УДК 62-50

© 1997 г. В.И. Воротников

О ПОСТРОЕНИИ ИГРОВЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача о переводе нелинейной динамической системы, подверженной возмущениям, за конечное время в нулевое положение равновесия посредством ограниченных управлений. Известны лишь уровни неконтролируемых возмущений, которые не предполагаются малыми. Получены достаточные условия, обеспечивающие гарантированное решение этой задачи для заданной области начальных состояний. Дается оценка гарантированного времени управления. Построение управлений сводится к построению игровых стратегий для вспомогательных линейных игровых задач. Для оценки "вспомогательных помех" в образующихся линейных системах предлагается принцип "назначения и последующего подтверждения" их уровней. На его основе эти оценки проверяются на множестве состояний вспомогательных линейных систем, где затем оцениваются и управления. В результате получен итерационный алгоритм решения исходной нелинейной задачи. В рамках предлагаемого метода дано новое решение игровой задачи переориентации асимметричного твердого тела при помехах.

Работа развивает подход, предложенный в [1–4], и примыкает к исследованиям по декомпозиции [5–7], а также частичной стабилизации и управляемости [8–11] нелинейных управляемых систем.

1. Постановка задачи. Пусть движение объекта управления описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i = Y_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum Y_{ik}(\mathbf{x})u_k + Y_i^{(2)}(\mathbf{x})v_i, \quad \dot{z}_j = Z_j(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

Здесь и далее $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p}$, $k=\overline{1,r}$; ведется суммирование по повторяющимся индексам; $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ – вектор фазовых переменных y_i, z_j; $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ – соответственно векторы управлений u_k и помех v_i. Функции $Y_i^{(1)}$, Y_{ik}, $Y_i^{(2)}$, Z_j определены и непрерывны, причем Z_j вместе со своими частными производными по y_i, z_j, в области

$$\Lambda: \ |\mathbf{x}| < H = \text{const} > 0$$

Функции $Y_i^{(1)}$, Z_j обращаются в нуль при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Для функций Y_{ik}, напротив, обращение в нуль при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ считаем невозможным (иначе будет противоречие с последующими принимаемыми в статье условиями).

Управления $\mathbf{u} \in K$ выбираются в классе K вектор-функций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ ($\mathbf{x}_0$ – начальное значение вектора $\mathbf{x}$), кусочно-непрерывных по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$ (в допустимой области изменения $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$). Управления $\mathbf{u} \in K$ также удовлетворяют заданным "геометрическим" ограничениям

$$|u_k| \leqslant \alpha_k = \text{const} > 0 \tag{1.2}$$

Помехи $\mathbf{v} \in K_1$ могут реализовываться в виде любых кусочно-непрерывных функций $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ в рамках ограничений

$$|v_i(t)| \leqslant \beta_i = \text{const} > 0 \tag{1.3}$$

Задача 1. Найти управления $\mathbf{u} \in K$, при любых $\mathbf{v} \in K_1$ переводящие систему (1.1) за *конечное* время из заданной области S начальных возмущений $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \in S$ в положение равновесия $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$. Момент времени $t_1 > t_0$ не фиксируется.

2. Вспомогательная линейная система. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$: $R^{n+r} \to R^{p+q}$, $n = m + p$ (q – некоторая постоянная, $0 \leqslant q < r \leqslant m$) с компонентами (здесь и далее $s = \overline{1, q}$)

$$\Phi_s = \sum Y_{sk}(\mathbf{x})u_k, \quad \Phi_{q+j} = \sum[\partial Z_j(\mathbf{x}) / \partial y_i][\sum Y_{ik}(\mathbf{x})u_k] \tag{2.1}$$

Считая $p + q \geqslant r$, введем матрицу Якоби $F = \|\partial\mathbf{\Phi}/\partial\mathbf{u}\|$. Допустим, что в области

$$\Lambda_1\colon\ |\mathbf{x}| < H_1 = \text{const} > 0 \quad (\Lambda_1 \subseteq \Lambda) \tag{2.2}$$

справедливо условие

$$\operatorname{rank} F(\mathbf{x}) = r \tag{2.3}$$

Кроме того, считаем, что в F при всех $\mathbf{x} \in \Lambda_1$ линейно независимы одни и те же строки. Пусть, например, это первые r строк.

В случае (2.3) система $\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \overset{*}{u}_k$ ($\overset{*}{u}_k$ – определяемые ниже вспомогательные управления, образующие вектор $\mathbf{u}^*$) имеет решение

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \tag{2.4}$$

При этом $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, причем компоненты f_k вектор-функции $\mathbf{f}$: $R^{n+r} \to R^r$ непрерывны по $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}^*$ при $\mathbf{x} \in \Lambda_1$ и всех $\mathbf{u}^*$.

Введем обозначения

$$\overset{*}{v}_s = \hat{Y}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \overset{*}{v}_{q+l} = \langle[\partial Z_l(\mathbf{x}) / \partial\mathbf{x}]\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})\rangle \tag{2.5}$$

Здесь и далее $l = \overline{1, r-q}$; $\hat{Y}_i$ получаются из выражений для $\dot{y}_i$ в (1.1) при $u_k = 0$; в вектор-функцию $\hat{\mathbf{X}}\colon R^{n+m} \to R^n$ входят компоненты $\hat{Y}_l$, Z_j, в вектор-функцию $\partial Z_l/\partial\mathbf{x}$: $R^n \to R^n$ – компоненты $\partial Z_l / \partial y_i$, $\partial Z_l / \partial z_j$; $\langle\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения.

Трактуем $\overset{*}{v}_k$ как "вспомогательные помехи". В результате при сделанных допущениях из замкнутой нелинейной системы (1.1), (2.4) можно выделить линейную конфликтно-управляемую систему

$$\dot{y}_s = \overset{*}{u}_s + \overset{*}{v}_s \tag{2.6}$$

$$\ddot{z}_l = \overset{*}{u}_{q+l} + \overset{*}{v}_{q+l} \tag{2.7}$$

в которой $\overset{*}{u}_k$ – управления.

На базе решения соответствующих игровых задач управления для вспомогательной линейной системы (2.6), (2.7) далее предлагается строить решение исходной нелинейной задачи 1. В результате конструкцию (2.4) можно рассматривать как общую структурную форму законов управления в задаче 1. Параметры этой формы – вспомогательные управления $\overset{*}{u}_k$ – определяются при решении соответствующих линейных игровых задач.

В отличие от рассмотренных ранее постановок задач [3, 4] усложнена структура "вспомогательных помех" $\overset{*}{v}_k$ при переходе от исходной (1.1) к вспомогательной линейной системе (2.6), (2.7). Это позволяет упростить полученные ранее [3, 4] управления u_k, однако усложняется нахождение уровней $\overset{*}{v}_k$. В конкретных задачах, как будет показано, на этом пути может быть полезен предлагаемый принцип "назначения и последующего подтверждения" уровней $\overset{*}{v}_k$.

3. Вспомогательные линейные игровые задачи. Для системы (2.6), (2.7) решим задачу о быстрейшем приведении в положение

$$y_s = 0, \quad z_l = \dot{z}_l = 0 \tag{3.1}$$

посредством вспомогательных управлений $\overset{*}{u}_k$ при любых допустимых $\overset{*}{v}_k$.

Эту задачу трактуем как дифференциальную игру. В ней один из игроков распоряжается $\overset{*}{u}_k$ и стремится уменьшить время τ приведения в (3.1). В распоряжении второго игрока ("противника"), стремящегося увеличить τ, – "вспомогательные возмущения" $\overset{*}{v}_k$.

Для решения данной задачи допустимые уровни u_k^* должны быть выше уровней $\overset{*}{v}_k$. Соответствующие ограничения, следуя (1.2), (1.3), примем в виде

$$|u_k^*| \leqslant \alpha_k^* = \text{const} > 0, \quad |v_k^*| \leqslant \beta_k^* = \rho_k \alpha_k^*, \quad 0 < \rho_k < 1 \tag{3.2}$$

Процедура назначения уровней $\overset{*}{\alpha}_k$, $\overset{*}{\beta}_k$ рассматривается ниже. Здесь считаем их заданными, так что выполняется условие (3.2).

Решение указанной дифференциальной игры для системы (2.6), (2.7) при ограничениях (3.2) сводится [5, 12] к задаче оптимального быстродействия для системы

$$\dot{y}_s = (1 - \rho_s) u_s^* \tag{3.3}$$

$$\ddot{z}_l = (1 - \rho_{q+l}) u_{q+l}^* \tag{3.4}$$

при ограничениях $|\overset{*}{u}_k| \leqslant \overset{*}{\alpha}_k$.

Краевые условия те же, что и для (2.6), (2.7). Система (3.3), (3.4) получается из (2.6), (2.7) при $\overset{*}{v}_k = -\rho_k \overset{*}{u}_k$. Это "наихудшие" $\overset{*}{v}_k$ – оптимальные управления "противника".

Решение задачи оптимального быстродействия для систем типа (3.3), (3.4) имеет вид [13]

$$u_s^* = \begin{cases} -\alpha_s^* \operatorname{sign} y_s, & y_s \neq 0 \\ 0, & y_s = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$u_{q+l}^* = \begin{cases} \alpha_{q+l}^* \operatorname{sign} \psi_l(z_l, \dot{z}_l), & \psi_l \neq 0 \\ \alpha_{q+l}^* \operatorname{sign} z_l = -\alpha_{q+l}^* \operatorname{sign} \dot{z}_l, & \psi_l = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь $\psi_l = -\dot{z}_l - [2\alpha_{q+l}^*(1 - \rho_{q+l})]^{-1} z_l |z_l|$ – функции переключений.

Величина $\tau = \max(\tau_k)$, где τ_k – время оптимального быстродействия для каждой из подсистем системы (3.3), (3.4), определяет минимальное гарантированное время в рассматриваемой игровой задаче для системы (2.6), (2.7). Если $\overset{*}{v}_k$ отличаются от "наихудших", то время приведения в (3.1) не превышает τ.

Остановимся на характеристике фазовых траекторий системы (2.6), (2.7), (3.5), (3.6) при $\overset{*}{v}_k \not\equiv -\rho_k \overset{*}{u}_k$. В случае системы (2.6), (3.5) при всех допустимых $\overset{*}{v}_s$ движение происходит по кривой (в случае $\overset{*}{v}_s \equiv 0$ – по прямой), расположенной между отрезков прямых – траекторий системы (2.6), (3.5) соответственно при $\overset{*}{v}_s = \pm\rho_s \overset{*}{u}_s$, до достижения положения $y_s = 0$.

В случае системы (2.7), (3.6) движение происходит сначала (до достижения кривой переключений $\psi_l = 0$) между дуг парабол соответственно систем $\ddot{z}_l = (1 \pm \rho_{q+l})u^*_{q+l}$ при u^*_{q+l} вида (3.6). Затем, попав на кривую переключений – вдоль нее в скользящем режиме до достижения требуемого значения.

4. Подход к решению задачи 1. Обозначим $\mathbf{X}_\mathrm{v} = \{\mathbf{x}_\mathrm{v}(t) = \mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v})\}$ множество процессов системы (1.1), (2.4), (3.5), (3.6), отвечающих всем $\mathbf{v} \in K_1$. Выделение из системы (1.1), (2.4) линейной системы (2.6), (2.7) позволяет множества $\mathbf{Y}^*_\mathrm{v} =$ $= \{y_s(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v})\}$ и $\mathbf{Z}^*_\mathrm{v} = \{z_l(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v})\}$ части компонент $(y_s,\ z_l)$ процессов $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}) \in \mathbf{X}_\mathrm{v}$ найти как множества соответствующих всем допустимым v^*_k процессов линейных систем (2.6), (3.5) и (2.7), (3.6).

Обозначая $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{z}^*$ векторы соответственно переменных y_s, z_l, заключаем, что в процессе решения задачи 1 сначала решается задача о переводе системы (1.1) в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по части переменных – по переменным $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{z}^*$. Данная задача управления по части переменных сводится к соответствующей задаче управления по всем переменным для вспомогательной линейной системы (3.3), (3.4). В результате, как и в исследованиях устойчивости по части переменных, при управлении по $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{z}^*$ в число управляемых переменных "навязываются" [14] также переменные, образующие вектор $\dot{\mathbf{z}}^*$.

Наложим дополнительные условия, при которых осуществленный перевод системы (1.1) в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по части переменных фактически оказывается решением исходной задачи 1 управления по всем переменным. Для этого предположим, что $r - q \geqslant$ $\geqslant m + p - r$. Наряду с F введем также матрицу Якоби Q от функций Z_l по переменным, входящим в векторы $\mathbf{y}_*$, $\mathbf{z}_*$ (в них входят соответственно переменные y_i, z_l кроме y_s, z_l). Обозначим $\mathbf{x}^* = (\mathbf{y}^*,\ \mathbf{z}^*)$, $\mathbf{x}_* = (\mathbf{y}_*,\ \mathbf{z}_*)$, так что в итоге $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^*,\ \mathbf{x}_*)$.

Допустим, что в области

$$\Lambda_2\colon\ |\mathbf{x}| < H_2 = \mathrm{const} > 0 \quad (\Lambda_2 \subseteq \Lambda) \tag{4.1}$$

выполняется условие

$$\mathrm{rank}\,Q(x) = m + p - r \tag{4.2}$$

Кроме того, полагаем, что в Q линейно независимы при всех $\mathbf{x} \in \Lambda_2$ одни и те же строки.

Отметим, что введенные неравенства $p + q \geqslant r$ и $r - q \geqslant m + p - r$ в случае $r \leqslant m$ выполняются одновременно при

$$p + q = r = m \tag{4.3}$$

В этом случае $m + p - r = r - q$ и матрица Q является квадратной матрицей, так что дополнительное к условию (4.2) предположение о линейной независимости при всех $\mathbf{x} \in \Lambda_2$ одних и тех же строк этой матрицы является лишним.

Условие (4.3) имеет место, например, в случае, когда система (1.1) моделирует угловое движение твердого тела. Кроме того, в рамках предлагаемого подхода это условие можно ослабить.

При выполнении условия (4.2) равенства $\dot{z}_l = Z_l(\mathbf{x})$ в Λ_2 допускают решение (функция $\mathbf{\Psi}$: $R^{2r-q} \to R^{n-r}$ непрерывна в Λ_2)

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}^*,\ \dot{\mathbf{z}}^*),\quad \mathbf{\Psi}(\mathbf{0},\ \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

Равенства (4.4) связывают не вошедшие в $\mathbf{Y}^*_\mathrm{v}$, $\mathbf{Z}^*_\mathrm{v}$ компоненты из $\mathbf{X}_\mathrm{v}$ с компонентами из $\mathbf{Y}_\nu^*$, $\mathbf{Z}_\nu^*$. Фазовый вектор $\mathbf{x}$ системы (1.1) в Λ_2 можно представить в виде

$$\mathbf{x} = [\mathbf{y}^*, \mathbf{y}_*(\boldsymbol{\mu}), \mathbf{z}^*, \mathbf{z}_*(\boldsymbol{\mu})] \triangleq \mathbf{W}(\boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*)$$

Следовательно

$$\mathbf{X}_\nu = \{\mathbf{W} = \mathbf{W}[t; t_0, \mathbf{W}_0(\mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*, \dot{\mathbf{z}}_0^*(\mathbf{x}_0)), \mathbf{v}]\} \triangleq \{\mathbf{W}_\nu(t) = \mathbf{W}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{v})\}$$

Таким образом $\mathbf{X}_\nu$ можно оценить посредством оценок для множеств соответственно процессов $\mathbf{y}^*(t; t_0, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{v})$, $\mathbf{z}^*[t; t_0, \mathbf{z}_0^*, \dot{\mathbf{z}}_0^*(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}]$, $\dot{\mathbf{z}}^*[t; t_0, \mathbf{z}_0^*, \dot{\mathbf{z}}_0^*(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}]$ линейной (а не исходной нелинейной) системы (2.6), (2.7), (3.5), (3.6). В результате при выполнении (4.4) перевод системы (1.1) в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по переменным $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{z}^*$ действительно оказывается решением исходной задачи 1 управления по всем переменным (по $\mathbf{x}$).

5. Основные результаты. Подытожим проведенные рассуждения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия: 1) найдется постоянная q $(0 \leqslant q < r)$, такая, что $p + q = r = m$; 2) условие (2.3) в области (2.2); 3) условие (4.2) в области (4.1); 4) для "назначаемых" значений τ, β_k^* (и предопределяемых ими значений α_k^*) для любого $\mathbf{x}_0 \in S$ справедливы оценки

$$|\mathbf{W}_\nu(t)| < \min(H_1, H_2) \tag{5.1}$$

$$|\upsilon_k^*[\mathbf{W}_\nu(t), \mathbf{v}]| \leqslant \beta_k^*, \quad |f_k[\mathbf{W}_\nu(t), \mathbf{u}^*]| \leqslant \alpha_k$$

Тогда для всех $\mathbf{x}_0 \in S$ законы (2.4), (3.5), (3.6) решают задачу 1. При этом гарантируется точное приведение системы (1.1) посредством $\mathbf{u} \in K$ в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ за конечное время τ при любых $\mathbf{v} \in K_1$.

Доказательство. При выполнении в Λ_1 условия (2.3) линейная система (2.6), (2.7) получается из исходной нелинейной (1.1), (2.4) соответствующим нелинейным преобразованием переменных. При этом преобразовании состояние переменных y_s, z_l системы (1.1), (2.4) в Λ_1 будет полностью определяться состоянием этих же переменных линейной системы (2.6), (2.7). Поэтому при всех $\mathbf{x}_0 \in S_1 = \{\mathbf{x}_0\colon |\mathbf{x}_\nu(t)| < H_1\}$ законы управления (2.4), (3.5), (3.6) гарантируют точное приведение системы (1.1) за конечное время τ в положение

$$y_s = 0, \quad z_l = Z_l(\mathbf{x}) = 0 \tag{5.2}$$

При выполнении в Λ_1 условия (4.2) справедливо соотношение (4.4). Учитывая $\dot{z}_l = Z_l(\mathbf{x})$, в силу непрерывности вектор-функции $\boldsymbol{\Psi}$ и условия $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ модуль этой функции можно сделать сколь угодно малым за счет уменьшения модулей y_s, z_l, $Z_l(\mathbf{x})$. Поэтому при всех $\mathbf{x}_0 \in S_2 = \{\mathbf{x}_0\colon |\mathbf{x}_\nu(t)| < \min(H_1, H_2)\}$ управления (2.4) гарантируют точное приведение системы (1.1) не только в (5.2), но и в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Требования (1.2) приводят к тому, что допустимое множество начальных возмущений $\mathbf{x}_0$ должно также удовлетворять условию $\mathbf{x}_0 \in S_3 = \{\mathbf{x}_0\colon |f_k[\mathbf{x}_\nu(t), \mathbf{u}^*]| \leqslant \alpha_k\}$. Кроме того, для подтверждения "назначаемых" уровней β_k^* необходимо, чтобы $\mathbf{x}_0 \in S_4 = \{\mathbf{x}_0\colon |\upsilon_k^*[\mathbf{x}_\nu(t), \mathbf{v}]| \leqslant \beta_k^*\}$.

При выполнении условий *1–4* теоремы, заданная область S начальных возмущений будет принадлежать пересечению множеств $S_1, \ldots, S_4$. При учете введения векторной функции $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{z}}^*)$: $R^{2r-q} \to R^n$ это означает, что для всех $\mathbf{x}_0 \in S$ управления (2.4), (3.5), (3.6) гарантируют точное приведение системы (1.1) в положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ за конечное время τ при любых $\mathbf{v} \in K_1$. При этом управления (2.4), (3.5), (3.6) удовлетворяют заданным ограничениям (1.2). Теорема доказана.

Укажем возможности ослабления условий теоремы 1.

Пусть известны N первых интегралов $R_\varepsilon(\mathbf{x}) = \text{const}, R_\varepsilon(\mathbf{0}) = 0$ системы (1.1). Вместо Q, предполагая $r - q + N \geqslant m + p - r$, введем матрицу Якоби Q^* от функций Z_l, R_ε по переменным, входящим в $\mathbf{y}_*, \mathbf{z}_*$.

Следствие 1. Пусть: 1) найдется q $(0 \leqslant q < r)$: $r \leqslant p + q \leqslant 2r - m + N$; 2) $\operatorname{rank}Q^* = m + p - r$ при $\mathbf{x} \in \Lambda_2$. Если выполнены условия *2, 4* теоремы 1, то для всех $\mathbf{x}_0 \in S$ законы (2.4), (3.5), (3.6) решают задачу 1.

Другой путь ослабления условий теоремы 1 – в последовательном использовании нескольких конструкций управлений типа (2.4). При этом система (1.1) постепенно переводится (за суммарное конечное время) из $\mathbf{x}_0 \in S$ в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. Алгоритм решения задачи 1. Указанный подход к решению задачи 1 включает следующие этапы.

1°. Выбор конструкции (2.4) управлений u_k, где $\overset{*}{u}_k$ имеют вид (3.5), (3.6). На этом этапе уровни $\overset{*}{\alpha}_k, \overset{*}{\beta}_k$ и, следовательно, параметры $\overset{*}{\alpha}_k, \rho_{q+l}$ в (3.5), (3.6) не определены. В сравнении с предложенным ранее подходом [1–4] структура u_k упрощается.

2°. Предварительный выбор величины τ гарантированного времени управления и "назначение" уровней $\overset{*}{\beta}_k$. Это предопределяет $\overset{*}{\alpha}_k, \rho_k$ и конкретизируются параметры в (3.5), (3.6). При $\tau_k = \tau$ ("выравнивание" времени управления по каждой из переменных y_s, z_l системы (3.3), (3.4)) величины $\overset{*}{\alpha}_k$ определяются из выражений (см. [5])

$$\tau = [\alpha_s^*(1-\rho_s)]^{-1}|y_{s0}|, \tag{6.1}$$
$$\tau = [\alpha_{q+l}^*(1-\rho_{q+l})]^{-1}\{[\tfrac{1}{2}Z_{l0}^2 - \alpha_{q+l}^*(1-\rho_{q+l})z_{l0}\operatorname{sign}\psi_l]^{1/2} - Z_{l0}\operatorname{sign}\psi_l\}$$

3°. Оценка фазовых переменных системы (2.6), (2.7), (3.5), (3.6) на множестве L состояний этой системы при всех допустимых $|\overset{*}{v}_k| \leqslant \overset{*}{\beta}_k$. Проверка фактического выполнения неравенств $|\overset{*}{v}_k| \leqslant \overset{*}{\beta}_k$ на L. (При этом используется знание уровней β_i "исходных" помех v_i.) Тем самым на данном этапе предлагается принцип "назначения и последующего подтверждения" уровней $\overset{*}{\beta}_k$ "вспомогательных помех".

4°. Проверка выполнимости на L неравенств (5.1) для $\mathbf{x}_0 \in S$. Отметим, что для структуры (2.4) естественно ожидать близость $\max|u_k|$ на множестве L и подмножестве $L^* \subset L$ состояний линейной системы (2.6), (2.7), (3.5), (3.6) при различных комбинациях $\overset{*}{v}_k = \pm\rho_k\overset{*}{u}_k$ и $\overset{*}{v}_k \equiv 0$.

Если неравенства $|\overset{*}{v}_k| \leqslant \overset{*}{\beta}_k$ или (1.2) на множестве L не выполняются, или, наоборот, есть "резерв" в их выполнении, поиск подходящих τ и $\overset{*}{\beta}_k$ продолжается. В противном случае гарантированное время управления определяется сделанным выбором τ.

В результате получаем итерационный алгоритм решения задачи 1. Разрешимость этого алгоритма зависит от соотношения уровней "исходных" управлений u_k и помех v_i, а также возможных величин $\mathbf{x}_0$ и τ. Соответствующие условия разрешимости даны в разд. 5.

Отметим, что управления $\mathbf{u} \in K$, хотя они и строятся как функции текущего фазового вектора $\mathbf{x}$, сохраняют зависимость и от начального состояния $\mathbf{x}_0$. Указанное обстоятельство обусловлено входящими в выражения для $\mathbf{u}$ постоянными $\overset{*}{\alpha}_k, \rho_{q+l}$, зависящими от $\mathbf{x}_0$.

7. "Обратный" вариант алгоритма. 1°. Производится выбор τ и $\overset{*}{\beta}_k$. 2°. Вычисляются (на основании (6.1)) $\overset{*}{\alpha}_k$и проверяется соответствие значений $\overset{*}{v}_k$ на L ограничениям $|v_k^*| \leq \beta_k^*$. 3°. По формулам (2.4) оцениваются уровни управлений u_k. Это позволяет оценить возможности управлений u_k вида (2.4).

8. Приложение к игровой задаче переориентации асимметричного твердого тела. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера (записано одно уравнение, остальные два получаются из него циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$)

$$A_1\dot{y}_1 = (A_2 - A_3)y_2y_3 + u_1 + v_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.1}$$

описывающие угловое движение твердого тела относительно центра масс. Здесь y_i – проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции; u_k – проекции управляющего момента на те же оси; A_i – главные центральные моменты инерции. Моменты v_i характеризуют внешние силы и неконтролируемые возмущения. Для соответствия (8.1) первой группе уравнений (1.1) и использования ранее полученных соотношений сохраняются оба индекса i, k, хотя в данном случае $m = r = 3$.

Наряду с (8.1) рассмотрим определяющие ориентацию тела кинематические уравнения в переменных Родрига–Гамильтона [15]

$$2\dot{z}_1 = y_1z_4 + y_3z_2 - y_2z_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.2}$$

Переменная z_4 в (8.2) связана с z_j ($j = 1, 2, 3$) соотношением

$$z_4^2 + \sum z_j^2 = 1 \tag{8.3}$$

и при желании можно получить уравнение для $\dot{z}_4$.

Для системы (8.1)–(8.3) $m = p = r = 3$ и при $q = 0$ справедливо равенство (4.3). Далее $\mathbf{z} = (z_4, z_1, z_2, z_3)$; $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

8.1. *Постановка задачи переориентации.* Управления $\mathbf{u} \in K$ выбираем в классе K кусочно-непрерывных функций $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ с ограничениями (1.2). В данном случае неравенства (1.2) соответствуют 3 парам фиксированных по отношению к телу двигателей.

Помехи $\mathbf{v} \in K_1$ могут реализовываться в виде любых кусочно-непрерывных функций $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ в рамках ограничений (1.3).

Задача 2. Найти управления $\mathbf{u} \in K$, при любых $\mathbf{v} \in K_1$ переводящие тело за конечное время из произвольного начального состояния $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ в заданное $\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_1$. Оба состояния являются состояниями покоя $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$. Момент времени t_1 не фиксируется и ищется из требования быстродействия.

Без ущерба для общности считаем $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0)$. Собственно в этом случае ориентация регулируется относительно системы координат, заданной в начальный момент времени. Везде далее в соответствии с принятыми обозначениями $i, j, k = 1, 2, 3$.

Был предложен [2] игровой подход к проблеме переориентации асимметричного твердого тела. Эта задача актуальна, например, в динамике летательных (космических) аппаратов, робототехнике, а также биомеханике. Необходимость получения здесь гарантированных решений, характерных для теории игр, диктуется повышающимися требованиями практики. Однако строгое решение нелинейных игровых задач представляет значительные трудности даже при использовании современных ЭВМ. В этой связи также был предложен метод [2], позволяющий свести указанную нелинейную проблему к линейным игровым задачам. В его основе – выбор структуры управлений типа [16–18], с несколько иных позиций независимо предложенной в [19]. Получаемые управления робастны. Они обеспечивают точную переориентацию тела за конечное время, рассчитываемое из требования быстродействия.

Управления в [2] являются нелинейными функциями переменных, определяющих как угловую скорость, так и ориентацию тела. При допустимых реализациях помех (кроме отдельных случаев) они представляют 5 импульсов переменной интенсивности.

Следуя предлагаемой модификации подхода [1–4], ниже метод [2] модифицируется в направлении получения более простых и, следовательно, более удобных для реализации управлений. В частности, в них нет составляющих, компенсирующих гироскопические моменты тела $M_1 = (A_2 - A_3)y_2y_3$ (1 2 3). Решение, как и в [2], сводится к простейшим линейным игровым задачам. При этом управления упрощаются за счет усложнения структуры "вспомогательных помех" в образующихся линейных системах.

Оценки "вспомогательных помех" требуют расчета на множестве состояний линейных вспомогательных конфликтно-управляемых систем. Для проведения таких оценок в отличие от [2] требуется использование предлагаемого принципа "назначения и последующего подтверждения" уровней этих помех.

Несмотря на указанное отличие, в целом предлагаемая модификация метода [2] не предполагает усложнения расчетов. Кроме того, при определенном типе ограничений на управления расчет сильно упрощается.

В связи с рассматриваемой игровой задачей управления угловым движением твердого тела укажем также на работы [20–26] по управлению движением летательного аппарата в среде с неопределенными характеристиками.

8.2. *Вспомогательная конфликтно-управляемая система.* Продифференцируем обе части каждого из уравнений для $\dot z_j$ в (8.2) по времени и заменим $\dot y_i$ их выражениями из (8.1). После преобразований получаем

$$\ddot z_1 = f_1(\mathbf{z},\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{v}) \tag{8.4}$$

$$f_1 = \tfrac{1}{2}(z_4u_1A_1^{-1} + z_2u_3A_3^{-1} - z_3u_2A_2^{-1})$$

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}[z_4(v_1 + M_1)A_1^{-1} + z_2(v_3 + M_3)A_3^{-1} - z_3(v_2 + M_2)A_2^{-1}] - \tfrac{1}{4}z_1\sum y_i^2 \quad (1\ 2\ 3)$$

Трактуем f_j и φ_j соответственно как вспомогательные управления $\overset{*}{u}_j$ и помехи $\overset{*}{v}_j$. В результате выражения (8.4) можно рассматривать как конфликтно-управляемую систему типа (2.7)

$$\ddot z_j = u_j^* + v_j^* \tag{8.5}$$

При этом "исходные" управления u_k выражаются через $\overset{*}{u}_j$ посредством равенств типа (2.4)

$$u_1 = \frac{2A_1}{z_4}[(z_4^2 + z_1^2)u_1^* + (z_1z_2 + z_4z_3)u_2^* + (z_1z_3 - z_4z_2)u_3^*] \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.6}$$

Конструкцию (8.6) можно рассматривать как общую структурную форму управлений в задаче 2. Параметры этой формы – вспомогательные управления $\overset{*}{u}_k$, – определяются при решении соответствующих линейных игровых задач.

Структура (8.6) управлений содержит сомножитель z_4^{-1}, который формально приводит к "особенности". Однако последующий более подробный анализ показывает, что в случае $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0)$ в процессе управления справедливо соотношение $z_4 \in [z_{40}, 1]$. Поэтому указанной "особенности" просто не возникает. Если значение z_{40} мало или $z_1 \neq (1, 0, 0, 0)$, то достаточно перейти к управлениям, получающимся из (8.6) перестановкой индексов (или к комбинации таких управлений). Окончательный выбор "субоптимальных" управлений u_k проводится в итерационном режиме, характерном для многих современных методов прикладной теории управления. Подчеркнем, что в рамках предлагаемого алгоритма решения задачи 2 указанный итерационный поиск "субоптимальных" управлений достаточно прост. Он осуществим в реальном времени в процессе функционирования объекта управления.

8.3. *Вспомогательные игровые задачи управления*. Для системы (8.5) решим задачу о быстрейшем приведении в положение

$$z_j = \dot{z}_j = 0 \tag{8.7}$$

посредством вспомогательных управлений $\overset{*}{u}_j$ при любых допустимых $\overset{*}{v}_j$.

Эту задачу трактуем как дифференциальную игру на минимакс времени, типа рассмотренной в разд. 3. Ее решение, при ограничениях типа (3.2), сводится к задаче оптимального быстродействия (с теми же краевыми условиями) для системы типа (3.4).

Процедура выбора уровней $\overset{*}{\alpha}_j$, $\overset{*}{\beta}_j$, как и ранее, предполагает использование принципа "назначения и последующего подтверждения" этих уровней. Пока считаем их заданными, так что выполняются условия типа (3.2).

В силу $z_{j0} = \dot{z}_{j0} = 0$ (следствие $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$), величина

$$\tau = \max(\tau_j), \quad \tau_j = 2\{|z_{j0}|[\alpha_j^*(1-\rho_j)]^{-1}\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.8}$$

определяет минимальное гарантированное время τ достижения положения (8.7). Если $\overset{*}{v}_j \not\equiv -\rho_j \overset{*}{u}_j$, то время приведения в (8.7) не превышает τ.

Далее считаем, что индексы в (3.6) соответствуют индексам в (8.5), т.е. в (3.6) индекс $q + l$ заменяется на j. Анализ фазового портрета системы (8.5), (3.6) показывает, что условие $z_4 > \gamma = \text{const} > 0$, будучи выполнено при $t = t_0$, выполняется для любых допустимых $\overset{*}{v}_j$ и при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Это важно с точки зрения эффективности функционирования управлений u_k вида (8.6).

8.4. *Алгоритм решения задачи 2*. Сначала решается задача о переводе тела в требуемое положение по переменным z_j. Эта задача сводится к игровой задаче управления (по всем переменным) для линейной системы (8.5). Решая систему для $\dot{z}_j$ в (8.2) как алгебраическую относительно y_i, получаем равенства типа (4.4):

$$y_1 = \frac{2}{z_4}[(z_4^2 + z_1^2)\dot{z}_1 + (z_1 z_2 + z_4 z_3)\dot{z}_2 + (z_1 z_3 - z_4 z_2)\dot{z}_3] \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.9}$$

На основании (8.9) заключаем, что перевод тела в требуемое положение по переменным z_j фактически означает решение задачи 2.

Указанная схема решения включает следующие этапы.

1°. Выбор конструкции (8.6) управлений u_k с $\overset{*}{u}_j$ типа (3.6). На этом этапе $\overset{*}{\alpha}_j$, $\overset{*}{\beta}_j$ не определены. В сравнении с [2] u_k упрощаются. Они не содержат составляющих с y_i и, в частности, составляющих, компенсирующих гироскопические моменты тела.

2°. Предварительный выбор величины τ и "назначение" уровней $\overset{*}{\beta}_j$. Согласно (8.8), это предопределяет $\overset{*}{\alpha}_j$, ρ_j. При $\tau_j = \tau$ ("выравнивание" времени управления по каждой z_j) имеем

$$\alpha_j^* = \beta_j^* + 4|z_{j0}|\tau^{-2} \tag{8.10}$$

3°. Оценка z_j, $\dot{z}_j$ на множестве L состояний линейной системы (8.5), (3.6) при всех допустимых $|\overset{*}{v}_j| \leqslant \overset{*}{\beta}_j$. На данном этапе используется принцип "назначения и последующего подтверждения" уровней $\overset{*}{\beta}_j$. Лишь после того, как уровни β_j^* "назначены", для оценки $\overset{*}{v}_j$ на множестве L можно, в частности, использовать оценки типа [2]. Отметим, что использование сформулированного принципа в отличие от [2] представляется необходимым для реализации алгоритма.

t	z_j^+	z_j^-	$\dot z_j^-$
$[0,\ T_j^*]$	$\lvert z_{j0}\rvert - s_j^- t^2$	$\lvert z_{j0}\rvert - s_j^+ t^2$	$2s_j^+ t$
$(T_j^*, \tau/2]$	– " –	$s_j^-(t-T_j)^2$	$2s^+T_j^*$
$(\tau/2,\ T_j]$	$s_j^-(t-\tau)^2$	– " –	– " –
$(T_j,\ \tau]$	– " –	0	– " –

4°. Проверка выполнимости на множестве L исходных ограничений (1.2) на управления u_k. Для структуры (8.6) естественно ожидать близость $\max|u_k|$ на множестве L и подмножестве $L^* \subset L$ состояний линейной системы (8.5), (3.6) при различных комбинациях $\overset{*}{v}_j = \pm\rho_j \overset{*}{u}_j$ и $\overset{*}{v}_j \equiv 0$. Вычисление $\max|u_k|$ на L^* не вызывает затруднений.

В результате получаем итерационный алгоритм решения задачи 2.

8.5. *Построение оценок для* $\overset{*}{v}_j$. Используем неравенства $|y_1y_2| \leqslant 1/2\Sigma y_i^2$ (1 2 3) и проверяемое на основании (8.9) соотношение

$$\Sigma y_i^2 = 4\{[z_4^{-1}\Sigma(z_j\dot z_j)]^2 + \Sigma(\dot z_j)^2\} \tag{8.11}$$

Получаем следующие (завышенные) оценки:

$$|\overset{*}{v}_1| \leqslant (z_1^+ + z_4^+ r_1 + z_2^+ r_3 + z_3^+ r_2)G + \Delta_1$$

$$\Delta_1 \leqslant \tfrac{1}{2}(z_4^+\beta_1 A_1^{-1} + z_2^+\beta_3 A_3^{-1} + z_3^+\beta_2 A_2^{-1}), \quad r_1 = |A_2 - A_3| A_1^{-1} \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.12}$$

$$G = (z_4^-)^{-2}[\Sigma(z_j^+\dot z_j^-)]^2 + \Sigma(\dot z_j^-)^2, \quad z_4^{(-,+)} = [1 - \Sigma(z_j^{(+,-)})^2]^{1/2}$$

Выражения для $z_j^{(+,-)}$, $\dot z_j^-$ (завышенные для $\dot z_j^-$ при $t \geqslant t_0 + \overset{*}{T}_j$) сведены в таблицу, где

$$T_j = 2(1-\rho_j)^{-1}T_j^*, \quad T_j^* = [(2s_j^+)^{-1}|z_{j0}|(1-\rho_j)]^{1/2}, \quad s_j^{\pm} = \tfrac{1}{2}\alpha_j^*(1 \pm \rho_j)$$

Завышенные оценки (8.12) можно ослабить. Для этого отметим, что y_i вида (8.9) во многих случаях сохраняют знак ($y_i \leqslant 0$ при $z_{j0} > 0$) при всех допустимых $\overset{*}{v}_j$. Например, если $A_2 \geqslant A_3 \geqslant A_1$ (другие случаи перебираются аналогично), то первую группу неравенств в (8.12) можно заменить соотношениями

$$|\overset{*}{v}_1| \leqslant [\max(z_4^+ r_1 + z_3^+ r_2, z_1^+ + z_2^+ r_3)]G + \Delta_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{8.13}$$

8.6. *Построение оценок для* u_k. Расчет упрощается, если вместо (1.2) для оценки управлений (8.6) использовать неравенство

$$E = \Sigma(u_k^2 A_k^{-2}) < \alpha = \text{const} > 0 \tag{8.14}$$

Действительно, в силу (8.6) E определяется выражением (8.11), если в нем $\dot z_j$ заменить $\overset{*}{u}_j$. Поэтому неравенство (8.14) выполняется, если

$$E^* = [(z_{40})^{-1}\Sigma(|z_{j0}|\alpha_j^*)]^2 + \Sigma(\alpha_j^*)^2 < \tfrac{1}{4}\alpha \tag{8.15}$$

Кроме того, для интегральной оценки $E = E(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ можно использовать неравенство $E \leqslant 4\{[(z_4^-)^{-1}\Sigma(z_j^+\alpha_j^*)]^2 + \Sigma(\alpha_j^*)^2\}$.

8.7. *Условия разрешимости задачи 2*. Подытожим проведенные рассуждения.

Теорема 2. Если уровни α_k управлений u_k в системе (8.1)–(8.3) достаточно высоки, то при любых заданных уровнях β_i помех v_i решающие задачу 2 законы u_k можно построить в форме (8.6), где u_j^* имеют (после соответствующего уточнения индексов) вид (3.6). При этом обеспечивается точная переориентация тела за конечное время τ при любых $\mathbf{v} \in K_1$. Величина τ устанавливается итерационным путем по указанному в разд. 8.4 алгоритму.

Следствие 2. Пусть уровни β_i помех v_i в системе (8.2)–(8.3) таковы, что для "назначаемых" значений τ, β_j^* на основании неравенств типа (8.12) или (8.13) справедливы оценки $|v_j^*| \leqslant \beta_j^*$. Тогда при выполнении (8.15) управления (8.6) удовлетворяют (8.14) и обеспечивают точную переориентацию тела за конечное время τ.

8.8. *Возможное развитие задачи* 2. Задача 2 предполагает разворот тела, при котором его начальное и конечное состояния являются состояниями покоя. Наряду с этой задачей в идеальном случае отсутствия помех автором решена задача переориентации тела, в которой разворот не связывается с приведением тела в состояние покоя. В этом случае обеспечивается лишь "прохождение" телом требуемого углового положения в трехмерном инерциальном пространстве.

Дано сравнение указанной переориентации с традиционной, когда в начальном и конечном состоянии тело в покое. Показано, что при одинаковых ограничениях на управления "нетрадиционная" переориентация может осуществляться за существенно меньшее время. Кроме того, проще получаемые управления. Подобные возможности небезынтересны, например, при проектировании систем переориентации космических аппаратов для совершения кратковременных операций в момент прохождения требуемого углового положения: фотографирование, поражение цели, передача информации и другие.

Представляет теоретический и прикладной интерес решение такой задачи в игровой постановке. Для этой цели, например, можно использовать (при соответствующей модификации) подход, предложенный в [1–4] и развитый в данной статье.

9. Пример. Для оценки возможностей алгоритма рассмотрим переориентацию тела с $A_1 = 4 \cdot 10^4$, $A_2 = 8 \cdot 10^4$, $A_3 = 5 \cdot 10^4$ (кгм^2) из положения $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_0 = (0{,}701; 0{,}353; 0{,}434; 0{,}432)$ в $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Зададим $\tau = 70$ (с). Используя имеющие место в данном случае неравенства (8.13), при

$$\tfrac{1}{2}|z_4 v_1 A_1^{-1} + z_2 v_3 A_3^{-1} - z_3 v_2 A_2^{-1}| \leqslant 10^{-3}(\text{c}^{-2}) \quad (1\ 2\ 3) \tag{9.1}$$

можно, как показывают расчеты, положить $\beta_j^* = 245 \cdot 10^{-5}$ (с$^{-2}$). В данном случае $4E^* = 185 \cdot 10^{-6}$ (кгс$^{-4}$). Следовательно, управления (8.6) удовлетворяют неравенству (8.13) при $\alpha = 4E^*$. "Среднее" значение E равно $123 \cdot 10^{-6}$ (кгс$^{-4}$).

Используя усиливающие неравенства, из (9.1) имеем $\beta_1 = 39{,}9$; $\beta_2 = 92{,}9$; $\beta_3 = 57{,}9$ (Нм). Но допустимые значения v_i могут быть выше.

Проведем также сравнительный расчет по методике [2] (при точности оценок [2]). При тех же ограничениях (9.1) и том же τ уровни управлений u_k из [2] таковы, что неравенство (8.14) справедливо при $\alpha = 174 \cdot 10^{-6}$ (кгс$^{-4}$). Сравнение показывает эффективность предложенной модификации метода [2].

Автор благодарит И.М. Ананьевского, Л.Д. Акуленко, В.В. Румянцева и Ф.Л. Черноусько за обсуждение статьи, а также С.В. Абрамова за помощь при расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00506а), Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации (JJ5100).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 287 с.
2. *Воротников В.И.* Об управлении угловым движением твердого тела при помехах. Игровой подход // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 82–103.

3. *Воротников В.И.* О нелинейном синтезе ограниченных управлений при помехах // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 44–47.
4. *Воротников В.И.* К задаче нелинейного синтеза субоптимальных по быстродействию ограниченных управлений при помехах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 88–116.
5. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
6. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.
7. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 209–214.
8. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
9. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
10. *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 3–62.
11. *Ковалев А.М.* Управляемость динамических систем по части переменных // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 41–50.
12. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
14. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.
15. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
16. *Воротников В.И.* О стабилизации перманентных вращений тяжелого твердого тела, закрепленного в неподвижной точке // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 16–18.
17. *Воротников В.И.* О стабилизации ориентации гиростата на круговой орбите в ньютоновском поле сил // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 25–30.
18. *Воротников В.И.* Об управлении угловым движением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 38–43.
19. *Dwyer T.A.W.III.* Exact nonlinear control of large angle rotational maneuvers // IEEE Trans. Autom. Contr. 1984. V. AC-29. N 9. P. 769–774.
20. *Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю.* Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 306–310.
21. *Корнеев В.А., Меликян А.А., Титовский И.Н.* Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 132–139.
22. *Miele A., Wang T., Melvin W.W.* Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // Journ. Optim. Theory and Applications. 1986. V. 49. N 1. P. 1–45.
23. *Leitmann G., Pandey S.* Aircraft control for flight in an uncertain environment: takeoff in windshear // Journ. Optim. Theory and Applications. 1991. V. 70. N 1. P. 25–55.
24. *Bulirsch R., Montrone F., Persch H.J.* Abort landing in the presence of windshear as minimax optimal control problem. I. II // Journ. Optim. Theory and Applications. 1991. V. 70. N 1. P. 1–23; 1991. V. 70. N 2. P. 223–254.
25. *Zhao Y., Bryson A.E., Jr.* Approach Guidance in a Downburst // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1992. V. 15. N 4. P. 893–900.
26. *Боткин Н.Д., Зарх М.А., Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л.* Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 68–76.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
7.I.1995