

УДК 533.6.011.5

© 1997 г. В.И. Зубов

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОФИЛЯХ ПОД МАЛЫМИ УГЛАМИ АТАКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Рассматривается задача об определении плоского профиля, обладающего минимальным волновым сопротивлением в равномерном сверхзвуковом набегающем потоке газа. Считаются заданными длина, толщина, угол атаки, подъемная сила и момент профиля относительно начала координат. Рассмотрение ограничивается классом тел, при обтекании которых возникают присоединенные ударные волны. Предполагается, что в областях влияния составляющих искомого контура течение сверхзвуковое и внутренних ударных волн нет. Приведены результаты численных расчетов.

Ранее [1] рассматривалась следующая вариационная задача: среди профилей заданного утолщения в равномерном сверхзвуковом набегающем потоке газа при заданном угле атаки найти тот, который обладает минимальным волновым сопротивлением. Решение задачи отыскивалось в классе профилей, при обтекании которых возникают присоединенные ударные волны (УВ), а в областях влияния образующих профиля течение сверхзвуковое и внутренних УВ нет. Были приведены необходимые условия экстремума и проведены расчеты для профилей, имеющих два отрицательных излома, и таких углов атаки, при которых в окрестности передней острой кромки с наветренной стороны реализуется течение Прандтля–Майера.

Отличие настоящей работы от работы [1] состоит в следующем. Во-первых, здесь рассматривается случай малых углов атаки, т.е. таких, при которых в окрестности передней острой кромки и с наветренной, и с подветренной стороны возникают присоединенные УВ. Во-вторых, в качестве дополнительных изопериметрических условий привлекаются подъемная сила и момент профиля относительно начала координат. В-третьих, необходимые условия экстремума функционала выписываются для профиля с вновь введенными отрицательными изломами в точках E_1 и E_2 (фиг. 1) (в [1] допускались изломы лишь в точках D_1 и D_2). Введение дополнительных изломов профиля существенно для новой постановки задачи. Как показали проведенные численные расчеты, невозможно удовлетворить всем необходимым условиям экстремума на профиле, имеющем изломы лишь в точках D_1 и D_2 . К такому же выводу приводит и рассмотрение сформулированной задачи в рамках модельной постановки [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается задача определения плоского профиля $AD_1E_1BE_2D_2A$ (фиг. 1), обладающего минимальным волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке совершенного газа. Предполагается, что в областях взаимного влияния потока и профиля R_1 и R_2 течение сверхзвуковое и внутренних ударных волн нет, что образующиеся головные УВ AC_1 и AC_2 являются присоединенными и что заданная максимальная толщина профиля T , отсчитываемая в направлении, перпендикулярном хорде AB (длина отрезка E_1E_2), достигается при единственном (но не определенном) положении точек E_1 и E_2 . Кроме того, искомый профиль должен иметь заданную длину и заданный угол атаки и должен в общем случае обладать заданными значениями подъемной силы и момента относительно точки A . (При решении конкретных задач некоторые из приведенных ограничений могут не учитываться.)

На фиг. 1 (кроме уже отмеченных линий) mn – линия тока, а все остальные линии – характеристики первого или второго семейства. Набегающий поток параллелен оси x . Будем считать, что начало декартовых координат (x, y) совпадает с точкой A .

Приняты следующие обозначения: u и v – проекции вектора скорости на оси x и y соответственно, отнесенные к критической скорости течения a_* ; ρ – плотность газа, отнесенная к плотности в набегающем потоке ρ_∞ ; p – давление, отнесенное к $\rho_\infty a_*^2$; κ – показатель адиабаты; α – угол Маха; θ – угол между вектором скорости и осью x ; γ – угол атаки (угол между вектором скорости невозмущенного потока и хордой профиля AB); ϕ – энтропийная функция; ψ – функция тока, вводимая обычным образом

$$d\psi = \rho v dy - \rho u dx$$

причем значение ψ на профиле будем полагать равным нулю. Анализ задачи проводится в переменных (x, ψ) .

Стационарное неизэнтропическое течение совершенного газа в областях R_1 и R_2 описывается следующей системой уравнений (первое из них – уравнение неразрывности, второе – уравнение сохранения импульса в проекции на ось y):

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho u} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v}{u} \right) = 0, \quad L_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}, \quad p = \rho^\kappa \phi^{(\kappa - 1)}(\psi)$$

Волновое сопротивление, подъемная сила и момент профиля относительно начала координат определяются соотношениями

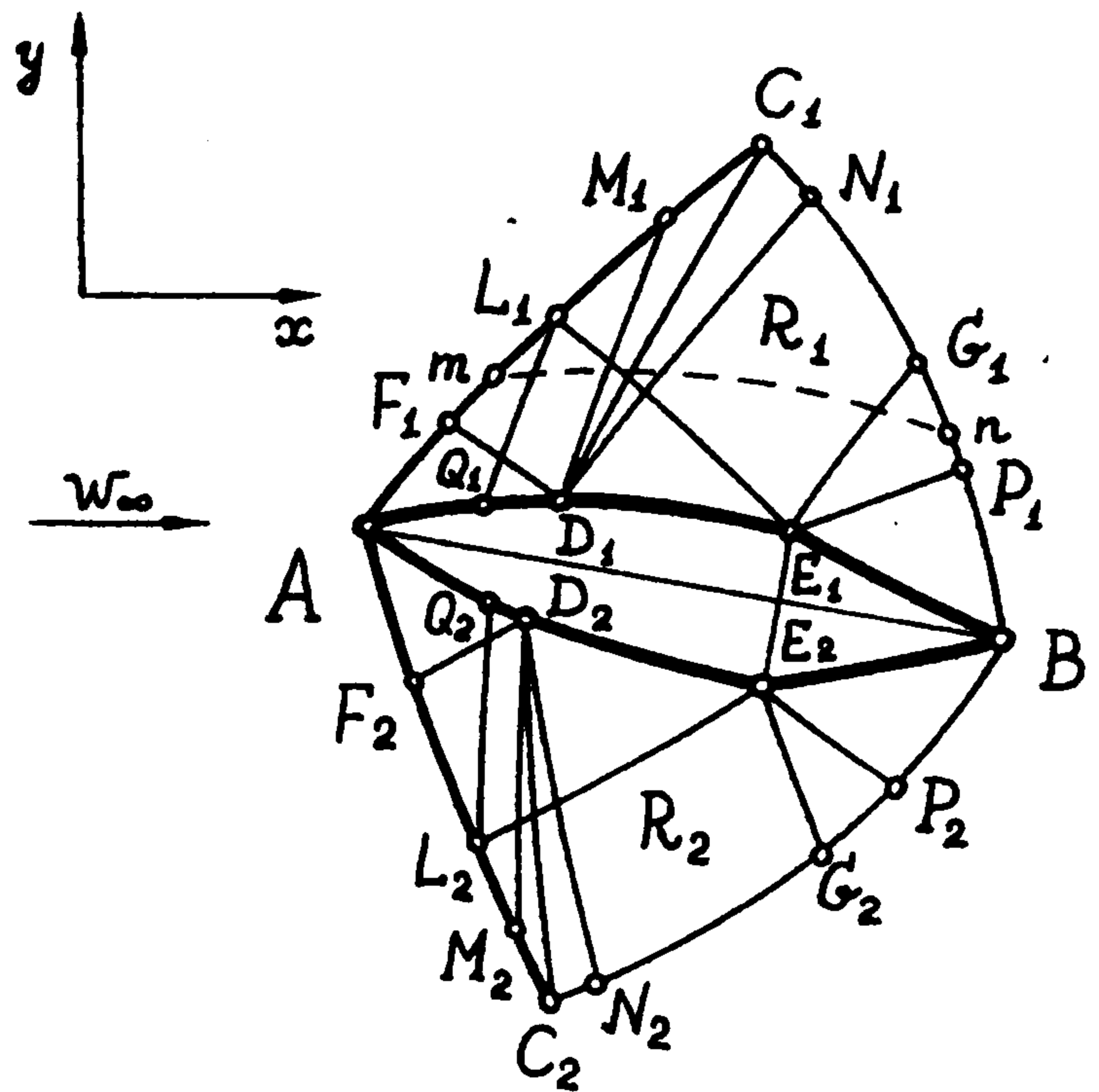
$$X = \int_{x(A)}^{x(B)} \{p[x, \eta_2(x)]\eta_2'(x) + p[x, \eta_1(x)]\eta_1'(x)\} dx, \quad Y = \int_{x(A)}^{x(B)} \{p[x, \eta_2(x)] - p[x, \eta_1(x)]\} dx \quad (1.2)$$

$$M = \int_{x(A)}^{x(B)} \{p[x, \eta_2(x)][x + \eta_2(x)\eta_2'(x)] - p[x, \eta_1(x)][x + \eta_1(x)\eta_1'(x)]\} dx$$

Здесь $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ – функции, описывающие составляющие AD_1E_1B и AD_2E_2B профиля в системе координат (x, y) (при этом считается, что нижняя часть профиля симметрично отражена относительно оси x).

Так как координаты точки B заданы (фиг. 1) (при фиксированных координатах точки A задание координат точки B эквивалентно заданию длины профиля $|AB|$ и угла атаки γ), то искомые функции $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ должны удовлетворять изопериметрическим условиям

$$r_1 = \int_{x(A)}^{x(B)} \eta_1'(x) dx - y(B) = 0, \quad r_2 = \int_{x(A)}^{x(B)} \eta_2'(x) dx + y(B) = 0 \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Задание длины отрезка E_1E_2 (максимальная толщина профиля T) приводит к изопериметрическому условию и конечной связи

$$r_3 = \int_{x(A)}^{x(E_1)} \eta_1'(x) dx + \int_{x(A)}^{x(E_2)} \eta_2'(x) dx = T \cos \gamma, \quad r_4 = x(E_1) - x(E_2) = T \sin \gamma \quad (1.4)$$

Вдоль составляющих профиля AD_1E_1B и AD_2E_2B справедливы условия непротекания $v[x, \eta_i(x)] / u[x, \eta_i(x)] - \eta_i'(x) = 0, \quad i = 1, 2$ (1.5)

а на линиях AC_i – соотношения, связывающие параметры течения перед УВ и за ней

$$K_1^{(i)} = \frac{v}{u} x_i' + \frac{1}{\rho u} - \frac{1}{w_\infty} = 0, \quad K_2^{(i)} = \frac{p - p_\infty}{w_\infty} + u - w_\infty = 0, \quad K_3^{(i)} = (p_\infty - p)x_i' + v = 0 \quad (1.6)$$

Соотношения (1.6) представляют собой условия на разрывах для уравнений газовой динамики, записанные в переменных (x, ψ) . Первое из них соответствует уравнению неразрывности, второе и третье – уравнению сохранения импульса в проекции на оси x и y соответственно. При этом $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ – модуль скорости; индексом ∞ обозначены величины в набегающем потоке; $x_i(\psi)$ – уравнение линии AC_i в плоскости (x, ψ) .

Вариационная задача формулируется следующим образом: для заданного набегающего потока определить функции $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$, удовлетворяющие условиям (1.3), (1.4) и минимизирующие первый функционал (1.2) при заданных значениях второго и третьего функционалов (1.2), при выполнении дифференциальных связей (1.5) на линиях AD_iE_iB , связей (1.6) на линиях AC_i и связей (1.1) в областях R_i ($i = 1, 2$).

2. Необходимые условия оптимальности. Обозначая через $\sigma_0, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \lambda$ постоянные, а через $\varepsilon_i, \sigma_{il}, h_1, h_2$ – переменные множители, запишем функционал Лагранжа

$$I = X + \sigma_0 Y + \mu_0 M + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \lambda r_3 + \\ + \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{x(A)}^{x(B)} \varepsilon_i(x) \left[\eta_i' - \frac{v}{u} \right] dx + \int_{\psi(A)}^{\psi(C_i)} \sum_{l=1}^3 \sigma_{il}(\psi) K_l^{(i)} d\psi \right\} + \\ + \iint_{R_1 \cap R_2} [h_1(x, \psi) L_1 + h_2(x, \psi) L_2] dx d\psi$$

При этом вдоль характеристик E_iL_i, C_iD_i, F_iD_i допускается разрыв множителей h_1 и h_2 .

Использование методики, развитой ранее [2–7], позволяет получить первую вариацию функционала I , обращение которой в нуль приводит к необходимым условиям экстремума. Эти условия имеют следующий вид.

В областях влияния R_1 и R_2 переменные множители Лагранжа h_1 и h_2 определяются из системы уравнений в частных производных

$$\frac{a^2 - u^2}{\rho u^2 a^2} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{v}{u^2} \frac{\partial h_1}{\partial \psi} + \rho u \frac{\partial h_2}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{v}{\rho u a^2} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{u} \frac{\partial h_1}{\partial \psi} + \frac{\partial h_2}{\partial x} - \rho v \frac{\partial h_2}{\partial \psi} = 0 \quad (2.1)$$

где $a = \sqrt{\kappa p / \rho}$ – скорость звука. При условии $w > a$ эта система гиперболическая, имеет два семейства характеристик, направления которых совпадают с характеристическими направлениями системы (1.1) и условия совместности вдоль которых представимы в виде

$$dh_1 \mp g^2 dh_2 = 0, \quad g = \sqrt{\rho u^2 \operatorname{tg} \alpha} \quad (2.2)$$

(Здесь и всюду дальше верхний знак соответствует характеристикам первого семейства, а нижний – второго.)

На профиле множители h_1 и h_2 должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, 0) = -\frac{\partial p}{\partial x}[1 + (-1)^i \mu_0 \eta_i], \quad h_2(x, 0) = \frac{v}{u} + (-1)^i \left[\sigma_0 + \mu_0 \left(x + \eta_i \frac{v}{u} \right) \right] \quad (2.3)$$

На замыкающих характеристиках C_1B и C_2B должно выполняться условие

$$h_1 - g^2 h_2 = 0 \quad (2.4)$$

а на характеристиках, вдоль которых допускается разрыв множителей h_1 и h_2 , величины разрывов связаны соотношениями

$$\Delta h_1 \pm g^2 \Delta h_2 = 0 \quad (2.5)$$

Вдоль каждой линии тока необходимо выполнение равенства

$$E_*^i(\psi) = \left[\frac{W_i(\psi)}{\rho v (1 - p_\infty / p)} \right]_m + \int_{x_m}^{x_n} \left[\frac{\cos^2 \alpha - \kappa}{\kappa \rho u} \frac{dh_1}{dx} + \frac{v \sin^2 \alpha}{\kappa} \frac{dh_2}{dx} \right] dx + \left[\frac{h_1}{\rho u} - p h_2 \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\rho a} \right]_n + \sum_{S_j} \left[\frac{\Delta h_1}{\rho u} + j \frac{\cos(\theta + j\alpha)}{\rho a} p \Delta h_2 \right] = 0 \quad (2.6)$$

$$W_i(\psi) = \begin{cases} W_*(\psi), & \psi(L_i) < \psi \leq \psi(C_i) \\ W_*(\psi) + Z_{L_i}, & \psi(F_i) < \psi \leq \psi(L_i) \\ W_*(\psi) + Z_{L_i} + Z_{F_i}, & 0 \leq \psi \leq \psi(F_i) \end{cases}$$

$$W_*(\psi) = \int_{\psi}^{\psi(C_i)} \left[\frac{v}{u} \frac{dh_1}{d\psi} - (p - p_\infty) \frac{dh_2}{d\psi} \right] d\psi + \left[(p - p_\infty) h_2 - \frac{v}{u} h_1 \right]_{C_i}, \quad Z = (p - p_\infty) \Delta h_2 - \frac{v}{u} \Delta h_1$$

В равенстве (2.6) первый член вычисляется в точке m на УВ, второй представляет собой интеграл вдоль линии тока mn , третий вычисляется в точке n на замыкающей характеристике, четвертый – в точках S_j – точках пересечения линии тока mn с линиями разрыва множителей. Если разрыв распространяется вдоль характеристики первого семейства, то $j = 1$, в противном случае $j = -1$.

Замыкают систему необходимых условий условия Вейерштрасса–Эрдмана в точках излома профиля D_1, D_2, E_1 и E_2

$$H^{(1)}(\sigma_0, \mu_0)_{D_1} = 0, \quad H^{(2)}(\lambda, \mu_0)_{D_1+} = H^{(2)}(\lambda, \mu_0)_{D_1-}$$

$$H^{(1)}(-\sigma_0, -\mu_0)_{D_2} = 0, \quad H^{(2)}(\lambda, -\mu_0)_{D_2+} = H^{(2)}(\lambda, -\mu_0)_{D_2-}$$

$$H^{(1)}(\sigma_0, \mu_0)_{E_1} + H^{(1)}(-\sigma_0, -\mu_0)_{E_2} = 0$$

$$H^{(2)}(\lambda, \mu_0)_{E_1-} - H^{(2)}(0, \mu_0)_{E_1+} = H^{(2)}(\lambda, -\mu_0)_{E_2-} - H^{(2)}(0, -\mu_0)_{E_2+}$$

где

$$H^{(1)}(\sigma_0, \mu_0) = \left[p(\sigma_0 + \mu_0 x) + h_1 \frac{v}{u} \right]_+ - \left[p(\sigma_0 + \mu_0 x) + h_1 \frac{v}{u} \right]_- + \int_{\omega_+}^{\omega_-} \left[h_1 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{v}{u} \right) - h_2 \frac{dp}{d\omega} \right] d\omega$$

$$H^{(2)}(\lambda, \mu_0) = p(1 - \mu_0 y) + \lambda + h_1$$

ω – угол наклона между характеристикой пучка в точке излома профиля и осью x (в плоскости $x\psi$); знак минус указывает на предельное значение величины при подходе к точке излома слева, а плюс – при подходе справа.

Из приведенных необходимых условий получаются соотношения, которые будут использованы в численном алгоритме. Во-первых, вдоль оптимальной замыкающей характеристики C_iB множители Лагранжа должны определяться формулами

$$h_1 = c_3 g, \quad h_2 = c_3 / g \quad (2.7)$$

а величины разрывов указанных множителей вдоль линий разрыва (на характеристиках) связаны равенствами

$$\Delta h_1 = \mp c_4 g, \quad \Delta h_2 = c_4 / g \quad (2.8)$$

где c_3 и c_4 – постоянные [4–7].

Во-вторых, равенства

$$h_1(x, \psi) = \int_{x_n}^x \frac{dp}{dt}(t, \psi) [(-1)^{i-1} \mu_0 y(t, \psi) - 1] dt + h_1(x_n, \psi) \quad (2.9)$$

$$h_2(x, \psi) = \frac{v}{u} + \left[\sigma_0 + \mu_0 \left(x + y \frac{v}{u} \right) \right] (-1)^i$$

представляют собой решение системы (2.1) с граничными условиями (2.3) в области $P_i E_i B$ ($i = 1, 2$), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Следовательно, на оптимальной характеристике $P_i B$ с необходимостью справедливо соотношение

$$\left\{ \frac{v}{u} + \left[\sigma_0 + \mu_0 \left(x + y \frac{v}{u} \right) \right] (-1)^i \right\} g = c_3 \quad (2.10)$$

Использование условия совместности для параметров потока вдоль замыкающей характеристики и равенства (2.10) позволяет получить еще одно соотношение

$$d \left\{ p + g^2 \left[\frac{v}{u} + \left(\sigma_0 + \mu_0 \left(x + y \frac{v}{u} \right) \right) (-1)^i \right] \right\} + g^2 d \left[\mu_0 \left(x + y \frac{v}{u} \right) (-1)^i \right] = 0 \quad (2.11)$$

Если момент профиля не задан (т.е. $\mu_0 = 0$), то дифференциальное соотношение (2.11) переходит в конечное

$$p + g^2 \left[\frac{v}{u} + (-1)^i \sigma_0 \right] = c_5$$

(c_5 – постоянная).

Обратим внимание на то, что система полученных необходимых условий экстремума не является суммой необходимых условий для оптимизации отдельно верхней и нижней частей профиля. Связь между верхним и нижним контурами осуществляется через условия Вейерштрасса–Эрдмана в точках E_1 и E_2 .

Анализ необходимых условий экстремума показывает, что, как и в [6], следует вводить бесконечно много точек излома контура профиля на участке AD_i , сгущающихся к точке A . Однако было отмечено [6], что с точностью проводимых расчетов достаточно ограничиться рассмотрением изломов лишь в точках D_i . Этот факт и будет использоваться в дальнейшем.

3. Описание численного алгоритма. Для численного определения оптимального профиля предлагается итерационный процесс, по сути являющийся развитием численного алгоритма, описанного ранее [6].

Задается абсцисса точки M_1 . Отрезок $[x(A), x(M_1)]$ разбивается на n равных частей, каждой из полученных точек x_k ($k = 1, \dots, n$) ставится в соответствие число σ_k – тангенс угла наклона УВ к оси x , и выстраивается УВ AM_1 . По известным набегаю-

щему потоку и УВ методом характеристик [8] рассчитывается течение в области влияния линии AM_1 и выделяется линия тока AD_1 . Далее выбираются некоторые отрицательные углы излома профиля $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_2$, с помощью которых рассчитывается течение разрежения в области $M_1D_1N_1C_1$ и выстраивается участок УВ M_1C_1 . Для произвольно заданного значения функции тока в точке G_1 отрезок $[\psi(G_1), \psi(N_1)]$ разбивается на n_1 равных частей, и в точках деления произвольно выбираются значения величины u/u . Этих данных достаточно, чтобы определить характеристику N_1G_1 и газодинамические величины на ней. Методом характеристик решается задача Гурса с данными на N_1D_1, N_1G_1 и выделяется линия тока D_1E_1 . Задаваясь отрицательным значением угла излома профиля $\Delta\theta_3$ в точке E_1 , рассчитываем течение в пучке разрежения $G_1E_1P_1$. Использование соотношения (2.10) позволяет определить оптимальную характеристику P_1B до значения функции тока, равного $\psi(A)$, а затем выделить линию тока E_1B . Таким образом, верхняя часть профиля AD_1E_1B и параметры течения в области R_1 оказываются известными.

Аналогично выстраивается нижняя часть профиля AD_2E_2B , т.е. задаются абсцисса точки M_2 , УВ AM_2 , углы излома профиля $\Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6$, значение функции тока ψ в точке G_2 , распределение величины u/u вдоль линии N_2G_2 .

Получившийся профиль, вообще говоря, не удовлетворяет условию замкнутости (координаты точки B на участках AD_1E_1B и AD_2E_2B не совпадают) и условию ортогональности отрезка E_1E_2 хорде AB . Добиться выполнения перечисленных условий можно за счет выбора величин $x(M_2), \psi(G_2)$ и $\Delta\theta_6$.

Следующий шаг состоит в решении сопряженной задачи. На характеристике G_1B множители Лагранжа h_1 и h_2 определяются по формулам (2.7), а на характеристике P_1E_1 – по формулам (2.9). Тогда в области $G_1E_1P_1$ они получаются как результат решения задачи Гурса. Введем в точке E_1 разрыв множителей Лагранжа такой величины, чтобы при подходе к точке E_1 слева вдоль профиля выполнялось краевое условие (2.3) для h_2 . Используя известные распределения множителей Лагранжа вдоль D_1E_1 и E_1G_1 , методом характеристик определяем h_1 и h_2 в области $N_1D_1E_1G_1$. На характеристике N_1G_1 проверяется выполнение условия (2.4). В точке G_1 оно справедливо в силу выбора множителей h_1 и h_2 . В остальных n_1 точках добиться его выполнения позволяют n_1 произволов в выборе величины u/u на характеристике N_1G_1 . В области $C_1D_1N_1$ множители h_1 и h_2 определяются так же, как и в области $G_1E_1P_1$. Введем вдоль характеристики C_1D_1 разрыв множителей Лагранжа таким образом, чтобы условие (2.6) в точке C_1 было справедливо. Множители h_1 и h_2 в области $M_1D_1C_1$ можно определить, требуя выполнения условия (2.6) вдоль линии M_1C_1 и используя значения множителей на характеристике C_1D_1 . В области AD_1M_1 множители h_1 и h_2 определяются через свои значения на линиях AD_1 и D_1M_1 . Начальное значение величины разрыва множителей вдоль характеристики F_1D_1 выбираются из тех же соображений, что и в точке E_1 .

Для области R_2 величины h_1 и h_2 определяются аналогичным образом. После решения сопряженной задачи проверяется выполнение условий Вейерштрасса–Эрдмана. Они, вообще говоря, не выполнены. Добиться выполнения условий Вейерштрасса–Эрдмана позволяет выбор величин $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \psi(G_1)$ и $\Delta\theta_3$.

Наконец, по известному полю газодинамических величин и полю множителей Лагранжа вычисляется функция $E_*^i(\psi)$ для каждой из выделенных линий тока. Ударная волна подправляется до тех пор, пока $E_*^i(\psi)$ не становится равной нулю. Все расчеты при этом необходимо проводить заново.

Профиль, полученный в результате такой процедуры, является искомым оптимальным профилем, если полученные координаты точки B , длина отрезка E_1E_2 , подъемная

сила и момент совпадают с заданными. Если же совпадения не наблюдается, то добиться его можно подбором величин $x(M_1)$, $\sigma[x(M_1)]$, $\sigma[x(M_2)]$, σ_0 , μ_0 . При решении конкретных задач описанный итерационный процесс можно упростить, используя те или иные особенности задачи.

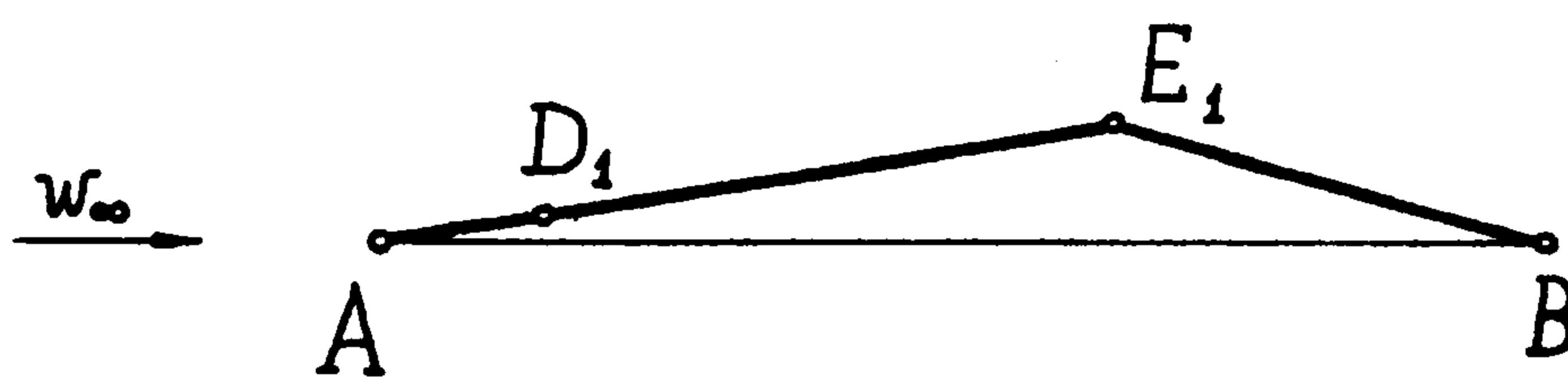
4. Результаты расчетов. Описанный итерационный алгоритм был использован для решения ряда конкретных задач. Прежде чем перейти к изложению результатов, остановимся на характере отражения разрыва множителей h_1 и h_2 от УВ и вытекающих из этого различных схемах решения. Величина отраженного разрыва определяется из условия непрерывности функции $E_*^i(\psi)$ при подходе к точке отражения вдоль УВ сверху и снизу. Будем под знаком разрыва подразумевать знак величины Δh_2 – разности значений h_2 слева и справа от разрыва. Знаки приходящего к УВ разрыва и отраженного от него разрыва могут либо совпадать, либо различаться. Зависит это от величин скорости набегающего потока и интенсивности УВ в данной точке. В соответствии с этим все точки УВ на плоскости (скорость набегающего потока – интенсивность УВ) условно разбиваются на точки, принадлежащие областям I и III (знак отраженного разрыва совпадает со знаком падающего) и области II (указанные знаки противоположны) [6]. Положив множители h_1 и h_2 равными нулю справа от характеристики C_iB , найдем, что формулы (2.7) определяют величину разрыва указанных множителей вдоль характеристики C_iB . В этом случае разрыв множителей, распространяющийся вдоль характеристики C_iD_i , представляет собой отражение от УВ в точке C_i разрыва, распространяющегося вдоль характеристики C_iB .

Пусть рассматривается задача о нахождении симметричного оптимального профиля, расположенного под нулевым углом атаки. В этом случае точка B лежит на оси x , множители σ_0 и μ_0 равны нулю. Величина u/u в точке B отрицательна, поэтому разрыв множителей Лагранжа вдоль характеристики C_iB тоже отрицателен. Выберем УВ такую, чтобы соответствующие ей параметры принадлежали области II. В этом случае вдоль характеристики C_iD_i будет распространяться разрыв положительного знака, и введение отрицательного угла излома профиля в точке D_i позволяет удовлетворить соответствующим условиям Вейерштрасса–Эрдмана. Разрыв множителей, вводимый в точке E_i , получается положительным, и при отражении от УВ в точке L_i он должен изменить знак. Следовательно, схема решения должна быть такой, что в точку L_i приходит внутренняя УВ (или центрированная волна сжатия с фокусом в точке L_i). Это существенно усложняет постановку задачи и проведение расчетов. Если же не вводить отражение разрыва множителей Лагранжа от УВ в точке L_i , то функция $E_*^i(\psi)$ будет претерпевать разрыв в точке L_i . Предполагая малость указанного разрыва (при выбранных параметрах задачи это в действительности имеет место), будем при проведении расчетов требовать обращение функции $E_*^i(\psi)$ в нуль в тех выделенных точках, где задана ударная волна. Это соответствует "размазыванию" локального разрыва на шаг сетки. В рассмотренных примерах отраженный разрыв в точке D_i имел положительный знак. С точностью проводимых расчетов его величиной можно пренебречь. Величина отрицательного угла излома профиля в точке D_i , как видно из приводимых ниже результатов, также мала. "Размазанному" излому УВ соответствует "размазанный" излом профиля. Участки профиля между изломами, исключая окрестность "размазанного" разрыва, близки к прямолинейным.

Ниже приведены параметры оптимальных симметричных профилей под нулевым углом атаки (здесь $x(B)/l = 1$, $y(B)/l = 0$)

w_∞	1,4	1,4	1,4	1,5	1,6	1,7
$x(D_1)/l$	0,0349	0,0798	0,1203	0,1392	0,0630	0,0873
$y(D_1)/l$	0,0012	0,0057	0,0134	0,0214	0,0047	0,0102
$x(E_1)/l$	0,5259	0,5553	0,5891	0,6317	0,5531	0,5941
$y(E_1)/l$	0,0193	0,0433	0,0668	0,0988	0,0408	0,0669
$T/l, \%$	3,9	8,7	13,4	19,8	8,2	13,4
C_x	0,0025	0,0128	0,0295	0,0533	0,0082	0,0181
$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$	0,0002	0,0012	0,0023	0,0045	0,0007	0,0009
$\Delta\theta_3$	0,0696	0,1742	0,2742	0,4311	0,1663	0,2545

На фиг. 2 представлена верхняя половина полученного оптимального профиля с углом $T/l = 19,8\%$. Постоянные c_4 , фигурирующие в соотношениях (2.8) и характеризующие разрыв множителей, для указанного профиля таковы: $c_{E_1L_1} = 0,4744$, $c_{C_1D_1} = 0,0079$, $c_{D_1F_1} = 0,0001$, $c_{L_1Q_1} = -0,0149$.



Фиг. 2

В случае несимметричных профилей под ненулевым углом атаки при проведении расчетов начальная УВ выбиралась в окрестности границы областей II и III, что позволило пренебречь величиной разрыва множителей в точке C_i и не вводить излом профиля в точках D_i . Множители σ_0 и μ_0 здесь уже выбирались отличными от нуля.

Приведем параметры полученных оптимальных профилей:

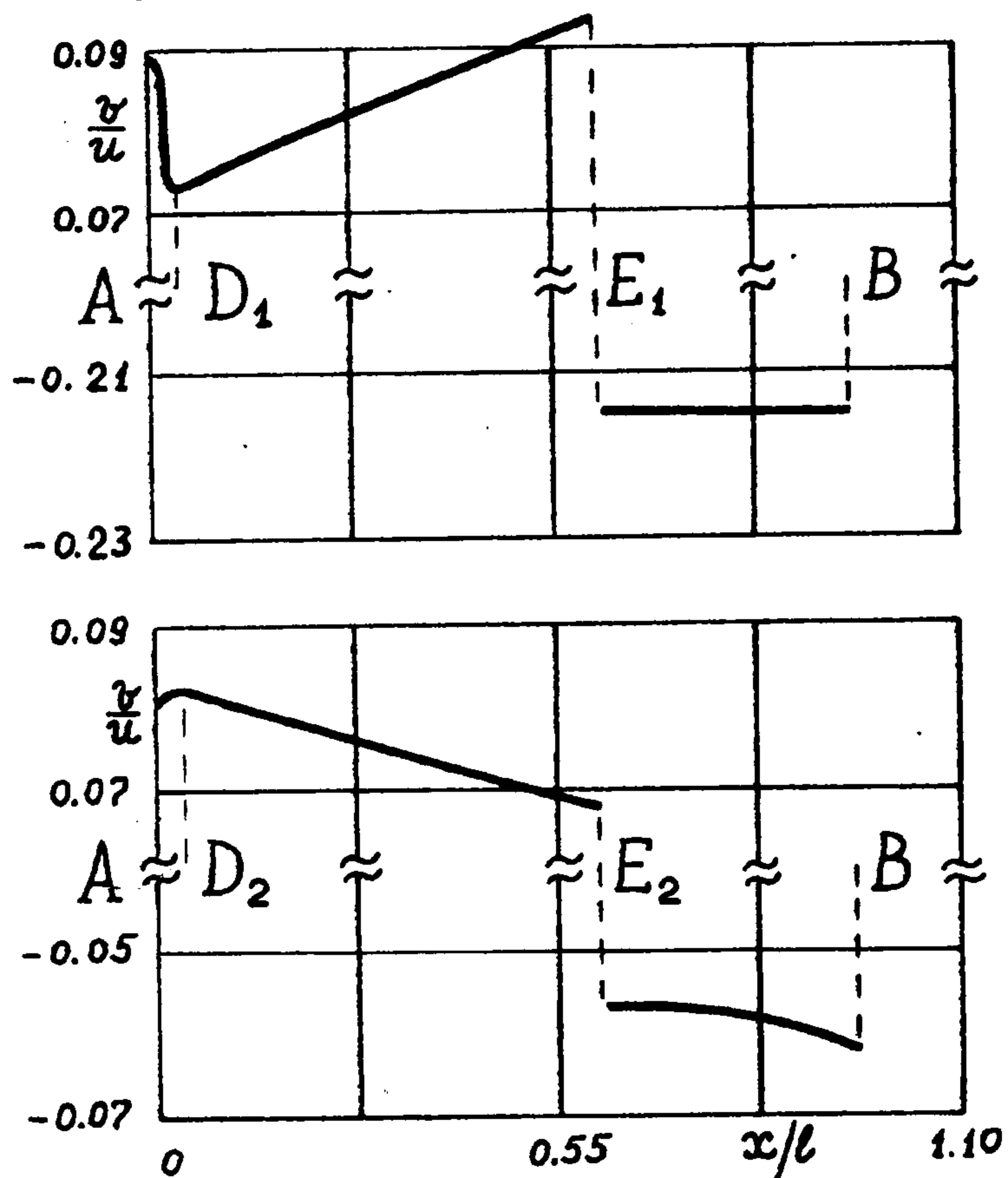
а) момент профиля не задан, $\mu_0 = 0$

w_∞	1,828	1,828	1,816	1,828
γ	-0,0029	-0,0233	0,0366	0,0191
$x(E_1)/l$	0,5136	0,5976	0,6201	0,5253
$y(E_1)/l$	0,0025	0,0272	0,0457	0,0036
$x(E_2)/l$	0,5136	0,5988	0,6157	0,5241
$y(E_2)/l$	0,0124	0,0359	0,0502	0,0133
$x(B)/l$	1,0000	0,9997	0,9993	0,9998
$y(B)/l$	0,0025	0,0235	-0,0368	-0,0193
$T/l, \%$	1,5	6,3	9,6	1,7
C_x	0,0004	0,0044	0,0098	0,0007
C_y	-0,0026	-0,0148	0,0220	0,0155
C_M	-0,0046	-0,0137	0,0166	0,0087
σ_0	-0,3	-0,3	0,15	0,35
$\Delta\theta_3$	0,0181	0,5345	0,2917	0,0525
$\Delta\theta_6$	0,0502	0,2064	0,1184	0,0128

б) момент профиля задан, $\mu_0 \neq 0$ и $\sigma_0 = 0,15$

w_∞	1,816	1,816	1,816	1,816	1,816	1,816
γ	0,0335	0,0326	0,0307	0,0293	0,0279	0,0264
$x(E_1)/l$	0,6230	0,6237	0,6189	0,6273	0,6287	0,6302
$y(E_1)/l$	0,0482	0,0482	0,0490	0,0508	0,0520	0,0521
$x(E_2)/l$	0,6196	0,6203	0,6167	0,6250	0,6265	0,6279
$y(E_2)/l$	0,0493	0,0494	0,0479	0,0485	0,0486	0,0476
$x(B)/l$	0,9994	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
$y(B)/l$	-0,0336	-0,0325	-0,0301	-0,0293	-0,0283	-0,0261
$T/l, \%$	9,8	9,8	9,9	9,9	10,0	10,0
C_x	0,0095	0,0095	0,0098	0,0099	0,0099	0,0100
C_y	0,0194	0,0187	0,0169	0,0161	0,0147	0,0134
C_M	0,0149	0,0145	0,0135	0,0131	0,0124	0,0117
μ_0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\Delta\theta_3$	0,3273	0,2988	0,3016	0,3038	0,3064	0,3086
$\Delta\theta_6$	0,1220	0,1204	0,1231	0,1236	0,1245	0,1254

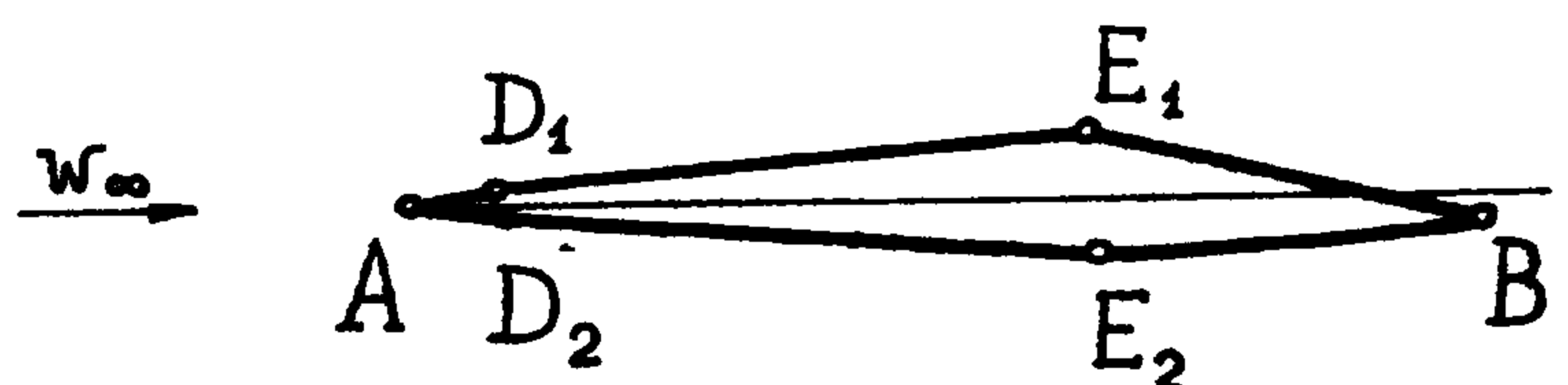
Если момент профиля не задан, то участки профиля между изломами близки к прямолинейным. Если же момент профиля задан, то происходит искривление участков между изломами. Особенно сильно искривление заметно на участке D_iE_i . На фиг. 3



Фиг. 3

представлено распределение v/u по длине проекции хорды на направление потока для профиля, полученного при $\mu_0 = 0,7$, а на фиг. 4 – сам профиль.

В проведенных расчетах газ считался совершенным с показателем адиабаты $\kappa = 1,4$. Функция $E_*^i(\psi)$ в точках на УВ в рассчитанных примерах имела значение порядка 10^{-4} , что соответствует точности численного метода характеристик при выбранном шаге. Все линейные размеры отнесены к длине хорды l и $C_X = X/(l\rho_\infty w_\infty^2)$, $C_Y = Y/(l\rho_\infty w_\infty^2)$, $C_M = M/(l^2\rho_\infty w_\infty^2)$.



Фиг. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00779).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В.И. Об оптимальном сверхзвуковом профиле заданного утолщения // Изв. АН СССР. МЖТ. 1976. № 1. С. 89–96.
2. Guderley K.G., Armitage J.V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Science Laboratory. Seattle. Washington. December 3–4. 1962. Рус. перев.: Гудерлей К.Г., Армитадж Д.В. Общий метод определения оптимальных сверхзвуковых ракетных сопел // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. № 6. С. 85–101.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимальные задачи газодинамики // Изв. вузов. Сер. Авиац. техника. 1963. № 2. С. 11–21.
4. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.
5. Крайко А.Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 312–320.
6. Шипилин А.В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // Сборник теоретических работ по гидромеханике. М.: ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
7. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. С. 447.
8. Кацкова О.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д., Шулишина Н.П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М.: ВЦ АН СССР, 1961. С. 60.

Москва

Поступила в редакцию
26.IV.1996