilon \sim \mu$. Введем безразмерные переменные

$$x \rightarrow \lambda x, \quad y \rightarrow \lambda y, \quad z \rightarrow hz, \quad \eta \rightarrow a\eta, \quad t \rightarrow \frac{\lambda t}{\sqrt{gh}}, \quad \phi \rightarrow \frac{ga\lambda\phi}{\sqrt{gh}} \quad (1.1)$$

В сделанных предположениях движение воды описывается следующими уравнениями в безразмерной форме:

$$\phi_{zz} + \epsilon \Delta \phi = 0, \quad -1 < z < \mu\eta \quad (1.2)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z = -1 \quad (1.3)$$

$$\varphi_t + \frac{\mu}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{\mu}{2\varepsilon}\varphi_z^2 + \eta = 0, \quad z = \mu\eta \quad (1.4)$$

$$\eta_t + \mu\nabla\eta \cdot \nabla\varphi = \frac{\varphi_z}{\varepsilon}, \quad z = \mu\eta \quad (1.5)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

где φ – потенциал скорости. Уравнение (1.2) получается из уравнения Лапласа для потенциала скорости, (1.3) – условие непроницаемости на дне, а (1.4) и (1.5) – интеграл Коши – Лагранжа и кинематическое условие на свободной поверхности воды соответственно. Можно убедиться, что φ_z в соотношениях (1.4), (1.5) имеет порядок ε .

2. Вывод основных уравнений. Решение уравнения (1.2), удовлетворяющее граничному условию (1.3), имеет вид степенного ряда [7, 8]

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon^n (z+1)^{2n} \Delta^n f}{(2n)!} \quad (2.1)$$

где $f = \varphi(x, y, z = -1, t)$ – значение потенциала скорости воды на дне. В дальнейшем будем учитывать в уравнениях только члены порядков 1, ε , μ , ε^2 , μ^2 и $\varepsilon\mu$, т.е. ограничимся точностью $O(\varepsilon^2, \mu^2)$. Обозначим потенциал скорости на свободной поверхности через Φ , т.е. $\Phi = \varphi(x, y, z = \mu\eta, t)$. Отсюда и из (2.1) с точностью $O(\varepsilon^2, \mu^2)$ получим

$$f = \Phi + \frac{\varepsilon}{2}(1 + 2\mu\eta)\Delta\Phi + \frac{5\varepsilon^2}{24}\Delta^2\Phi \quad (2.2)$$

Подстановка (2.1) в (1.4), (1.5) при учете (2.2) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi_t + \eta + \frac{\mu}{2}(\nabla\Phi)^2 - \frac{\mu\varepsilon}{2}(\Delta\Phi)^2 &= 0 \\ \eta_t + \operatorname{div}[(1 + \mu\eta)\nabla\Phi] + \frac{\varepsilon}{3}\Delta[(1 + 3\mu\eta)\Delta\Phi] + \frac{2\varepsilon^2}{15}\Delta^3\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где дивергенция берется по переменным (x, y) .

Таким образом, функции η и Φ удовлетворяют соотношениям (2.3) и полностью определяют движение свободной поверхности. Было показано [9], что η и Φ – канонические переменные в гамильтоновом описании волн на поверхности воды в точной постановке, а именно движение свободной поверхности описывается следующими уравнениями в гамильтоновой форме:

$$\eta_t = \frac{\delta H}{\delta \Phi}, \quad \Phi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (2.4)$$

$$H = \frac{1}{2} \iint dx dy \left\{ \int_{-1}^{\mu\eta} \left[(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\varphi_z^2 \right] dz + \eta^2 \right\}$$

где интеграл берется по всему бесконечному объему воды. Можно показать, что при помощи (1.2), (1.3), (2.1), (2.2) гамильтониан H преобразуется к виду

$$H = \frac{1}{2} \iint dx dy \left[\eta^2 - \Phi(1 + \mu\eta)\Delta\Phi - \mu\Phi\nabla\Phi \cdot \nabla\eta - \frac{\epsilon}{3}\Phi\Delta^2\Phi - \right. \\ \left. - \mu\epsilon\Phi\Delta(\eta\Delta\Phi) - \frac{2}{15}\epsilon^2\Phi\Delta^3\Phi + O(\mu^3, \epsilon^3) \right]$$

Вычисляя вариацию H , из (2.4) получим опять уравнения (2.3).

В отличие от уравнений (2.3) в [10] выписана система уравнений для потенциала на свободной поверхности и ее возвышения с точностью до кубических членов без предположения о порядке характерного масштаба изменения решения. Для этого был введен специальный псевдодифференциальный оператор. Дано обобщение системы Бенни для описания взаимодействия четырех монохроматических волн на случай неровного дна и произвольной зависимости начальной формы волн от декартовых координат с помощью многомерного метода ВКБ (операторный метод Маслова дает глобальную асимптотику быстроосциллирующих решений, включая каустические поверхности). В принципе уравнения (2.3) можно было бы получить из системы (3) статьи [10], предполагая связь между параметрами дисперсии и нелинейности. Однако такой подход более сложный, чем применяемый в настоящей работе.

Далее ограничимся одномерным случаем, который соответствует длинным волнам, распространяющимся по прямому каналу с ровным дном. В этом случае следует заменить ∇ на $\partial/\partial x$, Δ на $\partial^2/\partial x^2$.

Введя обозначение $V = \Phi_x$, из (2.3) получим

$$V_t + \eta_x + \mu V V_x - \mu\epsilon V_x V_{xx} = 0$$

$$\eta_t + V_x + \mu(V\eta)_x + \frac{\epsilon}{3}V_{xxx} + \frac{2}{15}\epsilon^2 V_{xxxx} + \mu\epsilon(V_x\eta_{xx} + 2V_{xx}\eta_x + \eta V_{xxx}) = 0 \quad (2.5)$$

Очевидно, что вместо функции V можно ввести другие переменные, характеризующие скорость течения, например среднюю по глубине скорость или скорость на дне. В этих переменных получаются уравнения, совершенно аналогичные (2.5). Было дано [8] обоснование построенного приближения для уравнений мелкой воды. Поэтому уравнения (2.5) асимптотически более точные, чем уравнения Буссинеска [7, 8], так как при их выводе учтены слагаемые более высокого порядка в асимптотических разложениях. Следует ожидать, что по сравнению с уравнениями Буссинеска они могут описывать менее длинные и более интенсивные волны.

Из (2.5) выделим эволюционные уравнения как для функции V , так и для η , рассматривая волны, распространяющиеся в одну сторону от источника. Для этого предположим, что функции V и η связаны следующим образом:

$$V = \eta + c_1\mu\eta^2 + c_2\epsilon\eta_{xx} + c_3\mu^2\eta^3 + c_4\epsilon^2\eta_{xxx} + c_5\mu\epsilon\eta_x^2 + c_6\mu\epsilon\eta\eta_{xx} \quad (2.6)$$

где шесть постоянных c_i подлежат определению. Если рассмотреть соотношение (2.6) как условие совместности для уравнений (2.5), то можно однозначно определить c_i и получить эволюционное уравнение (уточненное уравнение КдФ)

$$\eta_t + \frac{3}{2}\mu\eta\eta_x + \frac{\epsilon}{6}\eta_{xxx} + \frac{19}{360}\epsilon^2\eta_{xxxx} - \frac{3}{8}\mu^2\eta^2\eta_x + \frac{5}{12}\mu\epsilon\eta\eta_{xxx} + \frac{23}{24}\mu\epsilon\eta_x\eta_{xx} = 0 \quad (2.7)$$

где использована подвижная координата $X = x - t$. Аналогично можно получить эволюционное уравнение для V .

Оказывается, существует преобразование, превращающее (2.7) во вполне интегрируемое высшее уравнение КдФ с той же степенью точности, с которой было выделено это уравнение. Об этом идет речь в разд. 3.

Отметим, что в [4, 5] содержатся неправильные результаты. Во-первых, при

выводе системы уравнений типа (2.5) были учтены не все члены порядка ϵ^2 . Во-вторых, при выделении эволюционного уравнения из системы уравнений типа (2.5) авторы этих работ предположили, что

$$V = \eta + \mu A + \epsilon B + \mu \epsilon C + \epsilon^2 D + \mu^2 E$$

где A, B, C, D, E функционально зависят от η , причем для исключения производных по времени t использовали правило дифференцирования сложной функции: $A_t = A_\eta \eta_t$, $B_t = B_\eta \eta_t$ и т.д. Однако для функциональных зависимостей, например $B = \frac{1}{6} \eta_{xx}$, это правило уже не годится. Поэтому необходимо предположить наличие связи (2.6), где явно указаны функциональные зависимости. Полученные в [4, 5] эволюционные уравнения для возвышения свободной поверхности η в связи со сказанным являются неправильными.

3. Связь уравнений (2.7) с высшим уравнением КдФ. Известно [11, 12], что наряду с уравнением КдФ существует класс уравнений, который здесь назовем классом КдФ и обладающий следующими свойствами: во-первых, каждое уравнение этого класса имеет гамильтонову структуру и может быть записано в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \tilde{h}}{\delta u}$$

где $\tilde{h}$ – гамильтониан данного уравнения; во-вторых, каждый из гамильтонианов класса КдФ является интегралом движения для всех остальных уравнений этого класса, и эти интегралы коммутируют друг с другом относительно скобки Пуассона:

$$\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \tilde{h}_2}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \tilde{h}_1}{\delta u} dx = 0$$

При этом считается, что функция u быстро убывающая, т.е. достаточно быстро стремится к нулю вместе со своими производными при $x \rightarrow \pm \infty$. Все уравнения класса КдФ, кроме самого уравнения КдФ, называются высшими уравнениями КдФ.

Можно показать, что уравнение

$$u_t + E u u_x + F u_{xxx} + A u_{xxxxx} + B u^2 u_x + C u u_{xxx} + D u_x u_{xx} = 0$$

принадлежит классу КдФ, если его коэффициенты удовлетворяют соотношениям $CE = 2BF$, $3CF = 5AE$, $D = 2C$.

Рассмотрим теперь уравнение (2.7) в классе быстро убывающих функций. Замечательно, что преобразованием¹

$$\eta = \zeta + a_1 \epsilon \zeta_{xx} + a_2 \mu \zeta^2 + a_3 \mu \zeta_x \int_{-\infty}^x \zeta dX \quad (3.1)$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольные постоянные порядка единицы, уравнение (2.7) сводится с точностью до $O(\mu^2, \epsilon^2)$ к уравнению

$$\begin{aligned} \zeta_t + \frac{3}{2} \mu \zeta \zeta_x + \frac{1}{6} \epsilon \zeta_{xxx} + \frac{19}{360} \epsilon^2 \zeta_{xxxxx} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{3}{4} a_3 + \frac{3}{2} a_2 \right) \mu^2 \zeta^2 \zeta_x + \\ + \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} a_3 \right) \mu \epsilon \zeta \zeta_{xxx} + \left(\frac{17}{24} - 3a_1 + a_2 + \frac{1}{2} a_3 \right) \mu \epsilon \zeta_x \zeta_{xx} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Сходимость интеграла в (3.1) обеспечивается предположением о том, что функция ζ принадлежит классу быстро убывающих функций. Преобразование вида (3.1) впервые было указано Кодамой [13], рассмотревшим матричные уравнения типа КдФ.

¹ В [3] ошибочно утверждалось, что уравнение типа (2.7) может быть сведено к высшему уравнению КдФ точечными (алгебраическими) преобразованиями.

Выберем постоянные a_1, a_2, a_3 таким образом, чтобы уравнение (3.2) являлось высшим уравнением КдФ. Решая линейную систему трех уравнений относительно a_1, a_2, a_3 , определим однозначно

$$a_1 = 1/2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3/4 \quad (3.3)$$

Итак, в задаче о распространении длинных волн на поверхности воды возникает высшее уравнение КдФ. Из преобразования (3.1) видно, что решение уравнения (2.7) можно определить лишь с точностью $O(\mu, \epsilon)$. Сделав масштабное преобразование

$$\zeta = \frac{2}{3\mu} q, \quad t = 6\sqrt{\epsilon} T, \quad X = \sqrt{\epsilon} \chi \quad (3.4)$$

перепишем высшее уравнение КдФ (3.2), (3.3) в стандартном виде

$$q_t + 6qq_\chi + q_{\chi\chi\chi} + \frac{19}{360} (30q^2 q_\chi + q_{\chi\chi\chi\chi\chi} + 20q_\chi q_{\chi\chi} + 10qq_{\chi\chi\chi}) = 0 \quad (3.5)$$

Задача Коши для уравнения (3.5) с начальным условием $q(X, 0) = q_0(X)$, где $q_0(X)$ – быстро убывающая функция, решается методом обратной задачи рассеяния, который подробно излагается в ряде книг по теории солитонов. Компоненты матрицы рассеяния $a(k, T), b(k, T)$ эволюционируют в рассматриваемом случае следующим образом:

$$a(k, T) = a(k, 0), \quad b(k, T) = b(k, 0) \exp \left[8ik^3 T \left(1 - \frac{19}{15} k^2 \right) \right]$$

где начальные значения $a(k, 0), b(k, 0)$ определяются из асимптотик на $\pm\infty$ решения уравнения Шредингера с потенциалом $q_0(X)$:

$$\psi_{\chi\chi} + (q_0 + k^2)\psi = 0$$

$$\psi(X) \sim e^{-ikX}, \quad X \rightarrow -\infty$$

$$\psi(X) \sim a(k, 0)e^{-ikX} + b(k, 0)e^{ikX}, \quad X \rightarrow +\infty$$

4. Солитоны на воде. Простейшим среди точных решений уравнения (3.5) будет N -солитонное решение, которое получается для безотражательного потенциала q (когда $b(k, T) \equiv 0$). Оно может быть записано в форме

$$q(X, T) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A \quad (4.1)$$

где A – квадратная матрица порядка N с элементами

$$A_{mn} = \delta_{mn} + \frac{c_m(T)c_n(T)}{\kappa_m + \kappa_n} \exp[-(\kappa_m + \kappa_n)X]$$

$$c_m(T) = c_m(0) \exp \left[4\kappa_m^3 T \left(1 + \frac{19}{15} \kappa_m^2 \right) \right]$$

δ_{mn} – символ Кронекера, $c_m(0), \kappa_m$ – положительные постоянные. Если вернуться к исходной переменной η по (3.1), (3.3), (3.4), то получим N -солитонное решение уравнения (2.7). Более сложными являются точные конечнозонные решения, выражающиеся через тета-функцию Римана [11].

Односолитонное решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\eta(\xi) = \alpha \operatorname{sech}^2 \xi + \frac{1}{2} \alpha^2 \mu \operatorname{sech}^2 \xi + \frac{3}{4} \alpha^2 \mu \operatorname{sech}^4 \xi + O(\mu^2) \quad (4.2)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{3\alpha\mu}{4\varepsilon}} \left[X - \left(\frac{\alpha\mu}{2} + \frac{19}{40}\alpha^2\mu^2 \right) t \right]$$

где $\alpha = 4\kappa_1^2 / (3\mu) \sim 1$ (начальная фаза опущена). Амплитуда солитона (4.2) равна $\alpha + \frac{5}{4}\alpha^2\mu^2$, а скорость его в подвижной системе равна $\frac{1}{2}\alpha\mu + \frac{19}{40}\alpha^2\mu^2$. Если положить $\alpha = 1 - \frac{5}{4}\mu$, то из (4.2) найдем скорость солитона с единичной амплитудой, равную $\frac{1}{2}\mu - \frac{3}{20}\mu^2$, что меньше скорости солитона КдФ, при этом ширина солитона в уточненной теории больше ширины солитона КдФ. Этот результат был получен ранее другим методом в [1], где рассматривалось лишь стационарное решение. Замечательно, что скорости солитонов в одно- и двухсолитонных решениях (4.1) согласно уточненной теории отлично согласуются с экспериментальными данными [14].

Авторы благодарят А.Т. Ильичева, обратившего их внимание на статью [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Laitone E.V. The second approximation to cnoidal and solitary waves // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 3. P. 430–444.
2. Егоров Ю.А., Молотков И.А. О влиянии переменной глубины, а также нелинейных и дисперсионных членов второго порядка на распространение гравитационных волн // Проблемы матем. физ. 1986. № 2. С. 113–124.
3. Малых А.А., Серегин И.А. Старшие приближения в теории длинных волн на поверхности тяжелой жидкости // Моделирование в механике. 1988. Т. 2(19). № 6. С. 77–82.
4. Арсеньев С.А. К теории длинных волн на воде // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 635–638.
5. Арсеньев С.А., Вахрушев М.М., Шелковников Н.К. Новое эволюционное уравнение для нелинейных длинных волн на воде // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1995. Т. 36. № 2. С. 74–80.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.
9. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
10. Доброхотов С.Ю. Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 1. С. 63–67.
11. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
12. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 233 с.
13. Kodama Y. Normal forms for weakly dispersive wave equations // Phys. Lett. Ser. A. 1985. V. 112. № 5. P. 193–196.
14. Weidman P.D., Maxworthy T. Experiments on strong interactions between solitary waves // J. Fluid Mech. 1978. V. 85. № 3. P. 417–431.