УДК 531.36; 521.135

© 1997 г. **В.А. Кузьминых**

О ГЛОБАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОРБИТ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМ ВАРИАНТЕ ЗАДАЧИ НЕСКОЛЬКИХ ТЕЛ

В рамках задачи нескольких тел составлена глобально регуляризированная система дифференциальных уравнений движения материальной точки относительно основного центра притяжения с учетом возмущений гравитирующих точек, совершающих круговые движения около центра. Выведены формулы первого приближения решения системы. На основе нулевого (кеплеровского) и первого приближений предлагается асимптотическое разложение общего решения эквивалентных канонических уравнений, описывающих движение материальной точки. Определена область разложения решения в ряды по степеням начальных значений фазовых координат и параметра.

Известные асимптотические представления решения задачи нескольких тел включают в себя начальные члены разложений относительно степеней регулярного времени [1], последовательности пикаровских приближений в некоторых областях фазового пространства [2, 3], первое приближение в окрестности порождающего решения [4].

Излагаемый ниже способ построения решения одного варианта задачи нескольких тел можно считать некоторым дополнением к перечисленным работам в смысле получения точного представления регуляризированных орбит относительного движения материальной точки.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n точек $M_1, \ldots, M_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$. Пусть $\mathbf{r}_j$ – радиус-вектор точки M_j в некоторой инерциальной ортогональной системе координат. В рамках ньютоновской задачи n тел уравнение движения точки M_2 относительно точки M_1 имеет вид [5]

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = -\sum_{i=3}^{n} \frac{\mu_i}{d_i^3}\mathbf{d}_i + \frac{\mu_i}{R_i^3}\mathbf{R}_i \tag{1}$$

$$\mu = \gamma(m_1 + m_2),\ \mu_i = \gamma m_i,\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{d}_i = \mathbf{r} - \mathbf{R}_i$$

(γ – гравитационная постоянная).

С целью преобразования правой части уравнения введем переменные

$$q_i = 2R_i^{-2}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r} - r^2 / 2), \qquad \varphi = (1 - q_i)^{-3/2} - 1 \tag{2}$$

Тогда уравнение

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = \sum_{i=3}^{n} \frac{\mu_i}{R_i^3}[\varphi_i \mathbf{R}_i - (1+\varphi_i)\dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{f} \tag{3}$$

в силу соотношений (2) эквивалентно уравнению (1).

Далее будем полагать, что точка $M_i\,(i = 3, \ldots, n)$ движется относительно M_1 по круговой орбите радиуса R_i, задаваемой уравнением [6]

$$\mathbf{R}_i = R_i \cos\left(E_{i0} + \sqrt{\frac{\mu}{R_i^3}}t\right)\mathbf{A}_i + R_i \sin\left(E_{i0} + \sqrt{\frac{\mu}{R_i^3}}t\right)\mathbf{B}_i, \quad R_{i+1} > R_i$$

в котором E_{i0} – начальное значение эксцентрической аномалии E_i, а векторы $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ являются постоянными.

Из уравнения (3) с помощью преобразования Сундмана $dt = rds$ и Кустаанхеймо – Штифеля

$$r = \Lambda(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad r = u^2, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$$

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{Vmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

образуется регуляризированная система уравнений [6]

$$\mathbf{u}' = \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}' = -\frac{h}{2}\mathbf{u} + \sum_{i=3}^{n} \frac{\mu_i u^2}{2R_i^3}[\varphi_i \Lambda^T \mathbf{R}_i - u^2(1+\varphi_i)\mathbf{u}] \tag{5}$$

в которой $\mathbf{u}$ – вектор KS-положения, штрих означает дифференцирование по s.

Приведенные выше равенства позволяют записать уравнения для переменной φ_i, полной механической энергии $(-h)$ точки M_2 и времени t следующим образом:

$$\varphi_i' = \frac{3(1+\varphi_i)^{5/3}}{R_i^2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{R_i^3}}u^2\left(\frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial E_i}, \ \mathbf{r}\right) + 2(\mathbf{R}_i, \ \Lambda\mathbf{u}') - 2(\mathbf{r}, \ \Lambda\mathbf{u}')\right)$$

$$h' = -2(\mathbf{u}', \ \Lambda^T\mathbf{f}), \quad t' = u^2 \tag{6}$$

Таким образом, составлена глобально регуляризированная система уравнений (5), (6) относительно фазовых переменных $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \varphi_i, h, t$. Будем считать, что в момент $t = 0$ $(s = 0)$ задаются начальные значения $\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}}_0$, которые в силу переходных формул регуляризации определяют начальные значения $\mathbf{u}^{(0)}$, $\mathbf{w}^{(0)}$.

Рассмотрим следующую процедуру нахождения решения задачи Коши для системы уравнений (5), (6).

В качестве нулевого приближения решения принимаем универсальное кеплеровское решение, отмечаемое индексом "c" [6]

$$\mathbf{u}_c = c_0(h_c s^2/2)\mathbf{u}^{(0)} + s c_1(h_c s^2/2)\mathbf{w}^{(0)}$$

$$h_c = \mu/r_0 - \dot{\mathbf{r}}_0^2/2, \quad t_c = r_\pi s + \mu e s^3 C_3(2h_c s^2) \tag{7}$$

$$\varphi_{ic} = (1-q_{ic})^{-3/2} - 1, \quad q_{ic} = 2R_i^{-2}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{r}_c - r_c^2/2), \quad \mathbf{r}_c \neq \mathbf{R}_i$$

Здесь r_π и e – соответственно радиус перицентра и эксцентриситет кеплеровской орбиты, а $c_j(\cdot)$ – символы функций Штумпфа.

Необходимо отметить, что функция $t_c(s)$ является обратимой относительно аргумента s.

Исходя из третьего равенства (7), получаем соотношение [7]

$$s = \frac{t_c}{r_\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Q_n\left(\frac{t_c}{r_\pi}\right), \quad \varepsilon = \frac{\mu e}{r_\pi}$$

Величины Q_n определяются по рекуррентным формулам

$$Q_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Q_{n+1-k}}{\partial\theta}Q_k,\quad \theta=\frac{t_c}{r_\pi}$$

с начальным значением

$$Q_1(\theta)=-\theta^3 c_3(2h_c\theta^2)$$

Далее введем в рассмотрение параметр $\lambda=\max_i\mu_i$, для которого $\mu_i=\lambda_i\lambda$, и запишем первое по λ приближение решения системы (5), (6) следующим образом:

$$u^{(1)}=u_c+\lambda\Delta u,\quad t^{(1)}=t_c+\lambda\Delta t,\quad h^{(1)}=h_c+\lambda\Delta h$$

На основании (5) уравнение для $\Delta\mathbf{u}$ запишем в виде

$$(\Delta\mathbf{u})''+\frac{h_c}{2}\Delta\mathbf{u}=-\frac{\Delta h}{2}\mathbf{u}_c+\sum_{i=3}^{n}\frac{\lambda_i u_c^2}{2R_i^3}[\varphi_{ic}\Lambda_c^T\mathbf{R}_i-u_c^2(1+\varphi_{ic})\mathbf{u}_c]=\{g_k(s)\}\tag{8}$$

$$\Delta h=-\frac{2}{\lambda}\int_0^s(\mathbf{u}'_c,\ \Lambda_c^T\mathbf{f}_c)\,ds$$

в котором $g_k(s)$ представляет собой краткую форму записи правой части k-го уравнения.

С помощью метода вариации постоянных запишем решение уравнения (8)

$$\Delta u_k=\int_0^s(s-\vartheta)c_1\left(\frac{h_c}{2}(s-\vartheta)^2\right)g_k(\vartheta)\,d\vartheta\tag{9}$$

Соответственно имеем

$$\Delta t=2\int_0^s(\mathbf{u}_c,\ \Delta\mathbf{u})\,ds$$

Для нахождения разложения решения целесообразно рассмотреть отнесенный к регулярному времени s гамильтониан [6]

$$\Gamma=\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{2}w_0u^2+\frac{1}{4}V(u_0,\ \mathbf{u})u^2-\frac{\mu}{4}\tag{10}$$

в котором канонические переменные u_k, w_k в силу [6] таковы: $u_0=t/2$, $w_0=h/2$, а для значений индекса $k=1,2,3,4$ величины u_k, w_k – соответственно компоненты векторов параметрического положения и параметрической скорости.

При условии, что на рассматриваемом интервале времени движения $s\in I$ гравитирующие точки $M_i\,(i\geqslant i_0)$ являются внешними по отношению к точке M_2 в смысле выполнимости неравенства $r<R_{i_0}$, потенциальную функцию $V_{i_0}(u_0,\ \mathbf{u})$ запишем в виде [8]

$$V_{i_0}=-\sum_{i=i_0}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mu_i r^k}{R_i^{k+1}}P_k(\cos H_i),\quad \cos H_i=\frac{\mathbf{r}\mathbf{R}_i}{rR_i}\tag{11}$$

Если для $s\in I$ точка $M_i\,(i<i_0)$ является внутренней по отношению к M_2 в смысле выполнимости неравенства $r\geqslant R_{i_0-1}$, то потенциальная функция $\tilde V_{i_0}$ имеет вид [6]

$$\overline{V}_{i_0}=-\sum_{i=3}^{i_0-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\mu+\mu_i)m_k}{(m_1+m_i)r^{k+1}}R_i^kP_k(\cos H_i)\tag{12}$$

Будем считать, что на всем рассматриваемом интервале $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ выполняется неравенство $r < R$. Тогда справедливо разложение

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{R-r}{R} + \frac{(R-r)^2}{R^2} + \ldots\right) \tag{13}$$

Отметим, что если $r < R_3$, $i_0 = 3$, то $\tilde{V}_{i_0} = 0$, а если $r > R_n$, $i_0 = n + 1$, то $V_{i_0} = 0$. Таким образом, получили

$$V(u_0,\ \mathbf{u}) = V_{i_0} + \tilde{V}_{i_0},\quad s \in I \tag{14}$$

Решение канонической системы уравнений с гамильтонианом (10)

$$\mathbf{U}' = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{W}},\quad \mathbf{W}' = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{U}},\quad \mathbf{U} = (u_0,\ u_1,\ u_4),\quad \mathbf{W} = (w_0,\ w_1,\ \ldots w_4) \tag{15}$$

составим на основании найденных приближений в форме асимптотических разложений

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathbf{q}^{(n)}(\mathbf{U}_c,\ \mathbf{W}_c),\quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\mathbf{P}^{(n)}(\mathbf{U}_c,\ \mathbf{W}_c) \tag{16}$$

Для определения вектор-функции $\mathbf{q}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$ применим рекуррентный алгоритм Депри – Кэмила [9]

$$q^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_n}{\partial \mathbf{W}_c} + \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j}\mathbf{q}_{j,n-j},\quad \Gamma_n = \left.\frac{\partial^{(n-1)}\Gamma}{\partial \lambda^{(n-1)}}\right|_{\lambda=0}$$

$$\mathbf{q}_{ji} = B_j\mathbf{q}^{(i)} - \sum_{m=1}^{j-1} C_{j-1}^{m-1}B_m\mathbf{q}_{j-m,i},\quad \mathbf{q}_{11} = B_1\mathbf{q}^{(1)},\quad \mathbf{q}^{(1)} = \left(\frac{\Delta t}{2},\ \Delta\mathbf{u}^T\right)$$

Результат применения оператора B_i к скалярной функции ψ приводит к вычислению скобки Пуассона $B_i\psi = \{\psi, \Gamma_i\}$.

При решении задачи Коши по формулам (16) функция $V(u_0, \mathbf{u})$ для каждого интервала $I \subset [0, \alpha]$ определяется согласно равенству (14).

Отметим, что был разработан [7] итерационный метод определения элементов орбит в планетной задаче нескольких тел с помощью полиномиально-экспоненциальных рядов, а также в виде степенных рядов с квазипериодическими коэффициентами, опирающийся на систему подпрограмм действия с соответствующими рядами.

В заключение найдем область разложения решения системы (15) в абсолютно сходящиеся ряды по степеням начальных значений фазовых координат и параметра λ. При ограничении, состоящем в том, что в (11)–(13) удерживается произвольное конечное число слагаемых, общий вид правых частей уравнений (15) выражается формулой

$$F = \sum_{i=3}^{n}\sum_{l=1}^{N}\sum_{\varkappa, l_0, \ldots l_8} Z_{\varkappa, l_0, \ldots l_8}(s)\ \lambda^{\varkappa}u_1^{l_1}\ldots u_4^{l_4}w_1^{l_5}\ldots w_4^{l_8}Y_{l_0,i}(\cdot)$$

$$l = \varkappa + l_0 + l_1 + \ldots + l_8$$

Здесь $Z_{\varkappa, l_0, \ldots l_8}(s)$ – некоторые переменные коэффициенты. Символ $Y_{l_0,i}(\cdot)$ означает полином степени l_0 от аргументов $\cos E_i$, $\sin E_i$.

Поэтому в силу теоремы Перрона [10] для конечного интервала $0 \leqslant s \leqslant \alpha$ в области, определяемой неравенством

$$\frac{\lambda}{a}+\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{|u_{0k}|}{b_k}+\frac{|w_{0k}|}{b_{k+5}}\right)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}e^{-n(10\alpha\beta+1)} \tag{17}$$

функции u_k, w_k, удовлетворяющие системе (15), разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды по степеням λ и начальных значений с коэффициентами, зависящими от s. Ряды типа Перрона ввиду возможности перестановок их членов при выполнении неравенства (17) совпадают с (16).

Постоянные a, b_k, b_{k+5}, β находятся в результате оценки коэффициентов разложений правых частей системы (15) по известному правилу [10]. Ряд в правой части неравенства (17) по признаку Даламбера сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мячин В.Ф.* Ругуляризация двойных соударений в задаче N тел и ее применение к численному интегрированию уравнений небесной механики // Бюлл. ин-та теорет. астрономии АН СССР. Л.: Наука, 1974. Т. 13. № 8. С. 482–500.
2. *Соколов Л.Л., Холшевников К.В.* Об интегрируемости задачи N тел // Письма в Астрон. журн. 1986. Т. 12. № 7. С. 557–561.
3. *Соколов Л.Л., Холшевников К.В.* Региональная интегрируемость задачи N тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 437–441.
4. *Тхай В.Н.* Симметричные периодические орбиты задачи многих тел. Резонансность и парад планет // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 3. С. 355–365.
5. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966. 448 с.
6. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 205 с.
8. *Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986. 318 с.
9. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1995