

УДК 533.6.011

© 1997 г. Л.М. Зигангареева, О.М. Киселев

**О ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ, ОБТЕКАЕМЫХ  
С МАКСИМАЛЬНЫМ КРИТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ МАХА**

Рассматривается задача о построении головной части полубесконечного тела вращения, обтекаемого осесимметричным потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с максимальным критическим числом Маха. Предлагается численно-аналитический метод решения задачи. Приводятся результаты решения для совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

Среди всех тел, удовлетворяющих определенным геометрическим ограничениям, тела, реализующие максимально возможное критическое число Маха, не испытывают волнового сопротивления в максимальном диапазоне скоростей набегающего потока. Ниже будем называть такие тела оптимальными.

Структура плоских симметричных оптимальных тел и оптимальных тел вращения в потоке идеального газа была впервые исследована в [1], затем исследования были продолжены в [2]. Было установлено, что для широкого класса геометрических ограничений образующие оптимальных тел состоят из прямолинейных участков и участков, на которых скорость газа постоянна и равна критической. Была, в частности, поставлена задача (назовем ее задачей А) о построении оптимального тела вращения с заданным отношением толщины к длине и было показано, что задача А сводится к задаче об осесимметричном обтекании диска газом по схеме Рябушинского [3] при критической скорости на свободной поверхности [1]. Эффективный численно-аналитический метод расчета осесимметричного обтекания конуса произвольного угла раствора идеальным газом по схеме Рябушинского был предложен авторами [4]. С помощью этого метода получено [5] решение задачи А для совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим следующую задачу (назовем ее задачей Б). Пусть полубесконечный круглый прямой цилиндр обтекается потоком идеального газа, направленным вдоль его оси. Требуется деформировать головную (прилегающую к торцу) часть цилиндра так, чтобы полученное тело вращения обтекалось безотрывно с максимально возможным значением критического числа Маха  $M_*$  при выполнении одного из условий

$$L/R \leq l_0, \quad S'/R^2 \leq m_0, \quad W'/R^3 \leq n_0 \quad (1.1)$$

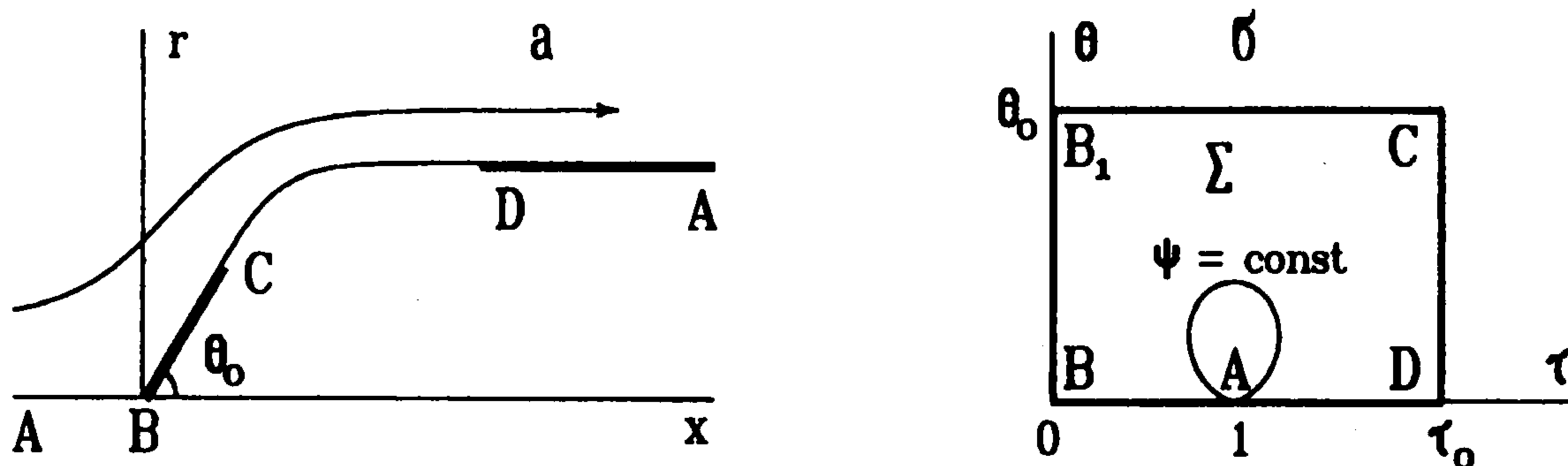
Здесь  $R$  – радиус цилиндра,  $L$  – длина головной части тела (деформируемой части цилиндра),  $S'$  и  $W'$  – площадь в меридианной полуплоскости и объем, теряемые при деформации цилиндра,  $l_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$  – заданные постоянные. Таким образом,  $S' = LR - S$ ,  $W' = \pi LR^2 - W$ , где  $S$  и  $W$  – площадь в меридианной полуплоскости и объем головной части тела. Неравенства (1.1) ограничивают потерю «вместимости» существовавшего первоначально тела.

С помощью теоремы сравнения [1, 2] можно показать, что головная часть оптимального полубесконечного тела вращения, удовлетворяющего одному из условий (1.1), образована диском и соединяющей его с цилиндром поверхностью тока, в каждой

точке, которой скорость газа равна критической. Таким образом, задача Б сводится к задаче об осесимметричном обтекании диска газом по схеме Жуковского – Рошко [3] при критической скорости на свободной поверхности.

Отметим, что результаты расчетов критического числа Маха  $M_*$  для некоторых видов головной части полубесконечного тела вращения содержатся в [6–9]. Результаты решения задачи о профилировании головной или кормовой части плоского симметричного полубесконечного тела, реализующего максимум  $M_*$ , приведены в [10].

**2. Расчет дозвукового обтекания конуса по схеме Жуковского–Рошко.** Рассмотрим осесимметричное дозвуковое обтекание кругового конуса сжимаемой жидкостью (газом) по схеме Жуковского–Рошко. Жидкость будем считать идеальной и невесомой, а течение – стационарным, безвихревым, изэнтропическим. Предлагаемый ниже численно-аналитический метод расчета такого течения является аналогом метода, предложенного авторами для исследования обтекания конуса по схеме Рябушинского [4].



Фиг. 1

В полуплоскости цилиндрических координат  $x, r$  область, занятая течением, ограничена участком  $AB$  оси  $x$ , образующей конуса  $BC$ , составляющей с осью  $x$  угол  $\theta_0$ , дугой  $CD$  свободной поверхности и полупрямой  $DA$ , параллельной оси  $x$  (фиг. 1, а).

Пусть  $\lambda$  – приведенная скорость,  $\theta$  – угол наклона скорости к оси  $x$ ,  $\lambda_a$  и  $\lambda_c$  – значения  $\lambda$  в бесконечно удаленной точке  $A$  и на  $CD$  соответственно ( $\lambda_a < \lambda_c \leq 1$ ),  $\tau = \lambda / \lambda_a$ ,  $\tau_0 = \lambda_c / \lambda_a$ . В плоскости переменных  $(\tau, \theta)$  области течения соответствует прямоугольник  $\Sigma = \{(\tau, \theta) | 0 < \tau < \tau_0, 0 < \theta < \theta_0\}$  (фиг. 1, б; точке торможения  $B$  отвечает отрезок  $BB_1$ ).

Пусть  $\rho$  – плотность жидкости,  $\rho_0$  – значение  $\rho$  в точке торможения,  $v = \rho / \rho_0$ ,  $M$  – число Маха, причем  $v$  и  $M$  – известные аналитические функции  $\tau, y = r^2/2, Y = v\tau y, \psi$  – функция тока, вводимая с помощью соотношений

$$\tau \cos \theta = (rv)^{-1} \psi_r, \quad \tau \sin \theta = -(rv)^{-1} \psi_x$$

(для обозначения частных производных по  $x, r, \tau, \theta$  используются нижние индексы).

Известно [11, 4], что функции  $\psi = \psi(\tau, \theta)$  и  $y = y(\tau, \theta)$  удовлетворяют соотношениям

$$R = R(\psi, Y) = \sin \theta Q^2 L - P_\theta Q + P Q_\theta = 0$$

$$L = L(\psi) = (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} + \tau^2 \psi_{\tau\tau} + (1 + M^2) \tau \psi_\tau \quad (2.1)$$

$$P = P(\psi) = \sin^2 \theta [\tau^2 \psi_\tau^2 + (1 - M^2) \psi_\theta^2], \quad Q = Q(\psi, Y) = 2Y + \psi_\theta \sin \theta$$

$$y_\tau = [(M^2 - 1) \psi_\theta \sin \theta + P / Q + \tau \psi_\tau \cos \theta] (v\tau^2)^{-1}$$

$$y_\theta = (\tau \psi_\tau \sin \theta + \psi_\theta \cos \theta) (v\tau)^{-1} \quad (2.2)$$

На границе области  $\Sigma$  должны выполняться условия  
 $\psi = 0$  на  $ABB_1CDA$ ,  $y = 0$  на  $ABB_1$ ,  $y = y_d$  на  $AD$  (2.3)

где  $y_d$  – некоторая положительная постоянная.

С помощью (2.2), (2.3) можно выразить  $Y$  через  $\psi$ :

$$Y = Y(\psi) = \psi \cos \theta + \int_0^\theta (\tau \psi_\tau + \psi) \sin \theta d\theta + \nu \tau \Omega(\tau) \quad (2.4)$$

$$\Omega(\tau) = 0, \quad \tau < 1; \quad \Omega(\tau) = y_d, \quad \tau > 1$$

Таким образом, задача сводится к определению функции  $\psi(\tau, \theta)$ , удовлетворяющей в области  $\Sigma$  соотношениям (2.1), (2.4), граничному условию (2.3) и условию  $\psi > 0$  при  $(\tau, \theta) \in \Sigma$ .

Функцию  $\psi$  представим в виде  $\psi = \psi^0 + \chi$ , где  $\psi^0$  – сингулярная часть функции тока, описывающая ее поведение в окрестности образа бесконечно удаленной точки  $A$ . Функцию  $\psi^0$  будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\theta$ , полагая

$$\psi^0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots, \quad \psi_k = h_k(\theta) f_k(\omega) \quad (2.5)$$

$$h_{k+1}(\theta) / h_k(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\omega = \text{arctg}(\theta / q), \quad q = \alpha \zeta, \quad \zeta = \tau - 1, \quad \alpha = \sqrt{1 - M_a^2} \quad (2.6)$$

и требуя выполнения условий

$$\psi_k = 0 \quad \text{на } BAD, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \psi_1 > 0, \quad (\tau, \theta) \in \Sigma \quad (2.7)$$

Здесь  $M_a$  – значение  $M$  при  $\tau = 1$  (число Маха набегающего потока),  $\omega \in (0, \pi)$  при  $(\tau, \theta) \in \Sigma$ .

Главный член асимптотического разложения (2.5) будем искать в форме  $\psi_1 = \theta^{-n} f_1(\omega)$  ( $n = \text{const}$ ,  $n > 0$ ).

Используя (2.6), всякую аналитическую функцию  $\tau$  можно представить в виде ряда по степеням  $\theta$  с коэффициентами, зависящими от  $\omega$ . В частности,

$$\tau = 1 + \alpha^{-1} \theta \text{ctg} \omega, \quad 1 - M^2 = a_0 + a_1 \alpha^{-1} \theta \text{ctg} \omega + O(\theta^2)$$

$$\tau(1 + M^2) = c_0 + c_1 \alpha^{-1} \theta \text{ctg} \omega + O(\theta^2) \quad (2.8)$$

$$a_0 = \alpha^2, \quad a_1 = -(dM^2 / d\tau)|_{\tau=1}, \quad c_0 = 2 - \alpha^2, \quad c_1 = c_0 - a_1$$

С помощью (2.8) и соотношений  $\omega_\theta = \theta^{-1} \sin \omega \cos \omega$ ,  $\omega_\tau = -\alpha \theta^{-1} \sin^2 \omega$  можно показать, что при  $\psi_1 = \theta^{-n} f_1(\omega)$

$$Y(\psi_1) = \theta^{-n} f_1 + O(\theta^{-n+1}), \quad L(\psi_1) = L_1 + \Delta L_1, \quad P(\psi_1) = P_1 + \Delta P_1$$

$$Q(\psi_1) = Q_1 + \Delta Q_1, \quad R(\psi_1) = R_1 + \Delta R_1$$

$$L_1 = \alpha^2 \theta^{-n-2} [(n^2 + n) f_1 - 2n s f_1' + s^2 f_1'']$$

$$P_1 = \alpha^2 \theta^{-2n} (n^2 f_1^2 - 2n s f_1 f_1' + s^2 f_1'^2), \quad Q_1 = \theta^{-n} [(2 - n) f_1 + s f_1']$$

$$P_{1\theta} = \alpha^2 \theta^{-2n-1} (-2n^3 f_1^2 + st(6n^2 - 2n + 4ns^2) f_1 f_1' + \\ + s^2(2t^2 - 2nt^2 - 2n) f_1'^2 - 2ns^2 t^2 f_1 f_1'' + 2s^3 t f_1' f_1'')$$

$$Q_{1\theta} = \theta^{-n-1} [(n^2 - 2n) f_1 + st(3 - 2n - 2s^2) f_1' + s^2 t^2 f_1'']$$

$$\Delta L_1 = O(\theta^{-n-1}), \quad \Delta P_1 = O(\theta^{-2n+1}), \quad \Delta Q_1 = O(\theta^{-n+1})$$

$$R_1 = \theta Q_1^2 L_1 - P_{1\theta} Q_1 + P_1 Q_{1\theta} = O(\theta^{-3n-1}), \quad \Delta R_1 = O(\theta^{-3n})$$

где  $s = \sin \omega$ ,  $t = \cos \omega$ ,  $Q(\psi) = Q(\psi, Y(\psi))$ ,  $R(\psi) = R(\psi, Y(\psi))$ .

Приравнявая нулю  $R_1$  – главный член в разложении  $R(\psi_1)$  по степеням  $\theta$ , получим дифференциальное уравнение относительно  $f_1(\omega)$ , из которого после замены  $f_1(\omega) = \sin^n \omega \varphi(\omega)$  приходим к уравнению

$$[4 + (n^2 - 4n)s^2] \varphi^2 \varphi'' + [(4 + 2n - n^2)s^2 - 4] \varphi \varphi'^2 + \\ + st(\varphi'^3 + n^2 \varphi^2 \varphi') + (4n^2 - 2n^3)s^2 \varphi^3 = 0 \quad (2.9)$$

Из (2.7) для  $\varphi(\omega)$  получаются условия

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0; \quad \varphi(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi \quad (2.10)$$

Анализ показывает, что существует единственное (с точностью до постоянного множителя при  $\varphi$ ) решение задачи (2.9), (2.10):  $n = 1$ ,  $\varphi = \sin^2 \omega$ . Таким образом,

$$\psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega = \theta^2 (\theta^2 + q^2)^{-3/2} \quad (2.11)$$

В плоскости переменных  $q, \theta$  кривые  $\psi_1 = c = \text{const}$  имеют параметрическое представление  $q = c^{-1} \sin^2 \omega \cos \omega$ ,  $\theta = c^{-1} \sin^3 \omega$ . Они являются подобными замкнутыми кривыми знакопостоянной кривизны, касающимися оси  $q$  в начале координат, симметричными относительно оси  $\theta$ .

Можно убедиться, что при  $\psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega$

$$\int_0^\theta \psi_{1\tau} \theta d\theta = \alpha(3 \cos \omega - \cos^3 \omega - 2p), \quad p = \text{sign}(\tau - 1)$$

Поэтому, согласно (2.4),

$$Y(\psi_1) = \theta^{-1} \sin^3 \omega + \alpha(3 \cos \omega - \cos^3 \omega - 2p) + v_a \Omega(\tau) + O(\theta)$$

где  $v_a$  – значение  $v$  при  $\tau = 1$ . Чтобы функция  $Y(\tau, \theta)$  сохраняла непрерывность при переходе через прямую  $\tau = 1$ , необходимо положить  $\Omega(1) = 2\alpha v_a^{-1}$ ,  $\Omega(\tau) = y_d = 4\alpha v_a^{-1}$  при  $\tau > 1$ . Таким образом,

$$Y(\psi_1) = \theta^{-1} \sin^3 \omega + \alpha(3 \cos \omega - \cos^3 \omega + 2) + O(\theta)$$

Функция  $h_1(\theta)$  в представлении  $\psi_1 = h_1(\theta) f_1(\omega)$  могла бы быть выбрана в более общей форме, чем  $h_1(\theta) = \theta^{-n}$ . Положив, например,  $h_1(\theta) = \theta^{-n} (\ln \theta)^m$ , с помощью приемов, использованных выше, получили бы  $\psi_1 = \theta^{-1} (\ln \theta)^m \sin^3 \omega$  при произвольном  $m = \text{const}$ . Поэтому правильность результата  $\psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega$  не очевидна. Для ее подтверждения необходимо убедиться в возможности отыскания следующих за  $\psi_1$  членов в асимптотическом разложении (2.5).

В результате подстановки  $\psi = \psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega$  в уравнение (2.1) возникающие при этом члены порядка  $\theta^{-4}$  взаимно уничтожаются и остается невязка порядка  $\theta^{-3}$ . Сле-

дующий за  $\psi_1$  член разложения (2.5) естественно было бы искать в виде  $\psi_2 = f_2(\omega)$ , требуя, чтобы в результате подстановки  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  в (2.1) члены порядка  $\theta^{-3}$  уничтожились и получилась невязка порядка  $\theta^{-2}$ . Однако анализ показывает, что, идя по этому пути, невозможно получить функцию  $\psi_2$ , удовлетворяющую условию (2.7). Это наводит на мысль о том, что между членами порядка  $\theta^{-1}$  и 1 в разложении (2.5) существует член промежуточного порядка, порождающий в выражении  $R(\psi_0)$  дополнительные слагаемые порядка  $\theta^{-3}$ .

Пусть  $\psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega$ ,  $\psi_2 = \ln \theta f_2(\omega)$ ,  $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2$ , тогда

$$Y(\psi_0) = \theta^{-1} s^3 + \ln \theta f_2 + O(1), \quad L(\psi_0) = L_1 + L_2 + \Delta L_2$$

$$P(\psi_0) = P_1 + P_2 + \Delta P_2, \quad Q(\psi_0) = Q_1 + Q_2 + \Delta Q_2, \quad R(\psi_0) = R_2 + \Delta R_2$$

$$L_1 = \alpha^2 \theta^{-3} (2s^3 - 3s^5), \quad P_1 = \alpha^2 \theta^{-2} (4s^6 - 3s^8), \quad Q_1 = \theta^{-1} (4s^3 - 3s^5)$$

$$P_{1\theta} = \alpha^2 \theta^{-3} (16s^6 - 42s^8 + 24s^{10}), \quad Q_{1\theta} = \theta^{-2} (8s^3 - 24s^5 + 15s^7)$$

$$L_2 = \alpha^2 \theta^{-2} \ln \theta s^2 f_2'', \quad P_2 = 4\alpha^2 \theta^{-1} \ln \theta s^4 t f_2', \quad Q_2 = \ln \theta (2f_2 + s t f_2')$$

$$P_{2\theta} = P_{2\theta}^{(1)} + P_{2\theta}^{(2)}, \quad Q_{2\theta} = Q_{2\theta}^{(1)} + Q_{2\theta}^{(2)}$$

$$P_{2\theta}^{(1)} = 4\alpha^2 \theta^{-2} \ln \theta [s^5 t^2 f_2'' + s^4 t (3 - 5s^2) f_2'], \quad P_{2\theta}^{(2)} = 4\alpha^2 \theta^{-2} s^4 t f_2'$$

$$Q_{2\theta}^{(1)} = \theta^{-1} \ln \theta [s t (3 - 2s^2) f_2' + s^2 t^2 f_2''], \quad Q_{2\theta}^{(2)} = \theta^{-1} (2f_2 + s t f_2')$$

$$\Delta L_2 = O(\theta^{-2}), \quad \Delta P_2 = O(\theta^{-1}), \quad \Delta Q_2 = O(1)$$

$$R_2 = \theta (2Q_1 Q_2 L_1 + Q_1^2 L_2) - P_{1\theta} Q_2 - P_{2\theta}^{(1)} Q_1 + Q_{1\theta} P_2 + Q_{2\theta}^{(1)} P_1$$

$$R_2 = O(\theta^{-3} \ln \theta), \quad \Delta R_2 = O(\theta^{-3}) \quad (s = \sin \omega, \quad t = \cos \omega)$$

Положив  $R_2 = 0$ , с учетом (2.7) получим краевую задачу для  $f_2(\omega)$ :

$$(-4s^2 + 3s^4) f_2'' + s t (4 - 9s^2) f_2' - 12s^2 t^2 f_2 = 0 \quad (2.12)$$

$$f_2(0) = f_2(\pi) = 0$$

Решение задачи (2.12) имеет вид  $f_2(\omega) = k(2 \sin^2 \omega - \sin^4 \omega)$ , где  $k$  — произвольная постоянная.

Пусть теперь  $\psi_1 = \theta^{-1} \sin^3 \omega$ ,  $\psi_2 = k \ln \theta (2 \sin^2 \omega - \sin^4 \omega)$ ,  $\psi_3 = f_3(\omega)$ ,  $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ , тогда

$$Y(\psi_0) = \theta^{-1} s^3 + k \ln \theta (2s^2 - s^4) + \alpha (3t - t^3 + 2) + f_3 + O(\theta \ln \theta)$$

$$L(\psi_0) = L_1 + L_2 + L_3 + \Delta L_3, \quad P(\psi_0) = P_1 + P_2 + P_3 + \Delta P_3$$

$$Q(\psi_0) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \Delta Q_3, \quad R(\psi_0) = R_3 + \Delta R_3$$

$$L_2 = 4\alpha^2 k \theta^{-2} \ln \theta s^2 t^2 (1 - 4s^2), \quad P_2 = 16\alpha^2 k \theta^{-1} \ln \theta s^5 t^4$$

$$L_3 = \theta^{-2} [\alpha^2 k (6s^2 - 15s^4 + 8s^6) + \alpha^{-1} a_1 s^2 t (2 - 15s^2 + 15s^4) - 3\alpha c_0 s^4 t +$$

причем  $f_3^0(0) = -4\alpha - \frac{8}{3}k$ ,  $f_3^0(\pi) = -\frac{8}{3}k$ .  
 Подчинив свободный параметр  $k$  условию  $f_3^0(0) = -f_3^0(\pi)$ , получим  $k = -\frac{3}{4}\alpha$ .  
 Подчинив свободный параметр  $k$  условию  $f_3^0(0) = f_3^0(\omega) = f_3^0(\omega) + \frac{1}{2}\alpha y_2(\omega)$ ,  
 $f_3^0(0) = -f_3^0(\pi) = -2\alpha$ . Нетрудно проверить, что функция  $f_3(\omega) = f_3^0(\omega) + \frac{1}{2}\alpha y_2(\omega)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2}t - t^3 + \frac{2}{3}t^5, \quad \phi_2 = -t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^5, \quad \phi_3 = -2\phi_1 \\ \phi_4 &= -2 - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t^3, \quad \phi_5 = -\frac{3}{8} + (1-t^4)\ln s \end{aligned}$$

$$f_3^0(\omega) = \alpha^{-3}a_1\phi_1 + \alpha^{-1}c_0\phi_2 + \alpha^{-1}\phi_3 + \alpha\phi_4 + k\phi_5 \quad (2.15)$$

(2.13) имеет вид  
 являются решениями однородного уравнения, соответствующего (2.13), причем  $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$ ,  $y_2(0) = -y_2(\pi) = 4$ . Можно убедиться также, что одно из решений уравнения

$$y_1(\omega) = 1 - t^4, \quad y_2(\omega) = t + 3t^3 + \frac{2}{3}(1-t^4)\ln \frac{1+t}{1-t} \quad (2.14)$$

Можно убедиться, что функции

$$\begin{aligned} F_1 &= 3s^2(-t + 8t^3 + 9t^5), \quad F_2 = 3s^2(t + 6t^3 + 9t^5), \quad F_3 = -2F_1 \\ F_4 &= 6t(1 - 4t - 4t^2 - t^4), \quad F_5 = -1 - 31t^2 + t^4 + 15t^6 \end{aligned}$$

$$f_3(0) = f_3(\pi) = 0 \quad (2.13)$$

Положив  $R_3 = 0$ , с учетом (2.7) получим краевую задачу для  $f_3(\omega)$

$$R_3 = O(\theta^{-3}), \quad \Delta R_3 = O(\theta^{-2} \ln^2 \theta)$$

$$R_3 = \theta(2Q_1Q_3L_1 + Q_2^2L_3) - P_{10}Q_3 - (P_{20}^{(2)} + P_{30}^{(2)})Q_1 + Q_{10}P_3 + (Q_{20}^{(2)} + Q_{30}^{(2)})P_1$$

$$\Delta L_3 = O(\theta^{-1} \ln \theta), \quad \Delta P_3 = O(\ln^2 \theta), \quad \Delta Q_3 = O(\theta \ln \theta)$$

$$Q_{30} = \theta^{-1}[-6\alpha s^4 t + k(4s^2 - 8s^4 + 4s^6) + st(3 - 2s^2)] f_3' + s^2 t^2 f_3''$$

$$+ \alpha^2 k(32s^5 - 136s^7 + 160s^9 - 54s^{11}) + 4\alpha^2 s^5 t^2 f_3'' + 4\alpha^2 s^4 t(3 - 5s^2) f_3'$$

$$P_{30} = \theta^{-2}[36\alpha t^3(3s^7 - 5s^9) + \alpha^{-1}a_1 t(16s^5 - 96s^7 + 168s^9 - 90s^{11}) +$$

$$P_{20}^{(2)} = 16\alpha^2 k \theta^{-2} s^4 t^4, \quad Q_{20}^{(2)} = k \theta^{-1}(8s^2 - 10s^4 + 4s^6)$$

$$P_{10}^{(2)} = 16\alpha^2 k \theta^{-2} \ln \theta s^4 t^4 (4 - 9s^2), \quad Q_{10}^{(2)} = 4k \theta^{-1} \ln \theta s^2 t^4 (4 - 6s^2)$$

$$+ 4\alpha^2 s^4 f_3', \quad Q_3 = 2\alpha(3t - t^3 + 2) + k(2s^2 - s^4) + 2f_3 + st f_3'$$

$$P_3 = \theta^{-1}[18\alpha s^7 t^3 + \alpha^{-1}a_1 s^5 t(4 - 12s^2 + 9s^4) + \alpha^2 k s^5(8 - 16s^2 + 6s^4) +$$

$$+ 6\alpha s^4 t(4 - 5s^2) + \alpha^2 s^2 f_3''], \quad Q_2 = k \ln \theta (8s^2 - 10s^4 + 4s^6)$$

определенная соотношениями (2.14), (2.15), при  $k = -\frac{3}{4}\alpha$  является решением краевой задачи (2.13).

Таким образом,

$$\psi_2 = -\frac{3}{4}\alpha \ln \theta (2 \sin^2 \omega - \sin^4 \omega) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = \sin^2 \omega \cos \omega \left[ \alpha^{-3} a_1 \left( -2 + \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right) + \alpha^{-1} c_0 \left( -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \sin^2 \omega \right) + \right. \\ \left. + \alpha^{-1} (4 - 3 \sin^2 \omega) - \alpha \right] + \frac{3}{4} \alpha (1 - \cos^4 \omega) \ln \frac{1 + \cos \omega}{(1 - \cos \omega) \sin \omega} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , определенные равенствами (2.11), (2.16), (2.17), удовлетворяют условиям (2.7). В результате подстановки  $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$  в уравнение (2.1) возникающие при этом члены порядка  $\theta^{-4}, \theta^{-3} \ln \theta, \theta^{-3}$  взаимно уничтожаются и остается невязка порядка  $\theta^{-2} \ln^2 \theta$ . Имеется достаточно оснований полагать, что процесс отыскания функций  $\psi_k$  на основе последовательного понижения порядка невязки в уравнении (2.1) можно продолжить и что найденные функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  действительно являются первыми членами асимптотического разложения (2.5) (как показывает анализ, функция  $\psi_1 = \theta^{-1} (\ln \theta)^m \sin^3 \omega$  при  $m \neq 0$  не может служить основой для нахождения последующих членов разложения (2.5)).

Будем считать, что функция  $\psi^0$  найдена с достаточно высокой точностью. Функция  $\chi = \psi - \psi^0$  должна служить решением краевой задачи

$$L(\chi) = N(\psi^0 + \chi) - L(\psi^0), \quad (\tau, \theta) \in \Sigma \quad (2.18)$$

$$N(\psi) = (P_\theta Q - P Q_\theta) / (Q^2 \sin \theta); \quad \chi = -\psi^0 \quad \text{на } ABB_1CDA$$

Используя описанные в [4] приемы, задачу (2.18) можно свести к решению итерационной последовательности линейных разностных задач. Точность получаемого решения можно контролировать, сравнивая значения  $y(\tau, \theta)$ , получаемые в результате интегрирования соотношений (2.2) вдоль различных траекторий. Определив  $\psi(\tau, \theta)$  и  $r(\tau, \theta)$  с помощью указанного метода, а  $x(\tau, \theta)$  – интегрированием выражений [11, 4]

$$x_\tau = [(M^2 - 1)\psi_\theta \cos \theta - \tau \psi_\tau \sin \theta + \text{ctg } \theta P / Q] (rv\tau^2)^{-1} \quad (2.19)$$

$$x_\theta = (\tau \psi_\tau \cos \theta - \psi_\theta \sin \theta) (rv\tau)^{-1}$$

не представляет труда найти все необходимые характеристики течения.

Пусть  $V_a, \rho_a$  – скорость и плотность жидкости в бесконечно удаленной точке,  $p$  – давление,  $p_a$  и  $p_c$  – значения  $p$  на бесконечности и на свободной поверхности,  $R_0$  – радиус основания конуса,  $R$  – радиус цилиндра, с которым сопрягается свободная поверхность,  $C_x$  – коэффициент сопротивления конуса,  $\sigma$  – коэффициент давления за конусом:

$$C_x = 4(\rho_a V_a^2 R_0^2)^{-1} \int_0^{R_0} (p - p_c) r dr, \quad \sigma = \frac{2(p_a - p_c)}{\rho_a V_a^2}$$

(интеграл берется вдоль образующей  $BC$ ).

Лобовое сопротивление тела вращения, образованного полубесконечным цилиндром и гладко сопряженной с ним головной частью, обтекаемого безотрывно осесимметричным дозвуковым потоком идеального газа, равно нулю [3]. Отсюда следует, что

$$C_x = \sigma R^2 / R_0^2 \quad (2.20)$$

Таблица 1

$M_*$	$L/R_0$	$L/R$	$S'/R^2$	$W'/R^3$
0,5	0,26353	0,22745	0,00895	0,05428
0,6	0,56128	0,43985	0,02692	0,15982
0,7	1,20394	0,82312	0,07202	0,41639
0,75	1,81351	1,13305	0,11591	0,65974
0,8	2,83888	1,58575	0,18753	1,04883
0,83	3,82819	1,96977	0,25305	1,39888
0,86	5,34163	2,49259	0,34694	1,89381
0,88	6,84913	2,96118	0,43418	2,34868

Таблица 2

$M_*$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
0,5	-0,19488	0,05616	0,06095	-0,15976	0,18489	-0,11279	0,02852
0,6	-0,28986	0,02999	0,22089	-0,44649	0,48133	-0,28040	0,06822
0,7	-0,38834	-0,07723	0,59865	-1,09678	1,14069	-0,64622	0,15294
0,75	-0,43515	-0,17990	0,92127	-1,65434	1,71013	-0,96323	0,22600
0,8	-0,47634	-0,34008	1,40790	-2,50998	2,60348	-1,47173	0,34535
0,83	-0,49726	-0,47022	1,79171	-3,18016	3,29725	-1,86126	0,43449
0,86	-0,51402	-0,63263	2,25600	-3,97268	4,09445	-2,29189	0,52741
0,88	-0,52156	-0,77125	2,67094	-4,73264	4,92033	-2,77498	0,64150

Соотношение (2.20) удобно использовать для дополнительного контроля точности решения.

**3. Решение задачи Б для совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ .** С помощью описанного метода выполнены расчеты обтекания диска ( $\theta_0 = \pi/2$ ) радиуса  $R_0$  по схеме Жуковского–Рошко осесимметричным потенциальным изэнтропическим потоком идеального совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$  при условии  $M_c = 1$  для ряда значений  $M_a = M_*$  из интервала  $[0,5; 0,88]$  ( $M_a$  и  $M_c$  – значения числа Маха на бесконечности и на свободной поверхности). При этом использовалась сетка  $I \times J = 50 \times 100$  в области изменения преобразованных переменных годографа скорости  $\xi, \eta$  (см. [4]). Погрешность, с которой выполняется условие (2.20) для полученных результатов монотонно увеличивается с ростом  $M_a$  от 0,01% при  $M_a = 0,5$  до 0,8% при  $M_a = 0,88$  (это порождает ограничение сверху на интервал расчетных исследований).

Основные геометрические характеристики головных частей оптимальных полубесконечных тел вращения приводятся в табл. 1. Значения параметра  $\sigma = 2(p_a - p_c) / (\rho_a V_a^2)$ , характеризующего давление на боковой поверхности головной части оптимального тела вращения, могут быть вычислены по формуле

$$\sigma = \frac{2}{\gamma M_a^2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} M_a^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right]$$

На фиг. 2 показаны контуры головных частей оптимальных тел в меридианной плоскости  $(x, r)$  для значений  $M_* = 0,6; 0,7; 0,75; 0,8; 0,83$  (кривые 1–5 соответственно;  $R = 1$ ).

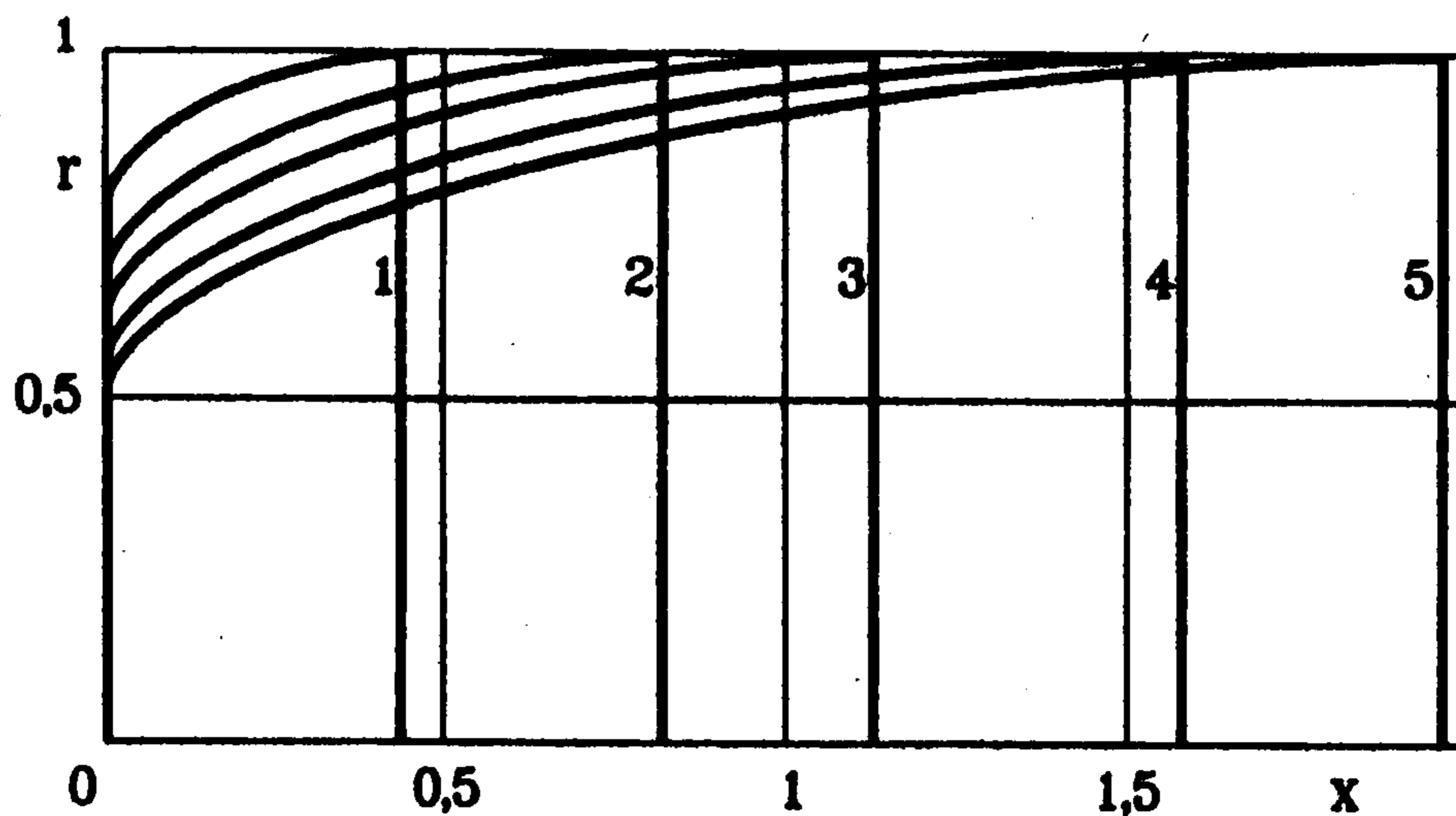
Для произвольного тела вращения, образованного полубесконечным цилиндром и гладко сопряженной с ним головной частью, обтекаемого безотрывно осесимметричным потоком совершенного газа при  $\gamma = 1,4$ , имеют место соотношения вида

$$M_* \leq G_1(R/L), \quad M_* \leq G_2(R^2/S'), \quad M_* \leq G_3(R^3/W')$$

где  $G_1, G_2, G_3$  – монотонно убывающие функции своих аргументов, а строгое равенство выполняется только для оптимальных тел. С помощью аппроксимации данных из табл. 1 и с учетом того, что  $G_1(0) = G_2(0) = G_3(0) = 1$ , построены формулы

$$\begin{aligned} G_1 &= (1 - 0,33587l_1 + 0,90137l_1^2 - 0,19790l_1^3)^{-1}, \quad l_1 = (R/L)^{1/3} \\ G_2 &= (1 - 0,53319s_1 + 0,69406s_1^2 - 0,11091s_1^3)^{-1}, \quad s_1 = (R^2/S')^{1/6} \\ G_3 &= (1 - 0,76759w_1 + 1,30968w_1^2 - 0,28216w_1^3)^{-1}, \quad w_1 = (R^3/W')^{1/6} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Погрешность аппроксимации расчетных данных табл. 1 формулами (3.1) не превышает 0,08% для  $G_1$ , 0,14% для  $G_2$  и 0,16% для  $G_3$ .



Фиг. 2

В окрестности точек  $C$  и  $D$  (см. фиг. 1,  $a, б$ )  $\psi \sim a(\tau - \tau_0)(\theta - \theta_0)$  и  $\psi \sim b(\tau - \tau_0)\theta$  соответственно ( $a$  и  $b$  – некоторые константы). Поэтому в соответствии с (2.2), (2.19) при  $\theta_0 = \pi/2$  на дуге  $CD$

$$\begin{aligned} x/R_0 &= O(\mu^3), \quad r/R_0 - 1 = O(\mu^2) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0 \\ x/L - 1 &= O(\theta^2), \quad r/L - R/L = O(\theta^3) \quad \text{при } \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\mu = \pi/2 - \theta$  ( $x = 0, r = R_0$  в точке  $C, x = L, r = R$  в точке  $D$ ).

Введем параметрическое переменное  $\beta$ , полагая, что на  $CD$   $x/L = p(a, \beta)/p(a, 0)$ , где

$$p(a, \beta) = \frac{a^2 \cos \beta}{2(1 - 2a^2 \cos 2\beta + a^4)} - \frac{a}{8(1 + a^2)} \ln \frac{1 + 2a \cos \beta + a^2}{1 - 2a \cos \beta + a^2}$$

$a$  – фиксированный параметр из интервала  $(0, 1)$ , а  $\beta$  меняется в интервале  $[0, \pi/2]$ . Можно убедиться, что  $p(a, \beta)$  – монотонно убывающая функция  $\beta$ ,  $p(a, \pi/2) = 0$ ,  $p(a, \beta) = O((\pi/2 - \beta)^3)$  при  $\beta \rightarrow \pi/2$ ,  $p(a, \beta) - p(a, 0) = O(\beta^2)$  при  $\beta \rightarrow 0$ . В соответствии с (3.2)  $\theta = O(\beta)$  при  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\pi/2 - \theta = O(\pi/2 - \beta)$  при  $\beta \rightarrow \pi/2$ , поэтому функция  $f(\beta)$  в представлении  $r/R = f(\beta)$  должна удовлетворять условиям  $f(0) = 1, f(\beta) = O(\beta^2)$  при  $\beta \rightarrow 0, f(\pi/2) = R_0/R, f'(\beta) = O(\pi/2 - \beta)$  при  $\beta \rightarrow \pi/2$ .

С учетом сказанного выше на основе результатов расчетов построены аппроксимационные формулы для определения формы головных частей оптимальных полубесконечных тел вращения в осесимметричном потоке совершенного газа при  $\gamma = 1,4$  вида

$$\frac{x}{R_0} = \frac{p(0,3;\beta)}{p(0,3;0)} \frac{L}{R_0}, \quad \frac{r}{R_0} = \frac{R}{R_0} \left( 1 + \sum_{k=1}^7 a_k \sin^{2k+1} \beta \right), \quad \beta \in [0, \pi/2] \quad (3.3)$$

Значения  $a_k$  приводятся в табл. 2 ( $L/R_0$  и  $L/R$  – в табл. 1).

Пусть  $\epsilon_1$  – максимальная по  $\beta$  (при фиксированном  $M_*$ ) относительная погрешность аппроксимации величины  $r$  формулами (3.3),  $\epsilon_2$  – максимальная по  $\beta$  погрешность аппрок-

симации величины  $\theta$ :  $\varepsilon_2 = |\theta - \arctg(r_\beta/x_\beta)|$ . Когда  $M_*$  растет, пробегая значения, указанные в табл. 1 и 2, величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  монотонно возрастают: первая от  $1 \cdot 10^{-5}$  до  $7 \cdot 10^{-5}$ , вторая от  $2 \cdot 10^{-4}$  до  $15 \cdot 10^{-4}$ . Использование формул (3.3) при сплайн-аппроксимации данных из табл. 1 и 2 для промежуточных значений  $M_*$  обычно приводит к увеличению значений  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , но  $\varepsilon_1$  увеличивается не более чем на порядок, а  $\varepsilon_2$  – не более чем в 2 раза. Это позволяет строить оптимальные полубесконечные тела вращения в осесимметричном потоке совершенного газа при  $\gamma = 1,4$  для произвольных значений  $M_*$  из интервала  $[0,5; 0,88]$ .

Авторы работ [7–9] провели расчетные исследования с целью определения критического числа Маха для некоторых видов головной части полубесконечного тела вращения в потоке совершенного газа при  $\gamma = 1,4$ . В качестве головной части тела ими рассматривалась половина (до миделевого сечения) тела вращения, получаемого [12] в результате решения задачи о кавитационном обтекании диска или сферы по схеме Рябушинского осесимметричным потоком несжимаемой жидкости (используя первые инициалы авторов [12] и [7–9], будем для краткости называть такие тела телами КВК с плоским и сферическим затуплением). Рассматривались также «параболические» тела с уравнением образующей  $r/R = [(x/L)(2 - x/L)]^n$  при  $0 \leq x \leq L$  и  $r/R = 1$  при  $x > L$  ( $n$  – положительная постоянная). Было установлено, что для широкого диапазона изменения параметра  $L/R$  среди перечисленных видов тел наибольшим критическим числом Маха обладают тела КВК с плоским затуплением.

Так [9], при  $L/(2R) = 0,8672$   $M_* = 0,786$  для тела КВК с плоским затуплением,  $M_* = 0,759$  для тела КВК со сферическим затуплением,  $M_* = 0,752$  для параболического тела при  $n = 0,3$ ,  $M_* = 0,742$  для параболического тела при  $n = 0,5$ . Были проведены также [8, 9, 13] расчетные и экспериментальные исследования по определению лобового сопротивления указанных выше тел вращения при  $L/(2R) = 0,8672$  в потоке воздуха и установлено, что тела КВК с плоским затуплением имеют минимальное лобовое сопротивление в диапазоне чисел Маха набегающего потока  $M_* < M_a < 0,97$ .

Очевидно, тела, форма головной части которых получена из решения задачи об обтекании диска по схеме Рябушинского потоком несжимаемой жидкости, не являются абсолютно оптимальными по  $M_*$  и отличаются от тел, построению которых посвящена настоящая работа. Так, для тела с удлинением головной части  $L/(2R) = 0,8672$  метод, развитый в настоящей работе, дает  $\max M_* = 0,8127$ . Ниже приводятся заимствованные из [9] безразмерные координаты  $x/R$ ,  $r_1/R$  контура головной части тела КВК с плоским затуплением при  $L/(2R) = 0,8672$

$x/r$	0	0,0710	0,2656	0,3881	0,5593	0,7995	1,1350	1,6054	1,7344
$r_1/R$	0,5420	0,6396	0,7572	0,8070	0,8607	0,9165	0,9669	0,9984	1
$\Delta r/R$	0,0016	0,0075	0,0145	0,0168	0,0176	0,0170	0,0122	0,0020	0

Значения координат  $r/R$  контура оптимального по  $M_*$  тела при  $L/(2R) = 0,8672$  получаются вычитанием из  $r_1/R$  соответствующих значений  $\Delta r/R$ . Оптимальное по  $M_*$  тело лежит полностью внутри тела КВК с плоским затуплением.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00123).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech. and Analysis. 1954. V. 3. No. 2. P. 209–230.
2. Крайко А.Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. Зигангареева Л.М., Киселев О.М. О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.

5. Зигангареева Л.М., Киселев О.М. Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 166–172.
6. Петров К.П. Аэродинамика элементов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985. 271 с.
7. Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н. Исследование оптимальных по волновому сопротивлению и критическому числу Маха носовых частей тел вращения при околозвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. 1989. № 2467. С. 3–11.
8. Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н. Исследование обтекания тел вращения с образующей Рябушинского // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 33–35.
9. Вышинский В.В., Кузнецов Е.Н. Исследование носовых частей тел вращения с образующей Рябушинского // Учен. зап. ЦАГИ. 1992. Т. 23. № 1. С. 3–8.
10. Щербаков С.А. Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // Учен. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.
11. Fenain M., Dutouquet L., Solignac J.-L. Calcul des performances d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expérience // Rech. Aéropat. 1974. N 5. P. 261–276.
12. Кожуро Л.А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Учен. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 5. С. 109–115.
13. Кузнецов Е.Н. Сопротивление тел вращения с generatrix Рябушинского в околозвуковом потоке газа // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 2. С. 175–176.

Казань

Поступила в редакцию  
13.XII.1995