

УДК 532.5

© 1997 г. Д.Ф. Абзалилов, Л.А. Аксентьев, Н.Б. Ильинский

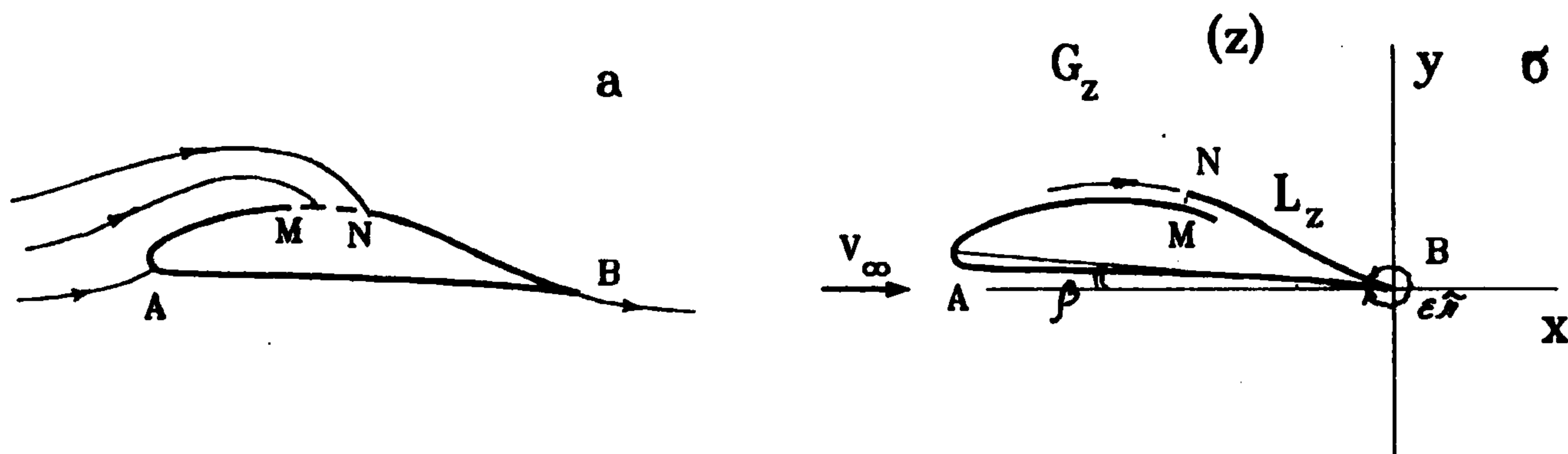
ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ СО ЩЕЛЕВЫМ ОТСОСОМ

Решена задача построения крылового профиля в потоке идеальной несжимаемой жидкости по заданному распределению скорости на контуре при наличии щелевого отсоса. Граница щели моделируется отрезком эквипотенциали с заданным на ней распределением скорости. Введено условие конечности скорости на концах щели, позволившее строить профили, обтекаемые плавно. В аналитической форме найден комплексный потенциал обтекания окружности со щелью. Получены условия замкнутости искомого контура, для выполнения которых применен метод квазирешений. Приведен пример построения контура крылового профиля с коэффициентом подъемной силы больше двух.

Улучшение аэродинамических свойств крыльев путем устройств отсасывания и сдувания воздуха давно вызывает интерес исследователей. Известны различные математические модели таких устройств. Если щель, через которую происходит отсасывание или сдувание потока, достаточно узкая, она моделируется точечной особенностью (стоком или источником). Была рассмотрена [1] задача обтекания профиля Жуковского при наличии на профиле источника и стока. Дано ([2], с. 128–133) полное решение обратной задачи для профиля с источниками и стоками, т.е. задачи построения его контура по заданному на нем распределению скорости. Однако при моделировании щели точечной особенностью на профиле возникает бесконечно большая скорость и бесконечное разрежение, что физически невозможно.

Для случая отсоса через широкую щель детально исследована [3] задача обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости кругового цилиндра со щелью, входное сечение которой моделируется эквипотенциалью в форме дуги окружности.

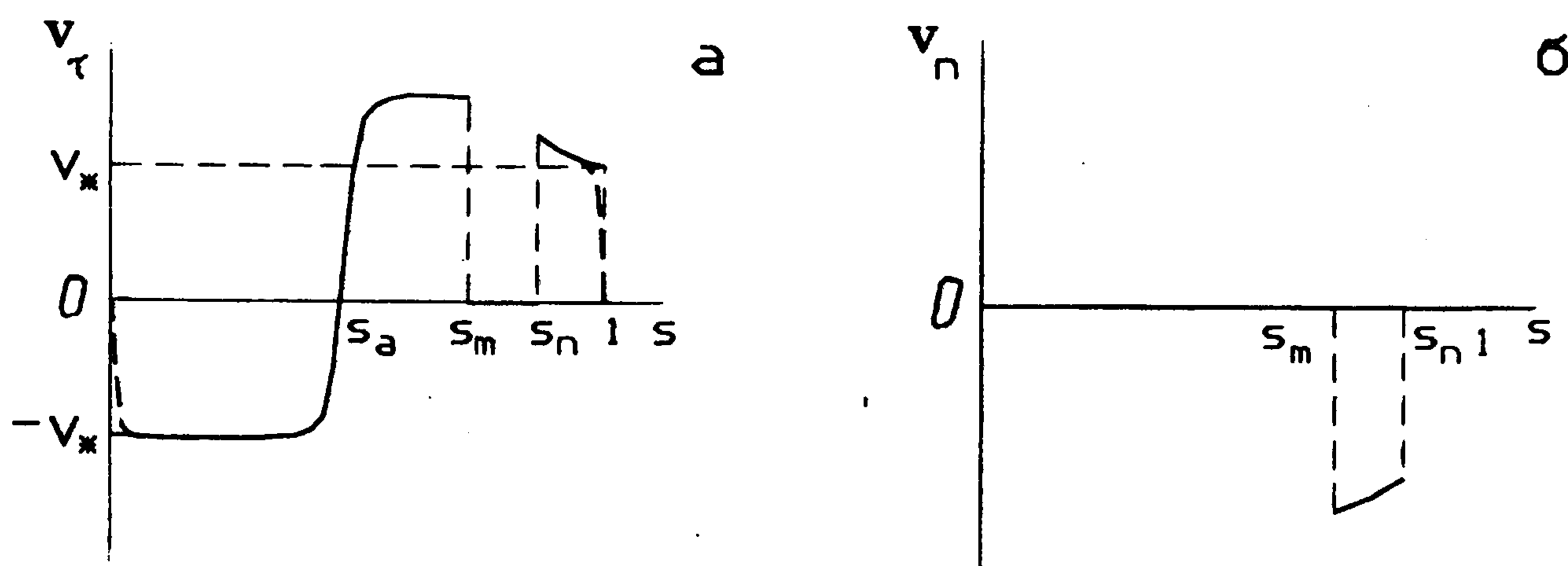
Однако и для гладкого контура крылового профиля, за исключением задней кромки, при моделировании эквипотенциалью входного сечения MN щели (будем далее называть его границей щели) скорость на ее концах (в точке M и, в общем случае, в точке N) обращается в бесконечность. Скорость в точке N равна нулю, если поток в ней разветвляется (фиг. 1, *a*). В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости для получения конечных скоростей в точках M и N необходимо, чтобы комплексный потенциал $w(z)$ не имел в этих точках особенностей и, следовательно, сохранялись углы при конформном отображении области



G_z (внешности профиля) на область G_w в плоскости w . Поэтому решение следует искать в классе профилей, контуры которых, включая границу щели, имеют углы в точках M и N , равные $\pi/2$ и $3\pi/2$ соответственно (фиг. 1, б). При этом щель сверху ограничивает бесконечно тонкий козырек. В линеаризованной теории такие профили были рассмотрены в [4].

С учетом сказанного ниже исследуется обратная краевая задача для крылового профиля с отсасыванием потока идеальной несжимаемой жидкости под бесконечно тонкий козырек через щель, граница которой (как и в [3]) моделируется эквипотенциалью. Для получения плавного обтекания такого профиля вводится условие конечности скорости на концах щели, аналогичное постулату Жуковского – Чаплыгина о конечности скорости в задней кромке профиля. Учет вязкости можно провести по модели пограничного слоя одним из методов, описанных, например, в [5]. При этом следует предположить, что весь пограничный слой заходит в щель.

1. Постановка задачи. В физической плоскости z искомый крыловой профиль плавно обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Контур L_z этого профиля, состоящий из гладких непроницаемых участков $ВАМ$, $NВ$ (A – точка разветвления потока, B – точка схода потока) и проницаемого участка MN (границы щели), является замкнутым (фиг. 1, б). В задней кромке B , принятой за начало координат, внутренний к области течения угол обозначен через ε , $1 \leq \varepsilon \leq 2$. Ось абсцисс x выбрана параллельной заданной скорости набегающего потока V_∞ на бесконечности (далее будем считать скорости безразмерными, отнесенными к V_∞). Безразмерная дуговая абсцисса s , отнесенная к периметру контура L_z , отсчитывается от $s = 0$ на задней кромке до $s = 1$ на ней так, что при возрастании s область течения остается слева.



Фиг. 2

Вдоль непроницаемой части контура L_z задано распределение касательной скорости потока (фиг. 2, а)

$$v_\tau = v_\tau(s), \quad s \in [0, s_m) \cup (s_n, 1]$$

где кусочно-гладкая функция $v_\tau(s)$ обращается в нуль в точке A ($s = s_a$) разветвления потока и непрерывно дифференцируема в этой точке. В задней кромке (точке B) скорость $v_\tau(0) = -v_*$, $v_\tau(1) = v_*$ при $\varepsilon = 2$ (бесконечно тонкая кромка) и $v_\tau(0) = v_\tau(1) = 0$ при $1 \leq \varepsilon < 2$.

На проницаемом участке MN контура L_z задано распределение нормальной скорости (фиг. 2, б)

$$v_n = v_n(s), \quad s \in (s_m, s_n)$$

где $v_n(s)$ – также кусочно-гладкая функция.

Как и в работе В.В. Голубева [3], будем считать границу MN проницаемого участка контура L_z эквипотенциалью, ортогональной направлению скорости потока (фиг. 1, б). Тогда $v_\tau(s) = 0$, $s \in (s_m, s_n)$. Так как при подходе к точкам M и N касательные составляющие скорости к контуру профиля (линиям тока AM и NB) должны переходить непрерывно в нормальные составляющие к границе щели, т.е. к эквипотенциали MN , то при задании $v(s)$ необходимо выполнить условия

$$|v_\tau(s_m - 0)| = |v_n(s_m + 0)|, \quad |v_\tau(s_n + 0)| = |v_n(s_n - 0)|$$

Требуется определить форму профиля и его аэродинамические характеристики.

При сделанных предположениях существует комплексный потенциал течения $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $z = x + iy$, φ – потенциал скорости, ψ – функция тока. На контуре L_z имеем

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s v_\tau(s) ds, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.1)$$

Поэтому циркуляция скорости Γ находится до решения задачи в виде $\Gamma = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi_1 - \varphi_0$. На проницаемом участке MN

$$\psi(s) = - \int_{s_m}^s v_n(s) ds, \quad s_m \leq s \leq s_n \quad (1.2)$$

Следовательно, расход Q через щель MN согласно (1.2) определится по формуле $Q = \psi(s_n) - \psi(s_m) = \psi_n$. Так как на непроницаемом участке функция тока постоянна, то, учитывая непрерывность $\psi(s)$ на L_z , будем иметь

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq s_m \\ - \int_{s_m}^s v_n(s) ds, & s_m \leq s \leq s_n \\ Q, & s_n \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Итак, требуется определить замкнутый контур L_z и аналитическую в G_z (фиг. 1, б) функцию $w(z)$, имеющую на бесконечности представление

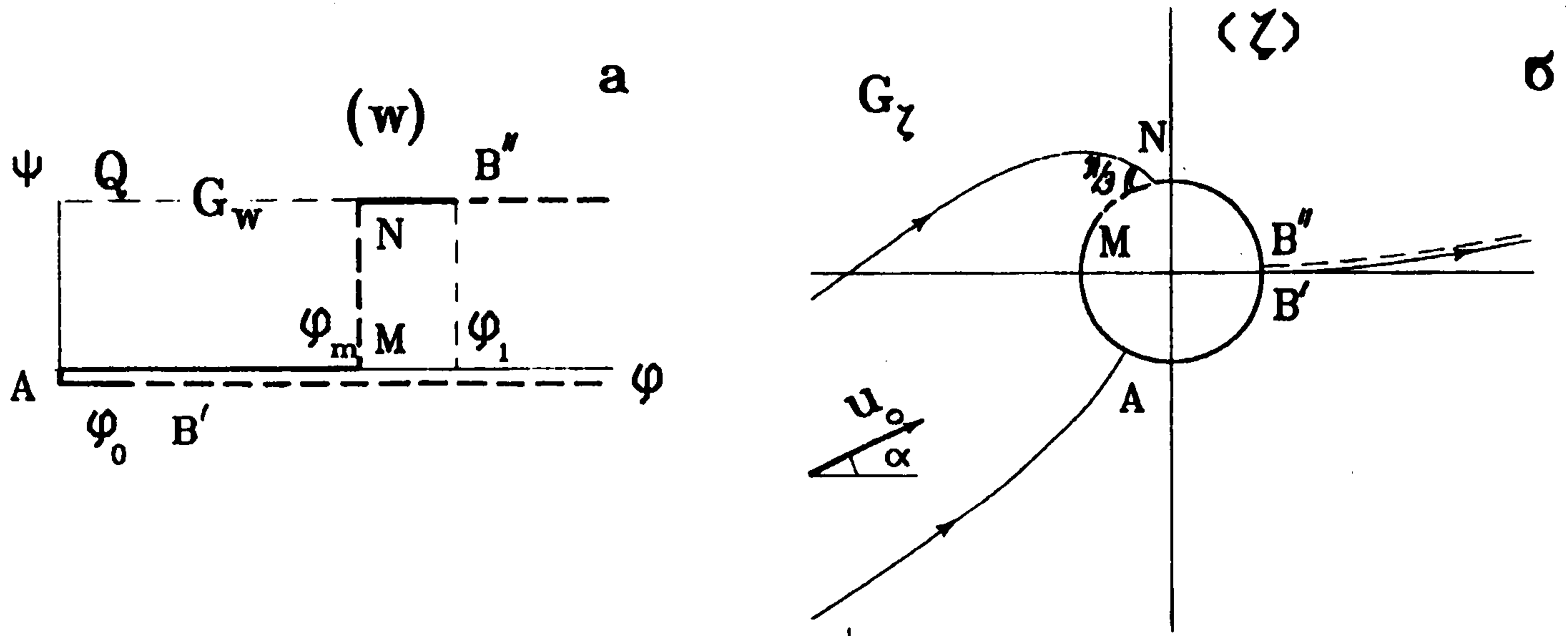
$$w(z) = z - \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

где c_k – комплексные коэффициенты, а на границе L_z удовлетворяющую комплексному краевому условию

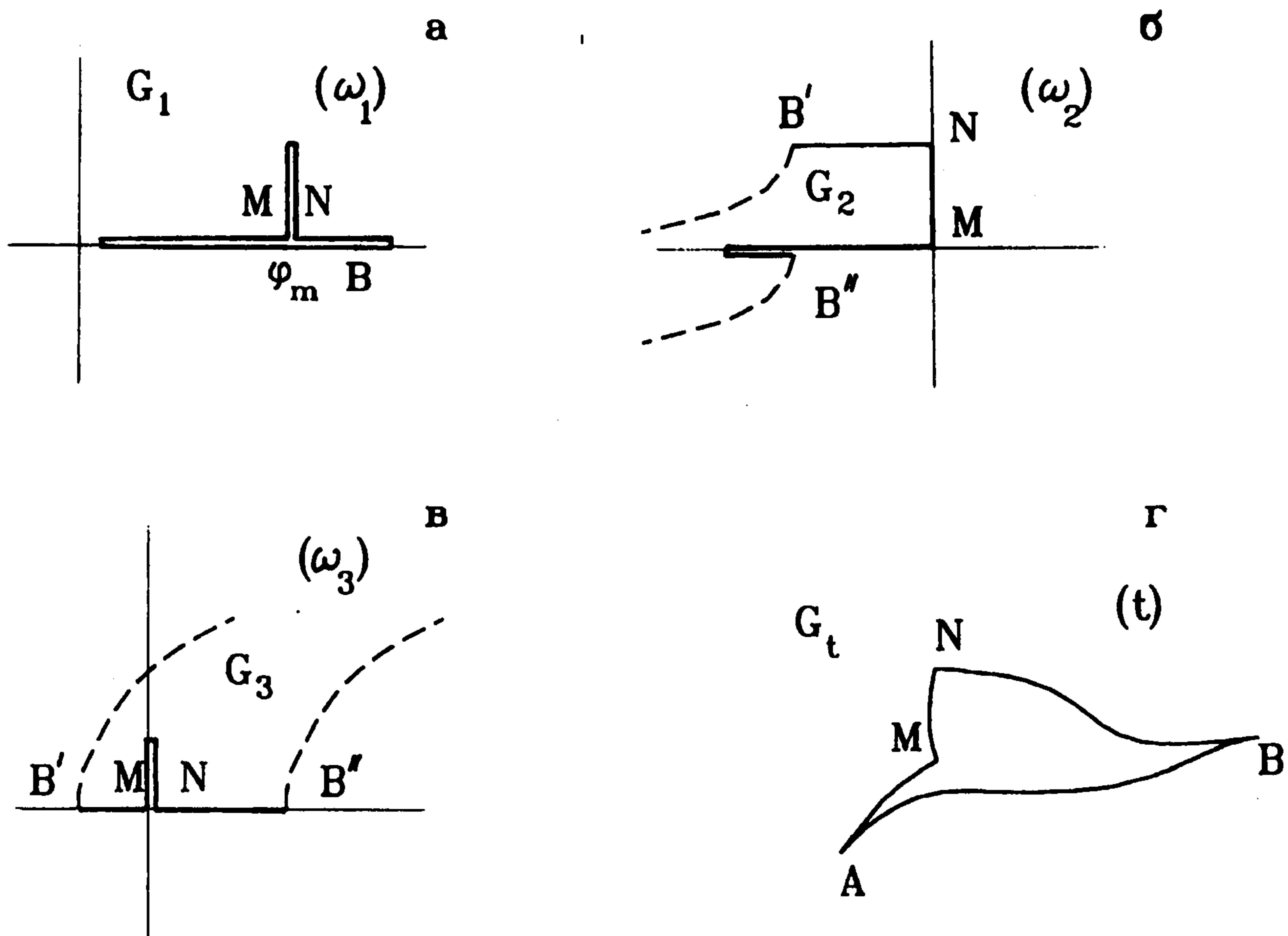
$$w(z)|_{L_z} = \varphi(s) + i\psi(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (1.4)$$

2. Построение комплексного потенциала обтекания круга со щелевым отсосом. Условие (1.4) с учетом (1.1) и (1.3) позволяет определить в плоскости w уравнение границы области G_w , лежащей на бесконечнолистной римановой поверхности. В дальнейшем будем рассматривать один лист этой поверхности (фиг. 3, а), соответствующий области G_z с разрезом вдоль сходящей с задней кромки линии тока.

Введем вспомогательную плоскость ζ и в качестве канонической области G_ζ выберем внешность единичного круга (фиг. 3, б). Для нахождения зависимости дуговой абсциссы s контура L_z от дуговой координаты γ окружности $|\zeta| = 1$ необходимо построить комплексный потенциал $w = \omega(\zeta)$ обтекания единичного круга, на границе которого участок MN является эквипотенциалью с расходом Q , а циркуляция вокруг



Фиг. 3



Фиг. 4

круга должна быть равна Γ . Областью значений этого комплексного потенциала $\omega(\zeta)$ должна быть известная согласно разд. 1 область G_w с возможным сдвигом. Сдвига не будет, если принять $\omega(\zeta_a) = 0$, где ζ_a — точка разветвления потока на круге. Скорость набегающего потока в плоскости ζ обозначим $u_0 e^{i\alpha}$. Представим функцию $\omega(\zeta)$ в виде

$$\omega(\zeta) = \omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta) + \omega_3(\zeta); \quad \omega_2(\zeta) = -\frac{Q}{2\pi} \ln q(\zeta), \quad \omega_3(\zeta) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln g(\zeta)$$

Функции $\omega_1(\zeta)$, $q(\zeta)$, $g(\zeta)$ регулярны в области G_ζ , а на бесконечности имеют полюса первого порядка.

Функция $\omega_1(\zeta)$, представляющая собой комплексный потенциал бесциркуляционного обтекания единичного круга с нулевым расходом через щель, однозначно отображает внешность круга G_ζ на внешность звезды G_1 (фиг. 4, а). Функция $\omega_1(\zeta)$ определяется

формулой (см., например, [6])

$$\omega_1(\zeta) = u_0 e^{-i\alpha\zeta^{-1}} (\zeta - \zeta_k)(\zeta - \zeta_n)^{1/2} (\zeta - \zeta_m)^{1/2} + \varphi_m$$

$$\zeta_k = e^{i\gamma_k}, \quad \zeta_n = e^{i\gamma_n}, \quad \zeta_m = e^{i\gamma_m}$$

где u_0 , α , γ_k – вещественные постоянные. От величины u_0 зависят линейные размеры звезды, а от α , γ_k – поворот звезды относительно центра. Но так как этот угол зафиксирован, то между α и γ_k имеется связь: $\gamma_k = 2\pi + 2\alpha - (\gamma_n + \gamma_m)/2$.

Функция $\omega_2(\zeta)$, представляющая собой комплексный потенциал бесциркуляционного течения с расходом Q , отображает внешность круга с разрезом по линии тока от точки B до бесконечности на область G_2 , показанную на фиг. 4, б. Функция $\omega_3(\zeta)$ – комплексный потенциал чисто циркуляционного обтекания единичного круга; она отображает внешность круга с разрезом по линии тока от точки B до бесконечности на область G_3 , показанную на фиг. 4, в. Построение функций $\omega_2(\zeta)$ и $\omega_3(\zeta)$ существенных трудностей не представляет. Окончательно комплексный потенциал может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = & u_0 e^{-i\alpha\zeta^{-1}} (\zeta - \zeta_k)(\zeta - \zeta_n)^{1/2} (\zeta - \zeta_m)^{1/2} + \varphi_m + iQ - \\ & - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arch} \left(2 \frac{1 - \zeta_1}{1 - \cos \gamma_r} - 1 \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arch} \left(2 \frac{1 + \zeta_1}{1 + \cos \gamma_r} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\zeta_1 = (\zeta / \zeta_p + \zeta_p / \zeta) / 2, \quad \zeta_p = e^{i\gamma_p}, \quad \gamma_p = (\gamma_m + \gamma_n) / 2, \quad \gamma_r = (\gamma_m - \gamma_n) / 2$$

Следует отметить, что координаты концов пронизываемого участка γ_n , γ_m на окружности неизвестны; неизвестны также модуль u_0 и направление α скорости потока на бесконечности. В то же время известны величины: Q , Γ , φ_1 . Для определения параметров u_0 , α , γ_p , γ_r , γ_a используем условия

$$\omega(e^{+0i}) = \varphi_1 + iQ, \quad \omega(\zeta_a) = 0 \quad (2.2)$$

$$\omega'(1) = 0, \quad \omega'(\zeta_a) = 0, \quad \omega'(\zeta_n) = 0$$

представляющие систему пяти нелинейных трансцендентных алгебраических уравнений. Первое и второе уравнения фиксируют значения комплексного потенциала в точках схода и разветвления потока, остальные три уравнения означают равенство нулю скоростей (в плоскости ζ) в критических точках B , A и N . Заметим, что пятое и третье уравнения этой системы означают исключение схем обтекания крыловых профилей, когда точка N не является точкой разветвления потока, т.е. когда точка разветвления потока смещается от точки N вправо по верхней или нижней стороне козырька. Это утверждение можно сформулировать в виде условия, аналогичного постулату Жуковского – Чаплыгина: среди всех теоретически возможных обтеканий идеальной несжимаемой жидкостью профиля со щелевым отсосом, моделируемым отрезком эквипотенциала, плавное обтекание осуществляется с конечной скоростью в точках N и B (фиг. 1, б). Именно это утверждение позволяет (аналогично постулату Жуковского – Чаплыгина) определять в прямых задачах циркуляцию Γ и расход Q .

Формула для скорости имеет вид [3]

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = u_0 e^{i\alpha} \frac{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - 1)}{\zeta^2} \left(\frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_m} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

Если использовать запись (2.3), то систему (2.2) можно преобразовать к виду

$$\omega(e^{+0i}) = \varphi_1 + iQ, \quad \omega(\zeta_a) = 0, \quad \gamma_a' = \pi + 2\alpha + \gamma_r$$

$$Q = 4\pi u_0 \sin(\gamma_r / 2) [\sin(\alpha + \gamma_r / 2) + \sin(\gamma_p - \alpha) \cos(\gamma_r / 2)]$$

$$\Gamma = 4\pi u_0 \cos(\gamma_r / 2) [\sin(\alpha + \gamma_r / 2) + \cos(\gamma_p - \alpha) \sin(\gamma_r / 2)]$$

Доказательство однозначной разрешимости этой системы следует из существования и единственности функции $\omega(\zeta)$.

Докажем, что функция $\omega(\zeta)$, отображающая внешность круга с разрезом на область G_w в плоскости w , существует и единственна.

Преобразуем область G_w (фиг. 3, а) функцией $t = f_0^{-1}(w)$, являющейся обратной к функции $w = u_0 e^{-i\alpha} t + (-Q + i\Gamma)(2\pi)^{-1} \ln t \equiv f_0(t)$, на некоторую область G_t – внешность замкнутого контура (фиг. 4, з). Область G_t может быть и неоднолистной, но конформно приводимой к однолистной области. По теореме Римана существует конформное отображение области G_t на область G_ζ (фиг. 3, б) с нормировкой в окрестности бесконечности $\zeta = \Phi_0(t) = t + a_0 + a_{-1}/t + \dots$. Тогда нужное отображение области G_ζ на G_w получится в виде $w = \omega(\zeta) = f_0(\Phi_0^{-1}(\zeta))$.

Единственность докажем способом от противного. Предположим, что существуют два отображения $w = \omega(\zeta)$ и $w = \omega_*(\zeta)$. Функция

$$\zeta_* = F(\zeta) = \omega_*^{-1}(\omega(\zeta)) = B_1 \zeta + B_0 + B_{-1} / \zeta + \dots$$

переводит взаимно однозначно и конформно внешность одного единичного круга на внешность другого единичного круга с сохранением бесконечности. Такая функция имеет вид $\zeta_* = e^{-i\sigma} \zeta$. Но, если зафиксировать точку B , т.е. считать, что точка $\zeta = e^{+0i}$ переходит в точку $w = \varphi_1 + iQ$, то $\sigma = 0$ и $\omega(\zeta) \equiv \omega_*(\zeta)$.

3. Решение обратной краевой задачи. Для решения рассматриваемой задачи надо установить зависимость между дуговыми абсциссами искомого контура и окружности, т.е. $s = s(\gamma)$ для $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. Это можно сделать из сравнения комплексных потенциалов скорости на границах областей G_z и G_ζ : $w(s) = \omega(e^{i\gamma})$, где $w(s)$ определяется формулой (1.4), а $\omega(e^{i\gamma})$ – формулой (2.1) при $\zeta = e^{i\gamma}$. В отличие от случая непроницаемого профиля здесь, при сопоставлении плоскостей, приходится иметь дело с четырьмя участками ($B'A$, AM , MN , MB'' на фиг. 3, а) монотонных зависимостей φ или ψ от γ и s . Отсюда следует монотонность и единственность зависимости $s(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Далее введем аналитическую в области G_ζ функцию

$$\chi(\zeta) = \ln(dw/dz) - \ln(\zeta - \zeta_a) - (2 - \varepsilon) \ln(\zeta - 1) + (3 - \varepsilon) \ln \zeta \quad (3.1)$$

На границе $|\zeta| = 1$ действительная часть этой функции известна

$$\operatorname{Re}(\chi(e^{i\gamma})) \equiv S(\gamma) = \ln|v(s(\gamma))| - \ln\left(2 \left| \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \right| \right) - (2 - \varepsilon) \ln\left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)$$

Следовательно, функция $\chi(\zeta)$ – решение задачи Шварца для внешности круга

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\gamma) \frac{\zeta + e^{i\gamma}}{\zeta - e^{i\gamma}} d\gamma + i\alpha_0$$

Из условия $\operatorname{Im} \chi(\infty) = 0$ следует $\alpha_0 = 0$. Используя представление (3.1), после подстановки выражения (2.3) найдем аналитическую в области G_ζ функцию

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\alpha} \int_1^\zeta e^{-\chi(\zeta)} \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} \left(\frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \zeta_m}\right)^{1/2} d\zeta \quad (3.2)$$

Полагая в этом соотношении $\zeta = e^{i\gamma}$, получим параметрическое уравнение искомого контура крылового профиля. Однако построенное решение не обеспечивает замкнутость контура L_z и совпадение заданной величины скорости V_∞ с определяемой в процессе решения. (Напомним, что в контур L_z крылового профиля включена и граница проницаемого участка, моделирующего щель.)

Условие совпадения скорости на бесконечности с заданной записывается так же, как и в случае непроницаемого контура (см., например, [2])

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma = 0 \quad (3.3)$$

Условие замкнутости таково:

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = \pi \left(1 - \varepsilon + \frac{\zeta_m - \zeta_n}{2} \right) \quad (3.4)$$

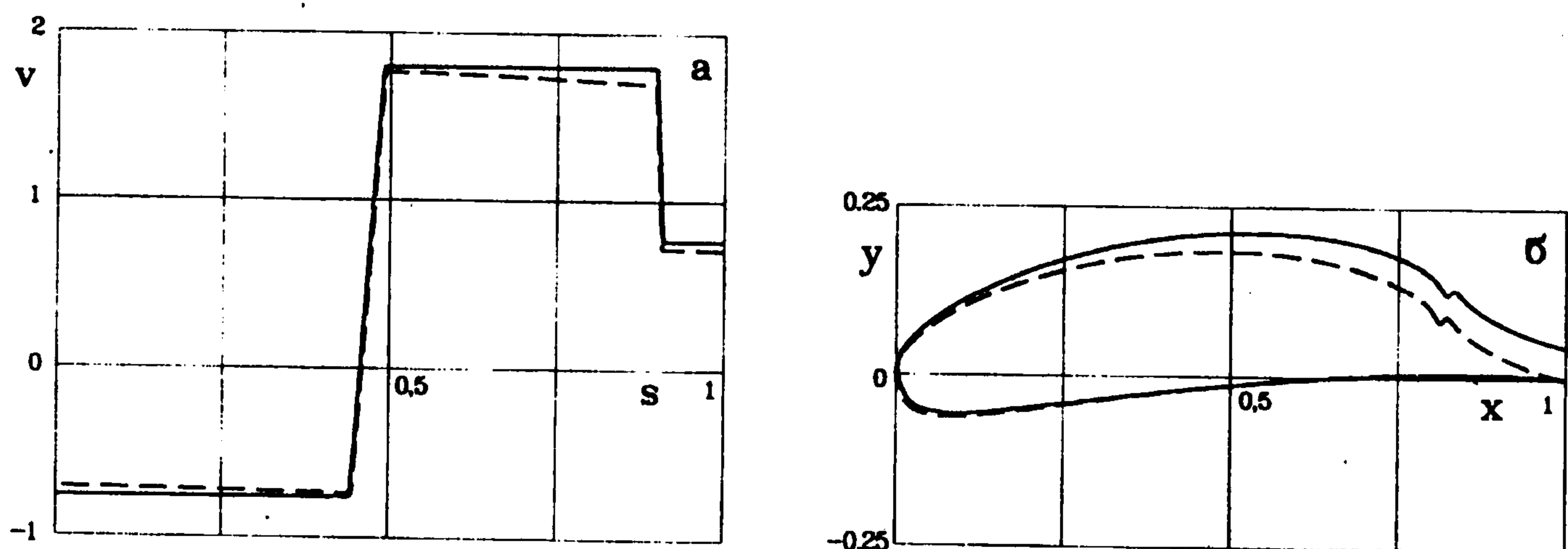
Если выполнены условия (3.3), (3.4), то рассмотренная обратная краевая задача аэрогидродинамики для крылового профиля со щелевым отсосом имеет единственное решение. Если же условия (3.3), (3.4) оказались невыполненными, отыскание формы замкнутого контура для профиля с отсосом можно провести, используя метод квази-решений [7].

Если в приведенных выше формулах положить $\gamma_r = 0$, т.е. $s_m = s_n$, получим решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики для непроницаемого профиля.

Аэродинамические силы, действующие на профиль со щелевым отсосом, вычисляются по известным формулам (см., например, [3])

$$R_x = \rho Q V_\infty, \quad R_y = \rho \Gamma V_\infty \quad (3.5)$$

где ρ – плотность идеальной жидкости. Так как для профиля с отсосом расход $Q > 0$, то R_x – сила сопротивления, а для профиля с выдувом ($Q < 0$) R_x – реактивная сила. Заметим, что для выдува формула (3.5) верна лишь при потенциальном течении без разрывов сплошности и при совпадении полного давления выдуваемой струи с полным внешним давлением.



Фиг. 5

4. Числовой пример. На фиг. 5 приведены результаты построения профиля с коэффициентом подъемной силы больше двух и $\varepsilon = 2$ (бесконечно тонкая задняя кромка). В качестве исходного было взято распределение скорости, изображенное на фиг. 5, а сплошной линией, причем за проницаемый участок был выбран участок падения скорости на верхней поверхности ($s_m = 0,90$, $s_n = 0,91$) по линейному закону. На верхней поверхности до и после щели скорость выбрана постоянной. При отсутствии проницаемого участка профили с такими распределениями скорости рассматривал Лайтхилл [8]. Аналогичная задача опре-

деления формы диффузора с отбором потока и с постоянными скоростями на стенках была решена Г.Ю. Степановым [9].

В приведенных здесь расчетах длина проницаемого участка составила 1% периметра контура профиля, и из 200 расчетных точек, по которым строился контур профиля, на эквипотенциаль пришлось всего две точки. Поэтому в примере эта граница принята за отрезок нормали. Напомним, что величина скорости всюду безразмерная, отнесенная к V_∞ , а линейные размеры во всех расчетах и на фиг. 5, а отнесены к периметру контура, за исключением данных на фиг. 5, б, где линейные размеры отнесены к длине хорды профиля. Таким образом, скорость на бесконечности $V_\infty = 1$. Для заданного распределения скорости циркуляция $\Gamma = 0,478$ и расход $Q = 0,011$.

В результате решения вначале получен разомкнутый контур (фиг. 5, б, сплошная линия), обтекаемый при $V_\infty = 1,02$. После применения метода квазирешений построен замкнутый контур (фиг. 5, б, штриховая линия), обтекаемый с $V_\infty = 1,0$ при угле атаки $\beta = 7^\circ$, толщина профиля $t = 21\%$. Коэффициент подъемной силы у этого профиля $c_y = 2,09$, а коэффициент сопротивления $c_x = 0,048$. В результате квазирешения исходное распределение скорости (сплошная линия на фиг. 5, а), естественно, изменилось и модифицированное распределение изображено на фиг. 5, а штриховой линией.

Авторы благодарят Г.Ю. Степанова за ряд ценных замечаний, учтенных при окончательной доработке статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00112).

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А.И. Обтекание профиля Жуковского при наличии на профиле источника и стока // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 1. С. 41–54.
2. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. 333 с.
3. Голубев В.В. Теоретические основания методов увеличения подъемной силы крыла. Разрезные крылья, щитки, отсасывание // Труды по аэродинамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1957. С. 199–291.
4. Шурыгин В.М. Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977. 199 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 3–13.
8. Lighthill M.J. A new method of two-dimensional aerodynamic design // Aeronaut. Res. Council. Rept. and Mem. 1945. № 2112. 53 p.
9. Степанов Г.Ю. Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 4. С. 30–42.

Казань

Поступила в редакцию
30.I.1996