УДК 531.36:62–50

© 1997 г. И.М. Ананьевский

УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОСРЕДСТВОМ ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассматривается механическая система, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Предполагается, что матрица кинетической энергии системы неизвестна и на систему действуют неконтролируемые ограниченные внешние силы (такая ситуация имеет место, например, если неизвестна масса груза, переносимого манипулятором). Строится закон управления, позволяющий переводить систему из произвольного начального состояния в заданное терминальное положение за конечное время с помощью ограниченной по модулю силы. В предлагаемом алгоритме используется линейная обратная связь с кусочно-постоянными коэффициентами: коэффициенты увеличиваются по мере приближения системы к терминальному состоянию. Алгоритм обоснован с помощью второго метода Ляпунова. Приведены результаты численного моделирования динамики двузвенника.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Обозначим через $q \in R^n$ вектор обобщенных координат системы, $p = \dot{q}$ – вектор обобщенных скоростей, S – внешние силы, действующие на систему, u – управляющие силы, $T(q, p) = \langle A(q)p, p\rangle/2$ – кинетическую энергию системы. Здесь $A(q) \in C^1$ – положительно определенная симметрическая матрица, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение.

Уравнения движения системы в форме Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial T}{\partial q} = S + u \tag{1.1}$$

На n-мерные векторы внешних сил S и управляющих сил u наложим ограничения

$$|S| \leqslant S_0, \ S_0 > 0 \tag{1.2}$$

$$|u| \leqslant U, \ U > 0 \tag{1.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $|\cdot|$ означает евклидову норму вектора или матрицы (под нормой матрицы понимаем норму соответствующего оператора в евклидовом пространстве).

Силы S будем считать неизвестными и трактовать как внешние возмущения. Наряду с ними на систему могут действовать и другие внешние силы, величины которых мы знаем. Однако мы предполагаем, что ресурсы управления достаточно велики, чтобы компенсировать эти известные силы, а величина U – это максимальная допустимая интенсивность управления, оставшегося после такой компенсации.

Будем считать, что матрица $A(q)$ неизвестна, ее собственные числа при любых q лежат на отрезке $[m^2, M^2]$, $0 < m \leqslant M$, а частные производные матрицы $A(q)$

равномерно ограничены по норме, т.е.

$$\forall z \in R^n \qquad m^2 z^2 \leqslant \langle A(q)z, z\rangle \leqslant M^2 z^2$$
$$|\partial A(q)/\partial q_i| \leqslant D, \qquad D > 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

Требуется построить управление, удовлетворяющее ограничениям (1.3) и переводящее систему из произвольного начального состояния (q_*, p_*) в заданное терминальное положение $(\bar{q}, 0)$ за конечное время.

Наглядным примером задачи в данной постановке является задача об управлении системой связанных твердых тел, массо-инерционные характеристики которых известны неточно. В этом случае неизвестна не только матрица инерции системы, но и действующие на тела силы тяжести. Кроме этих сил на систему могут действовать и другие внешние возмущения. Частным случаем такой задачи является задача о перемещении манипулятором груза неизвестной массы.

Наиболее близкие по постановке задачи о построении ограниченного управления механической системой в условиях неопределенности рассматривались в [1–4]. Так, было построено [1] управление на основе пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора, приводящее систему (1.1) с неизвестной матрицей $A(q)$ в заданное положение равновесия за бесконечное время в отсутствие внешних сил. Разработан [2, 3] основанный на декомпозиции подход, позволяющий с помощью ограниченной силы управлять подверженной неконтролируемым внешним возмущениям системой, матрица инерции которой известна. Закон управления, использующий линейную обратную связь с кусочно-постоянными коэффициентами, был предложен [4] для управления системой (1.1), в которой $S = 0$. Ниже этот подход развивается для случая ненулевых внешних возмущений.

Будем искать управление в форме линейной обратной связи по обобщенным координатам и скоростям $u = -ap - b(q - \bar{q})$, где a, b – кусочно-постоянные функции. Известно [1], что если a, b – произвольные положительные постоянные и $S = 0$, то положение равновесия $(\bar{q}, 0)$ замкнутой системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом, т.е. указанное управление переводит систему из произвольного начального состояния в терминальное положение $(\bar{q}, 0)$ за бесконечное время. Такой закон управления по обратной связи с постоянными коэффициентами имеет существенный недостаток: вдали от терминального положения управляющие силы не удовлетворяют ограничениям (1.3), а вблизи этого положения они малы. Ресурсы управления, определенные условиями (1.3), используются не в полной мере, что и приводит к бесконечному времени движения. Чтобы ускорить перевод системы, коэффициенты a, b будем изменять по мере приближения к терминальному положению.

Не нарушая общности, можно считать, что $\bar{q} = 0$ (в противном случае достаточно взять в качестве вектора обобщенных координат вектор $q - \bar{q}$). Переформулируем исходную задачу следующим образом. Пусть даны начальные условия $q(0) = q_*$, $p(0) = p_*$ и константы m, M, D, U. Требуется указать такой закон изменения коэффициентов обратной связи a, b в управлении

$$u = -ap - bq \tag{1.5}$$

чтобы при любых внешних возмущениях S, удовлетворяющих условиям (1.2), система (1.1), (1.5) приходила в положение $(0, 0)$ за конечное время и вдоль траектории выполнялись ограничения (1.3) на управление u.

2. Описание алгоритма управления. Введем в рассмотрение функцию

$$W(q, p) = M^2 p^2 + (M^4 p^4 + U^2 q^2 / 2)^{1/2} \tag{2.1}$$

Величина $W(q, p)$ имеет размерность энергии и характеризует удаленность точки (q, p) от терминального положения $(0, 0)$: множество уровня $W(q, p) = C$ функции W в фазовом пространстве представляет собой эллипсоид $4CM^2p^2 + U^2q^2 = 2C^2$, который стягивается к началу координат $(0, 0)$ при $C \to 0$. Положим

$$D_1 = \sqrt{n}D / 2, \quad W_0 = M^2U / (2\sqrt{2}D_1), \quad W_k = W_0 / 2^k \tag{2.2}$$

и определим совокупность эллипсоидов $W(q, p) = W_k$, где индекс k пробегает множество целых чисел. Пусть точка (q_*,p_*), отвечающая фазовому состоянию исходной системы в начальный момент времени $t = 0$, лежит на эллипсоиде $W(q, p) = W_{k_*}$ или внутри него, но вне эллипсоида $W(q, p) = W_{k_*+1}$, т.е. $W_{k_*+1} < W(q_*, p_*) \leqslant W_{k_*}$. Обозначим через t_{k_*+1} момент времени, когда траектория системы впервые попадет на эллипсоид $W(q, p) = W_{k_*+1}$. Ниже будет показано, что при выбранном алгоритме управления траектория системы стремится к началу координат, поэтому такой момент существует. Положим $q(t_{k_*+1}) = q_{k_*+1}$, $p(t_{k_*+1}) = p_{k_*+1}$. Обозначим через t_{k_*+2} момент времени, когда траектория системы впервые попадет на эллипсоид $W(q, p) = W_{k_*+2}$. Положим $q(t_{k_*+2}) = q_{k_*+2}$, $p(t_{k_*+2}) = p_{k_*+2}$ и т.д.

Последовательность $\{t_k\}$, $k = k_* + 1, k_* + 2, \ldots$, определяет моменты изменения коэффициентов обратной связи в управлении (1.5). Зададим значения этих коэффициентов на полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$ следующим образом:

$$b_k = U^2 / (4W_k), \quad a_k^2 = m^2 b_k \tag{2.3}$$

Начальные значения коэффициентов определим по формулам (2.3) при $k = k_*$. В фазовом пространстве q, p траектория движения рассматриваемой механической системы, таким образом, будет состоять из отрезков траекторий различных систем дифференциальных уравнений: k-й отрезок соединяет точки (q_k, p_k) и (q_{k+1}, p_{k+1}) и отвечает системе вида (1.1), (1.5), в которой коэффициенты усиления $a = a_k$, $b = b_k$ постоянны и определяются формулами (2.3). Все точки (q_k, p_k) лежат на соответствующих эллипсоидах $W(q, p) = W_k$, $k > k_*$.

Замечание. Траектория системы стремится к началу координат $(0, 0)$, однако функция W, вообще говоря, не является монотонно убывающей вдоль этой траектории. Поэтому наряду с точками (q_k, p_k) траектория может иметь и другие точки пересечения с эллипсоидами $W(q, p) = W_k$. Предположим, например, что после назначения новых коэффициентов в момент времени t_k траектория системы стала "удаляться" от терминального положения $(0, 0)$ и вновь пересекла эллипсоид с номером $k - 1$ при некотором $t' > t_k$. В момент t' индекс k и коэффициенты a_k, b_k не изменятся. Они примут новые значения лишь тогда, когда траектория достигнет эллипсоида $W(q, p) = W_{k+1}$: индекс k возрастет на 1, коэффициент a увеличится в $\sqrt{2}$ раз, а коэффициент b – в 2 раза. Таким образом, коэффициенты усиления a_k, b_k в управлении (1.5) зависят от известных параметров задачи m, M, U, D и от текущего значения индекса k. В каждый момент индекс k равен номеру минимального эллипсоида, на котором уже побывала траектория системы.

3. Обоснование алгоритма. Изучим поведение траектории k-й системы при некотором $k > k_*$. Интересующий нас участок этой траектории начинается в точке (q_k, p_k) в момент времени t_k и заканчивается, в соответствии с алгоритмом, в момент t_{k+1} на эллипсоиде $W(q, p) = W_{k+1}$. Так как существование точки пересечения траектории с $(k + 1)$-м эллипсоидом пока не доказано, будем считать $t_{k+1} = \infty$, если такого пересечения нет. Ниже будет показано, что $t_{k+1} < \infty$.

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V^k(q,p) = T(q,p) + b_k q^2/2 + \varepsilon_k \langle A(q)q, p\rangle \tag{3.1}$$

Число $\varepsilon_k > 0$ подлежит определению. Выражение для функции $V^k(q, p)$ содержит матрицу инерции $A(q)$, которая предполагается неизвестной. Оценим через известные величины значение этой функции в точке (q, p) фазового пространства. Предположим, что число ε_k удовлетворяет условию

$$\varepsilon_k^2 < m^2 b_k / (4M^4) \tag{3.2}$$

Оценим функцию $V^k(q, p)$ снизу при помощи соотношений (1.4) и неравенства Коши $\varepsilon_k M^2 |q||p| \leqslant \varepsilon_k^2 M^4 q^2/m^2 + m^2 p^2/4$ следующим образом:

$$V^k(q,p) \geqslant \frac{b_k q^2}{2} + \frac{m^2 p^2}{2} - \varepsilon_k M^2 |q||p| \geqslant \left(\frac{b_k}{2} - \frac{\varepsilon_k^2 M^4}{m^2}\right) q^2 + \left(\frac{m^2}{4}\right) p^2$$

откуда, учитывая (3.2), получаем неравенство

$$V_-^k(q,p) \leqslant V^k(q,p), \qquad V_-^k(q,p) = (b_k q^2 + m^2 p^2)/4 \tag{3.3}$$

Оценим теперь функцию $V^k(q, p)$ сверху, используя соотношения (1.4) и неравенство $\varepsilon_k |q||p| \leqslant \varepsilon_k^2 q^2/2 + p^2/2$, следующим образом:

$$V^k(q,p) \leqslant \frac{b_k q^2}{2} + \frac{M^2 p^2}{2} + \varepsilon_k M^2 |q||p| \leqslant \frac{(b_k + \varepsilon_k^2 M^2)}{2} q^2 + M^2 p^2$$

Так как $m^2/(4M^2) < 1$, то из (3.2) вытекает $\varepsilon_k^2 M^2 < b_k$, откуда получаем неравенство

$$V^k(q,p) \leqslant V_+^k(q,p), \qquad V_+^k(q,p) = b_k q^2 + M^2 p^2 \tag{3.4}$$

Установим соотношения, связывающие квадратичные формы $V_+^k(q,p)$ и функцию $W(q, p)$, множества уровня которой порождают определенное выше семейство эллипсоидов. Справедливо равенство

$$2V_+^k(q_k, p_k) = W_k \tag{3.5}$$

Для доказательства подставим выражение для коэффициента b_k из (2.3) в выражение (3.4) для функции V_+^k. Получим

$$V_+^k(q_k, p_k) = \frac{U^2 q_k^2 + 4W_k M^2 p_k^2}{4W_k} \tag{3.6}$$

По построению точка (q_k, p_k) лежит на эллипсоиде с номером k. Отсюда и из определения (2.1) функции W следует $W_k = W(q_k, p_k) = M^2 p_k^2 + (M^4 p_k^4 + U^2 q_k^2/2)^{1/2}$. С помощью данного равенства числитель в выражении (3.6) приводится к виду $2W_k^2$, откуда вытекает (3.5).

Равенство (3.5) означает, что при любом k эллипсоид с номером k является множеством уровня квадратичной формы $V_+^k(q, p)$, отвечающим значению $W_k/2$. Пусть в момент времени t, $t_k < t < t_{k+1}$, система находится в состоянии (q, p). В соответствии с алгоритмом точка (q, p) лежит вне $(k + 1)$-го эллипсоида, следовательно, $V_+^{k+1}(q,p) = b_{k+1} q^2 + M^2 p^2 \geqslant W_{k+1}/2$. В силу (2.2), (2.3) имеют место равенства

$W_{k+1} = W_k / 2$, $b_{k+1} = 2b_k$, поэтому $V_+^{k+1}(q,p) = 2b_k q^2 + M^2 p^2 \geqslant W_k / 4$. Оценим значение квадратичной формы $V_+^k(q,p)$ в момент t через ее значение $V_+^k(q_k, p_k)$ в момент t_k следующим образом:

$$V_+^k(q,p) \geqslant (2b_k q^2 + M^2 p^2)/2 \geqslant W_k / 8 = V_+^k(q_k, p_k)/4 \tag{3.7}$$

Обратимся теперь к вычислению производной $\dot{V}^k$. Продифференцируем функцию V^k в силу системы (1.1), (1.5). Получим

$$\dot{V}^k(q,p) = -\varepsilon_k b_k q^2 - \left\langle \left[a_k I - \varepsilon_k A(q) - \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] p, p \right\rangle - \varepsilon_k a_k \langle q, p \rangle + \langle S, \varepsilon_k q + p \rangle \tag{3.8}$$

где I – единичная матрица. Оценим отдельные слагаемые в выражении (3.8). В силу (1.4) имеют место неравенства

$$|\varepsilon_k A(q)| \leqslant \varepsilon_k M^2, \qquad \left| \frac{\varepsilon_k}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \right| \leqslant \varepsilon_k D_1 |q|, \qquad D_1 = \frac{\sqrt{n} D}{2} \tag{3.9}$$

Из неравенства Коши вытекает

$$|\varepsilon_k a_k \langle q, p \rangle| \leqslant \varepsilon_k^2 a_k q^2 + a_k p^2 / 4 \tag{3.10}$$

Используя условия (1.2), (3.2) и соотношение (3.7), оценим последнее слагаемое в выражении (3.8) следующим образом:

$$|\langle S, \varepsilon_k q + p \rangle| \leqslant S_0 |\varepsilon_k q + p| \leqslant S_0 [5\varepsilon_k^2 q^2 + 5p^2/4]^{1/2} \leqslant S_0 [5(b_k m^2 q^2 / M^4 + p^2)/4]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{5} S_0}{2M} \sqrt{V_+^k(q,p)} = \frac{\sqrt{5} S_0 V_+^k(q,p)}{2M \sqrt{V_+^k(q,p)}} \leqslant \frac{\sqrt{10} S_0}{M \sqrt{W_k}} (b_k q^2 + M^2 p^2) \tag{3.11}$$

Подставив неравенства (3.9)–(3.11) в выражение (3.8), приходим к оценке

$$\dot{V}^k(q,p) \leqslant -\varepsilon_k \left(b_k - \varepsilon_k a_k - \frac{\sqrt{10} S_0 b_k}{\varepsilon_k M \sqrt{W_k}} \right) q^2 -$$

$$-\left(\frac{3a_k}{4} - \varepsilon_k M^2 - \varepsilon_k D_1 |q| - \frac{\sqrt{10} M S_0}{\sqrt{W_k}} \right) p^2 \tag{3.12}$$

Зададим параметр ε_k формулой

$$\varepsilon_k = \min \left\{ \frac{mU}{8M^2 W_k^{1/2}}, \frac{mU^2}{16\sqrt{2} D_1 W_k^{3/2}} \right\} \tag{3.13}$$

Лемма 1. Пусть выполнено условие

$$S_0 \leqslant \min \left\{ \frac{mU}{16\sqrt{10} M}, \frac{\varepsilon_k M W_k^{1/2}}{2\sqrt{10}} \right\} \tag{3.14}$$

Тогда в тех точках траектории, что лежат в области $G = \{(q,p) : |q| < 2\sqrt{2} W_k / U\}$, производная функции V^k в силу системы (1.1), (1.5) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}^k(q,p) \leqslant -\varepsilon_k b_k q^2 / 4 - a_k p^2 / 8 \tag{3.15}$$

Доказательство. Неравенство (3.2) – следствие условия (3.13), поэтому выполнены соотношения (3.3), (3.4), (3.11) и (3.12). Используя равенства (2.3) и условие (3.13), получаем

$$\varepsilon_k a_k \leq \frac{m^2 U\sqrt{b_k}}{8M^2 W_k^{1/2}} = \frac{m^2 b_k}{4M^2} \leq \frac{b_k}{4}, \qquad \varepsilon_k M^2 \leq \frac{mU}{8W_k^{1/2}} = \frac{m\sqrt{b_k}}{4M^2} = \frac{a_k}{4} \tag{3.16}$$

Из соотношения (3.14) и формул (2.3) вытекает

$$\frac{\sqrt{10}S_0 b_k}{\varepsilon_k M\sqrt{W_k}} \leq \frac{b_k}{2}, \qquad \frac{\sqrt{10}MS_0}{\sqrt{W_k}} \leq \frac{mU}{16W_k^{1/2}} = \frac{a_k}{8} \tag{3.17}$$

Из равенства (3.13) и определения области G следует

$$\varepsilon_k D_1 |q| \frac{mU^2}{32\sqrt{2}W_k^{3/2}} |q| \leq \frac{mU}{16W_k^{1/2}} = \frac{a_k}{8} \tag{3.18}$$

Подставив оценки (3.16)–(3.18) в неравенство (3.12), получим (3.15).

Лемма 2. Пусть выполнены условия (3.14). Тогда участок траектории, отвечающий полуинтервалу времени $[t_k, t_{k+1})$, целиком лежит в области G.

Доказательство. Проверим, что начальная точка траектории (q_k, p_k) лежит в области G. По построению точка (q_k, p_k) принадлежит эллипсоиду с номером k, т.е. $M^2 p_k^2 + (M^4 p_k^4 + U^2 q_k^2 / 2)^{1/2} = W_k$. Следовательно, $q_k^2 \leq 2W_k^2 / U^2$, откуда вытекает $(q_k, p_k) \in G$.

Предположим, что утверждение леммы не выполнено, и пусть t' – момент времени, когда траектория впервые достигла границы области G, $t' > t_k$. В силу леммы 1 функция V^k в области G строго убывает вдоль решений системы (1.1), (1.5). Отсюда и из (3.4), (3.5) получаем

$$V^k(q(t'), p(t')) < V^k(q_k, p_k) \leq V_+^k(q_k, p_k) = W_k / 2$$

С другой стороны, на границе области G имеет место равенство $q^2(t') = 8W_k^2/U^2$. Отсюда и из соотношений (2.3), (3.3) вытекает

$$V^k(q(t'), p(t')) \geq V_-^k(q(t'), p(t')) \geq b_k q^2(t') / 4 = W_k / 2$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

В силу неравенства (3.3) функция Ляпунова (3.1) является положительно определенной, а из оценки (3.15) следует, что вне $(k + 1)$-го эллипсоида ее производная отрицательна и отделена от нуля. Из этого можно заключить, что существует такой момент времени $t_{k+1} < \infty$, когда траектория попадет на эллипсоид с номером $k + 1$. Убедимся, что на участке траектории, отвечающем полуинтервалу времени $[t_k, t_{k+1})$, управляющие силы подчиняются ограничениям (1.3). Оценим норму вектора u, используя формулу (2.3) для коэффициента a_k и неравенство (3.3), следующим образом:

$$|u|^2 = |b_k q + a_k p|^2 \leq 2(b_k^2 q^2 + a_k^2 p^2) = 2b_k(b_k q^2 + m^2 p^2) = 8b_k V_-^k(q, p) \leq 8b_k V^k(q, p)$$

Функция V^k вдоль рассматриваемого участка траектории не возрастает, следовательно, $V^k(q, p) \leq V^k(q_k, p_k)$. Учитывая соотношения (2.3), (3.4) и (3.5), получаем

$$|u|^2 \leq 8b_k V^k(q_k, p_k) \leq 8b_k V_+^k(q_k, p_k) = 4b_k W_k = U^2$$

4. Оценка времени движения. Из соотношений (2.3), (3.13) вытекает, что $a_k / 8 = mU / 16W_k^{1/2} \geq M^2 \varepsilon_k / 2$. Воспользовавшись этой оценкой, продолжим неравенство (3.15) следующим образом:

$$\dot{V}^k(q,p) \leqslant -\varepsilon_k b_k q^2/4 - M^2\varepsilon_k p^2/2 \leqslant -\varepsilon_k V_+^k(q,p)/4 \leqslant -\varepsilon_k V^k(q,p)/4$$

Проинтегрируем данное неравенство на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$. Получим

$$t_{k+1} - t_k \leqslant \frac{4}{\varepsilon_k}\ln\frac{V^k(q_k, p_k)}{V^k(q_{k+1}, p_{k+1})} \tag{4.1}$$

Оценим выражение, стоящее под знаком логарифма. В силу определений квадратичные формы V_+^k и V_-^k связаны соотношением $V_-^k(q,p) \geqslant m^2 V_+^k(q,p)/(4M^2)$, откуда, учитывая (3.5) и равенства $b_k = b_{k+1}/2$, $W_{k+1} = W_k/2$, получаем

$$V^k(q_{k+1}, p_{k+1}) \geqslant V_-^k(q_{k+1}, p_{k+1}) \geqslant \frac{m^2}{4M^2} V_+^k(q_{k+1}, p_{k+1}) =$$

$$= \frac{m^2}{4M^2}\left(\frac{b_{k+1}}{2}q_{k+1}^2 + M^2 p_{k+1}^2\right) \geqslant \frac{m^2}{8M^2} V_+^{k+1}(q_{k+1}, p_{k+1}) = \frac{m^2 W_k}{32M^2}$$

Следовательно, неравенство (4.1) может быть продолжено:

$$t_{k+1} - t_k \leqslant \frac{4}{\varepsilon_k}\ln\frac{32M^2 V_+^k(q_k, p_k)}{m^2 W_k} = \frac{8}{\varepsilon_k}\ln\frac{4M}{m} \tag{4.2}$$

причем число ε_k определено формулой (3.13). Видно, что выражения, стоящие под знаком min в (3.13) совпадают при $k = 0$. Если точка (q_k, p_k) лежит вне эллипсоида с номером 0, т.е. $k < 0$, то $mU/(8M^2 W_k^{1/2}) > mU^2/(16\sqrt{2}D_1 W_k^{3/2})$, а если точка (q_k, p_k) лежит внутри нулевого эллипсоида или на нем, т.е. $k \geqslant 0$, то имеет место обратное неравенство.

Предположим сначала, что $k < 0$. Подставим выражения для ε_k и W_k в (4.2). Получим

$$t_{k+1} - t_k \leqslant \tau 2^{-3k/2}, \qquad \tau = \frac{32\cdot 2^{1/4} M^3}{m\sqrt{D_1}U}\ln\frac{4M}{m} \tag{4.3}$$

Время движения системы от точки (q_k, p_k) до точки (q_0, p_0), т.е. от эллипсоида с номером k до эллипсоида с номером 0, не превышает величины

$$T_1 = \tau\sum_{i=k}^{-1} 2^{-3i/2} = \tau 2\sqrt{2}\,\frac{(2\sqrt{2})^{-k} - 1}{2\sqrt{2} - 1} \tag{4.4}$$

Предположим теперь, что $k \geqslant 0$. В этом случае неравенство (4.2) принимает вид

$$t_{k+1} - t_k \leqslant \tau 2^{-k/2} \tag{4.5}$$

а время движения от эллипсоида с номером 0 до терминального положения (0, 0) не превосходит суммы ряда

$$T_2 = \tau\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i/2} = \tau\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)} \tag{4.6}$$

До сих пор предполагалось, что $k > k_*$, и рассматривался отрезок траектории, концы которого лежат на двух соседних эллипсоидах из совокупности эллипсоидов, определенных выше. Неравенства (4.5), (4.6) дают оценку времени движения системы (1.1), (1.5) на таком отрезке. Пусть теперь $k = k_*$. В точке (q_*, p_*), отвечающей начальному состоянию системы, функция W удовлетворяет неравенству $W_{k_*+1} < W(q_*, p_*) \leqslant W_{k_*}$. Поэтому точка (q_*, p_*) не лежит, вообще говоря, на эллипсоиде с номером k_*. Тем не менее в начальный момент времени $t = 0$ определим коэффициенты a и b по формуле (2.3) при $k = k_*$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше, можно показать, что траектория системы (1.1), (1.5) попадет на эллипсоид с номером $k_* + 1$, а время движения до этого эллипсоида удовлетворяет неравенству (4.3), если $k_* < 0$, и неравенству (4.5), если $k_* \geqslant 0$. Полное время T_* движения системы из точки (q_*, p_*) до терминального положения $(0, 0)$ удовлетворяет неравенству $T_* \leqslant T_1 + T_2$, где величины T_1 и T_2 вычисляются по формулам (4.4), (4.6) при $k = k_*$.

5. Внешние возмущения. Обратимся к ограничениям, наложенным на внешние возмущения S. Видно, что при $k \geqslant 0$, т.е. внутри эллипсоида с номером 0, условие (3.14) равносильно неравенству

$$S_0 \leqslant \sigma, \qquad \sigma = \frac{mU}{16\sqrt{10}M} \tag{5.1}$$

а вне нулевого эллипсоида (3.14), т.е. при $k < 0$, эквивалентно неравенству

$$S_0 \leqslant \sigma 2^k \tag{5.2}$$

Вдоль траектории, начинающейся в точке (q_*, p_*), наименьшее значение индекса k равняется k_*. Поэтому если точка (q_*, p_*) лежит внутри нулевого эллипсоида или на нем самом, то $k_* \geqslant 0$ и неравенство (5.1) представляет собой достаточное условие приведения рассматриваемой системы из этой точки в начало координат за конечное время с помощью сформулированного выше закона управления. Если же (q_*, p_*) лежит вне нулевого эллипсоида и $k_* < 0$, то такое достаточное условие дает неравенство (5.2) при $k = k_*$.

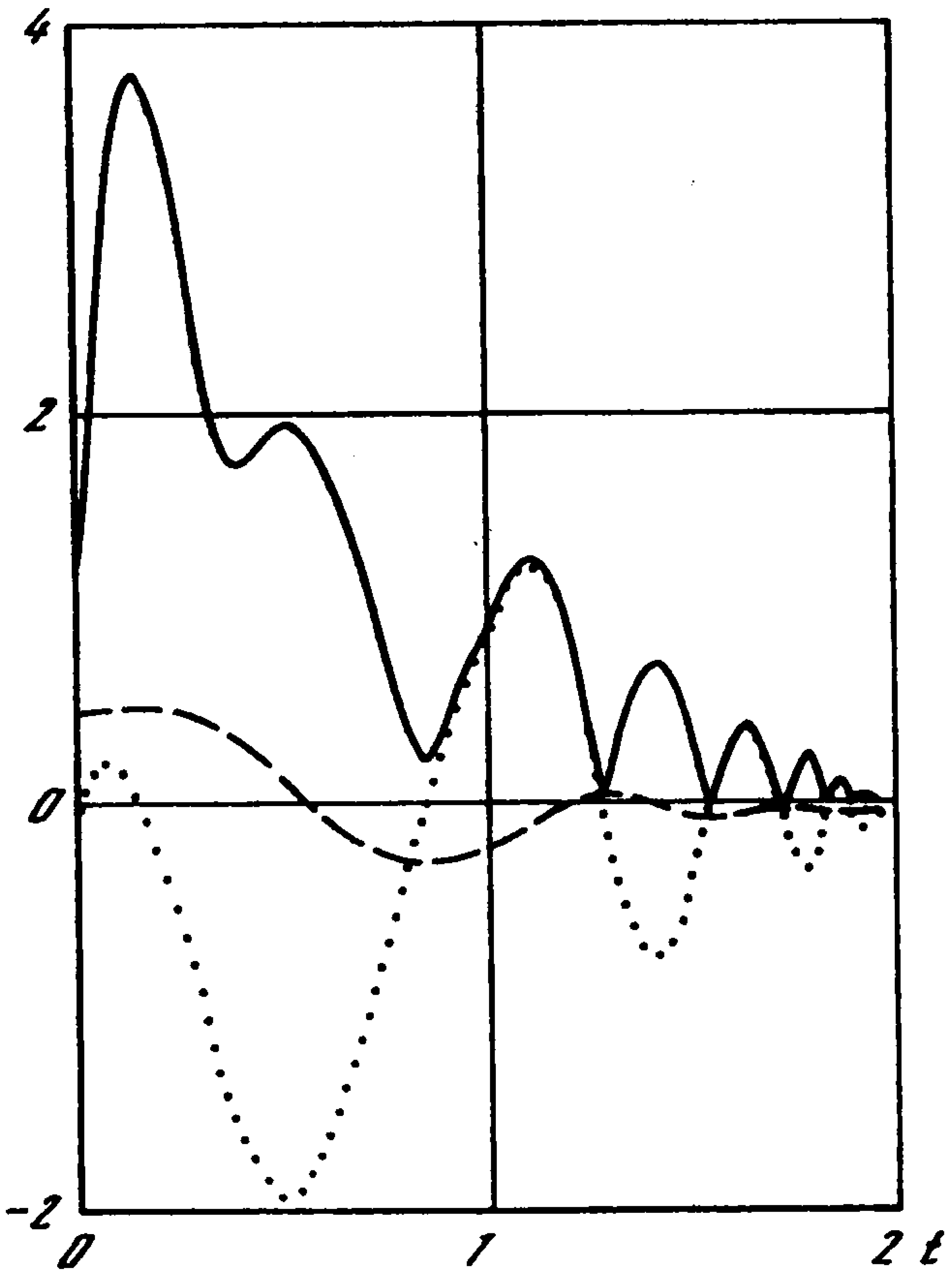
Предложенные достаточные условия приведения системы в начало координат таковы, что максимально допустимая интенсивность внешних возмущений S_0 зависит от начального состояния системы: чем дальше точка (q_*, p_*) находится от точки $(0, 0)$, тем меньше должна быть величина S_0. Однако эти условия можно ослабить, если модифицировать закон управления.

Покажем, что для перевода системы из (q_*, p_*) в начало координат достаточно выполнения лишь условия (5.1). Выше было отмечено, что в качестве терминального состояния может быть выбрана любая точка вида $(\bar{q}, 0)$ в фазовом пространстве системы. При этом совокупность эллипсоидов, на которых происходит изменение коэффициентов усиления, окажется сдвинутой на вектор $\bar{q}$, параметры же эллипсоидов останутся прежними. Предположим сначала, что в начальный момент времени скорость системы удовлетворяет неравенству

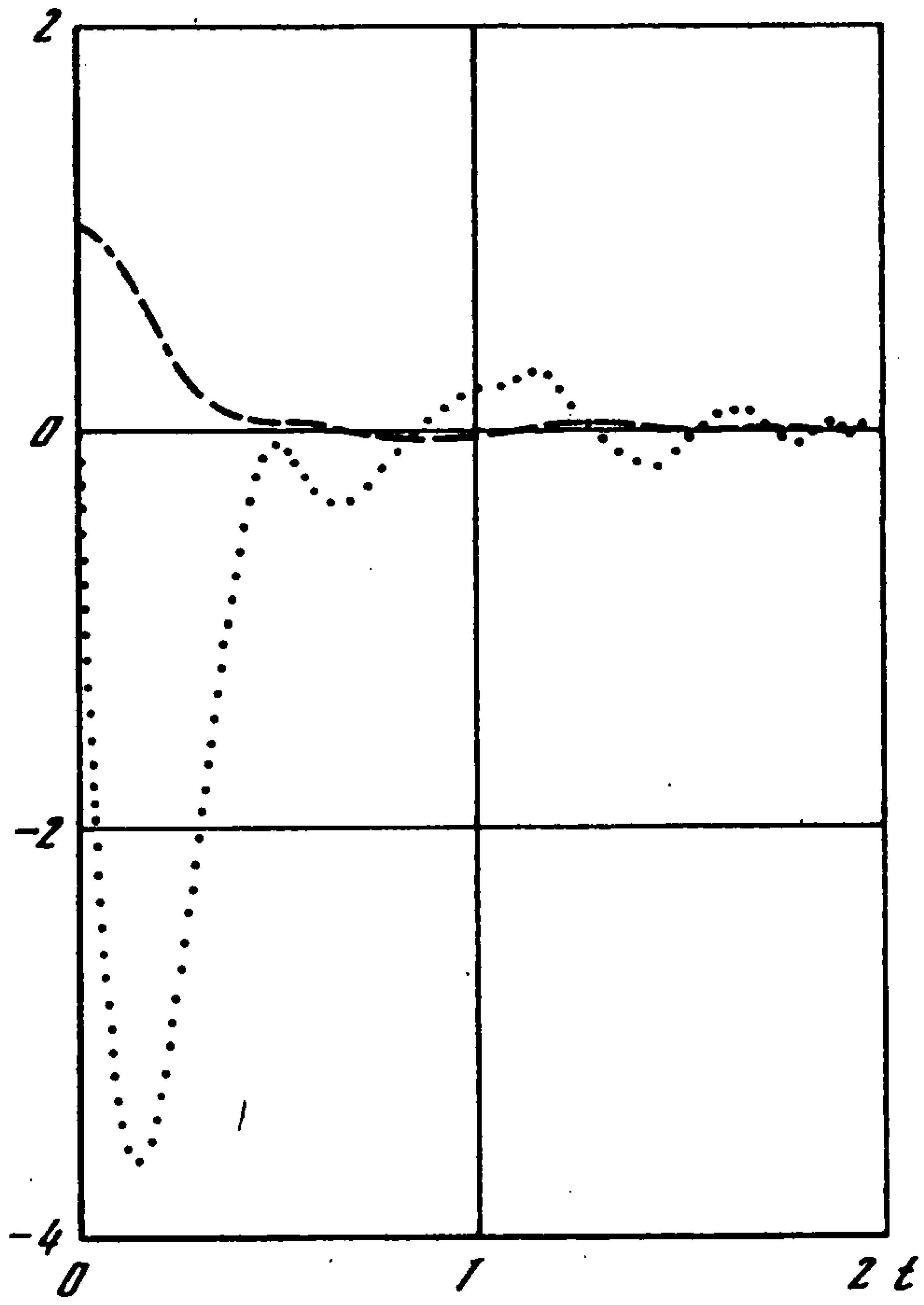
$$p_*^2 \leqslant \frac{U}{4\sqrt{2}D_1} \tag{5.3}$$

т.е. точка (q_*, p_*) лежит на эллипсоиде $W(q - q_*, p) = W_0$ или внутри него (это нулевой эллипсоид, центр которого помещен в точку $(q_*, 0)$). Применим изложенный алгоритм управления и переведем систему в состояние $(q_*, 0)$. Из сказанного выше вытекает, что для осуществления такого перевода достаточно выполнения условия (5.1). Выберем конечную последовательность точек $(\bar{q}_j, 0)$ таких, что $\bar{q}_0 = q_*$, $\bar{q}_J = 0$ и

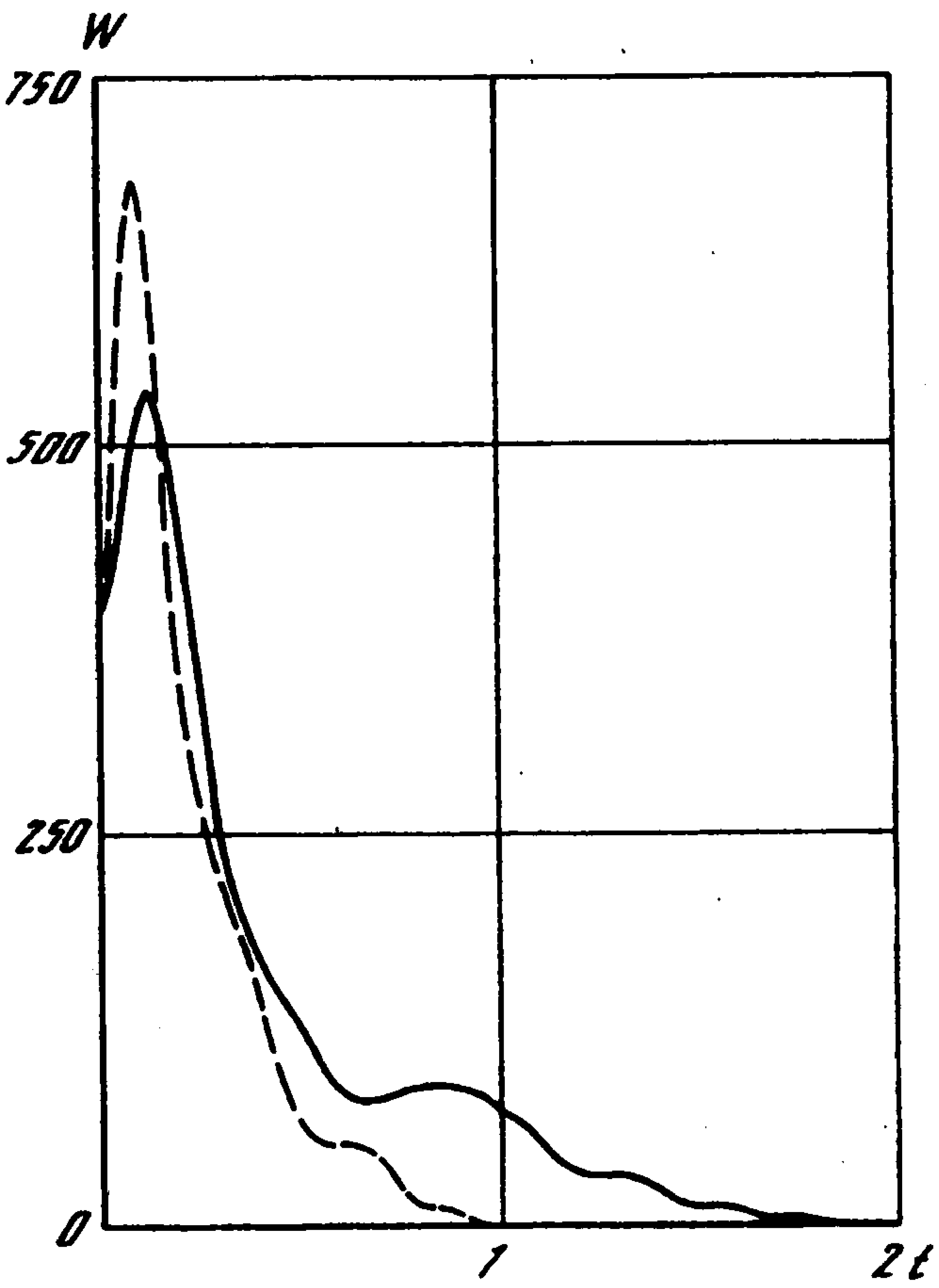
$$|\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1}| \leqslant \frac{M^2}{2D_1}, \qquad j = 1, \ldots, J \tag{5.4}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Перевод системы из точки (q_*, 0) в начало координат осуществим за J шагов, применяя каждый раз алгоритм управления заново. На j-м шаге начальному состоянию системы отвечает точка ($\bar{q}_{j-1}$, 0), а терминальному – точка ($\bar{q}_j$, 0). Неравенство (5.4) означает, что при любом j точка ($\bar{q}_{j-1}$, 0) лежит на нулевом эллипсоиде с центром в ($\bar{q}_j$, 0) или внутри него. Следовательно, для осуществления перевода из ($\bar{q}_{j-1}$, 0) в ($\bar{q}_j$, 0) достаточно, чтобы величина S_0 удовлетворяла условию (5.1).

Допустим теперь, что в начальный момент неравенство (5.3) не выполнено. К построенному алгоритму управления добавим еще один этап, который предшествует всем остальным. Цель этого предварительного этапа – снизить скорость движения системы до величины, удовлетворяющей неравенству (5.3). В области $H = \{(q, p) : p^2 > U/(4\sqrt{2}D_1)\}$ положим $u = -(U/|p|)p$. Из теоремы об изменении кинетической энергии системы, условия (5.1) и определения области H вытекает, что в H имеют место оценки

$$T(q,p) \geqslant m^2 p^2 > \frac{m^2 U}{4\sqrt{2}D_1}$$

$$\dot{T} = \langle u + S, p \rangle \leqslant -(U - S_0)|p| \leqslant -\left(1 - \frac{\sigma}{U}\right)\left(\frac{U^3}{2\sqrt{2}D_1}\right)^{1/2}$$

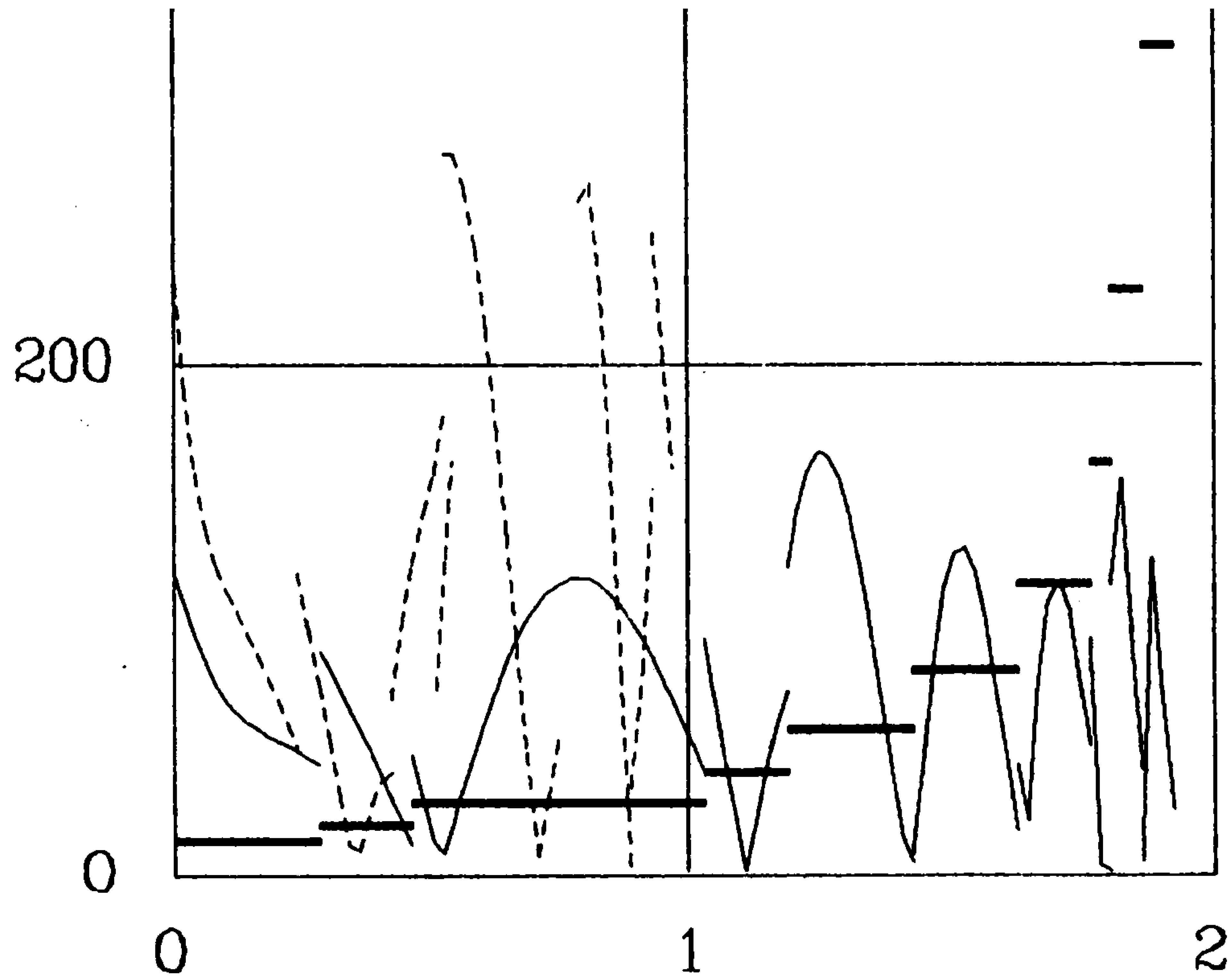
из которых следует, что система придет в область H за конечное время. В момент достижения траекторией границы области H заканчивается предварительный этап управления и начинается реализация описанного выше алгоритма пошагового перевода системы в терминальное состояние.

6. Результаты моделирования. Предложенный закон управления был применен при численном моделировании управляемых движений двузвенника на неподвижном основании. В качестве обобщенных координат системы были выбраны шарнирные углы звеньев в неподвижной системе координат. Выражение для кинетической энергии двузвенника имеет вид $T = R_1\dot{q}_1^2 + R_2\dot{q}_2^2 + 2R_3\cos(q_1 - q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2$. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $R_1 = 13{,}9$; $R_2 = 2{,}1$; $R_3 = 3$ кг · м^2. Собственные числа матрицы инерции заключены между константами $m^2 \doteq 1{,}9$ и $M^2 = 14{,}1$ кг · м^2, а частные производные матрицы ограничены по норме постоянной $D = 3$. Максимальная допустимая величина вектора управляющих моментов была выбрана равной $U = 500$ Н · м. Система переводилась из положения $q_1 = 0{,}5$; $q_2 = 1$ рад, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ рад/с в положение $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$.

Значение функции W в точке, отвечающей начальному состоянию системы, равно $W(0) = 395$, а величина, определяющая нулевой эллипсоид, равна $W_0 = 1171$. Так как $W_0/4 < W(0) < W_0/2$, то первое значение индекса k равно 1. Начальная точка траектории лежит внутри нулевого эллипсоида, поэтому величина S_0 должна удовлетворять лишь условию (5.1), которое в данном случае принимает вид $S_0 \leqslant 3{,}6$. При моделировании возмущающие моменты задавались постоянной вектор-функцией $S(t) = (0; 3{,}6)$.

На фиг. 1, 2 представлены графики зависимости фазовых координат системы от времени. Штриховая линия отвечает обобщенным координатам (рад), пунктирная – скоростям (рад/с), фиг. 1 описывает движение первого звена, фиг. 2 – второго. Сплошная линия на фиг. 1 демонстрирует зависимость от времени евклидова расстояния в фазовом пространстве q, $\dot{q}$ между текущим состоянием системы и терминальным положением. Интегрирование уравнений прекращалось, когда это расстояние становилось меньше 0,01. За время интегрирования уравнений коэффициенты обратной связи в управлении (1.5) изменились 15 раз. Сплошная линия на фиг. 3 иллюстрирует поведение функции W вдоль траектории. Видно, что ни расстояние между текущим и терминальным состояниями системы, ни функция W не зависят монотонно от времени.

На фиг. 4 показана зависимость абсолютной величины вектора управляющих моментов от времени (тонкая линия), а также величина коэффициента усиления a_k (ступенчатая функция). В соответствии с алгоритмом коэффициенты обратной связи a_k и b_k выбираются так, чтобы при любых допустимых реализациях неизвестных параметров – элементов матрицы инерции и компонент вектора возмущающих момен-



Фиг. 4

тов – вдоль получающейся траектории движения выполнялись ограничения на управление (1.3). Для конкретной механической системы область изменения этих параметров значительно сужается и выбор коэффициентов усиления может оказаться излишне грубым. Видно, что в рассматриваемом случае реализовавшиеся управляющие моменты существенно меньше максимальной разрешенной величины U. Поэтому было проведено моделирование движения двузвенника, управляемого по тому же закону, но с коэффициентами a_k и b_k, вдвое превышающими предписанные алгоритмом. На фиг. 3 штриховой линией изображен график зависимости функции W от времени, а на фиг. 4 также штриховой линией – абсолютная величина вектора управляющих моментов при таком способе управления. Время достижения системой терминального состояния сократилось почти вдвое, а управление по-прежнему удовлетворяет ограничению (1.3) со значительным запасом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01137) и Госкомитета РФ по высшему образованию (95-0-1.8-62).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* Об управлении некоторыми механическими системами при неполной информации. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 30–36.
2. *Черноусько Ф.Л.* Синтез управления нелинейной динамической системой. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.
3. *Ананьевский И.М., Добрынина И.С., Черноусько Ф.Л.* Метод декомпозиции в задаче управления механической системой. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 2. С. 3–14.
4. *Ананьевский И.М.* Метод функций Ляпунова в задаче управления лагранжевой динамической системой. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1779–1785.

Москва

Поступила в редакцию
8.IV.1996