УДК 531.36 : 62–50

© 1997 г. А.С. Андреев, С.П. Безгласный

О СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКОЙ КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача о стабилизации движения управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления. Она возникает из задачи об оптимальной стабилизации при ослаблении требования к ценовому функционалу: не требуется его минимизации, необходимо лишь, чтобы он не превосходил некоторой оценки. Это позволяет существенно расширить класс решаемых задач по отношению к задачам об оптимальной стабилизации. Поставленная задача решается на основе прямого метода Ляпунова с использованием функций Ляпунова, имеющих знакопостоянные производные. Часть результатов являются новыми и в случае задачи оптимальной стабилизации. Рассмотрены примеры: голономная механическая система с лагранжианом, зависящим от времени; управляемая линейная механическая система; задача об использовании гравитационного момента для стабилизации управляемого плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ – n-вектор линейного действительного пространства R^n с нормой $\|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_r) \in R^r$. Правая часть (1.1) $\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ $(\mathbf{X}(t, 0, 0) = 0)$ определена для некоторого класса $U = \{\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) : \mathbf{u}(t, 0) = 0\}$ управляющих воздействий $u(t, \mathbf{x}) \in C(G)$, $G = R^+ \times \Gamma$ $(R^+ = [0, +\infty[, \Gamma = \{\|\mathbf{x}\| < H, H = \text{const} > 0\})$, непрерывна и удовлетворяет в G условиям существования и единственности решений.

Пусть оценкой качества управления этой системы служит значение интеграла

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, \mathbf{x}[t], \mathbf{u}[t])dt \tag{1.2}$$

для переходного процесса при управлении $\mathbf{u}[t]$ на соответствующей траектории $\mathbf{x}[t]$ системы (1.1). Подынтегральная функция $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в (1.2) представляют собой в общем случае некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области G при $\mathbf{u} \in U$.

Поставим задачу о стабилизации с гарантированной оценкой качества управления.

Определение. Управляющее воздействие $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ называется стабилизирующим с гарантированной оценкой качества $P(t, \mathbf{x})$, если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1), при этом на каждом управляемом движении $\mathbf{x}^0(t)$, $\mathbf{x}^0(t_0) = \mathbf{x}_0$ справедливо неравенство

$$I = \int_{t_0}^{\infty} W(t, \mathbf{x}^0[t], \mathbf{u}^0[t])dt \leq P(t_0, \mathbf{x}_0) \tag{1.3}$$

2. Дополнительные предположения и построения. Пусть правая часть (1.1) $X^0(t,x) = X(t, x^0, u^0(t,x))$ для некоторого $u^0(t,x) \in U$ ограничена на каждом компакте и удовлетворяет условию Липшица равномерно по x относительно t, т.е. для любого компакта $K \subset \Gamma$ существуют две постоянные $\lambda_K = \lambda(K)$ и $\nu_K = \nu(K)$, такие, что справедливы неравенства

$$\|X^0(t,x)\| \leq \lambda_K, \quad \|X^0(t,x_2) - X^0(t,x_1)\| \leq \nu_K \|x_2 - x_1\| \tag{2.1}$$

Тогда функция $X^0(t,x)$ удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве F_Φ [1] и системе уравнений (1.1) $\dot{x} = X^0(t,x)$ ставится в соответствие [1] семейство предельных систем $\dot{x} = \Phi(t,x)$, для которых функции $\Phi(t,x)$ вычисляются по формуле

$$\Phi(t,x) = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty} \int_0^{\infty} X^0(t_n+\tau, x)d\tau\right)$$

Пусть подынтегральная функция в (1.2) $W^0(t,x) = W(t, x, u^0(t,x))$ для управления $u^0(t,x) \in U$ удовлетворяет аналогичным условиям

$$\|W^0(t,x)\| \leq \eta_K, \quad \|W^0(t,x_2) - W^0(t,x_1)\| \leq \mu_K \|x_2 - x_1\| \tag{2.2}$$

где $\eta_K = \eta(K)$ и $\mu_K = \mu(K)$ – постоянные, существующие для любого компакта $K \subset \Gamma$. Тогда функция $W^0(t,x)$ аналогичным образом удовлетворяет в области G условиям предкомпактности в некотором функциональном пространстве E_Ω, и ей ставится в соответствие семейство предельных функций $\Omega(t,x)$, определяемых по формуле

$$\Omega(t,x) = \frac{d}{dt}\left(\lim_{t_n\to\infty} \int_0^{t} W^0(t_n+\tau, x)d\tau\right)$$

Следуя [2], введем

$$B[V,t,x,u] = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T X(t,x,u) + W(t,x,u)$$

Через $\alpha(\|x\|)$ будем обозначать непрерывные монотонно возрастающие на отрезке $[0, H]$ функции, $\alpha(0) = 0$, т.е. функции типа Хана [3].

3. Основные результаты. Приведем решение поставленной задачи о стабилизации с гарантированной оценкой качества на основе прямого метода Ляпунова.

Теорема 1. Пусть для системы (1.1) с оценкой качества управления (1.2) существуют функция Ляпунова $V(t,x) \in C^1(G)$ и управление $u = u^0(t,x) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) функция $V(t,x)$ – определенно-положительная, допускает бесконечно-малый высший предел, $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|)$;

2) функция $W(t, x, u^0(t,x))$ – определенно-положительная, $W(t, x, u^0(t,x)) \geq \alpha_3(\|x\|)$;

3) функция $B[V, t, x, u^0(t,x)] \leq 0$.

Тогда $u^0(t,x)$ – стабилизирующее управление с гарантированной оценкой качества $P(t_0, x_0) = V(t_0, x_0)$. При этом невозмущенное движение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы основывается на теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости и аналогично доказательству теоремы Н.Н. Красовского об оптимальной стабилизации [2].

С помощью метода предельных функций и уравнений [4] можно ослабить требования к функции $V(t,x)$ и $W(t, x, u(t,x))$. А именно, функция $W(t, x, u(t,x))$ может быть знакопостоянной: $W(t, x, u(t,x)) \geq 0$, а также для функции $V(t,x)$ можно отказаться от условия, что эта функция допускает бесконечно малый высший предел.

Теорема 2. Пусть для системы (1.1) с оценкой качества управления (1.2) существуют функция Ляпунова $V(t, \mathbf{x}) \in C^1(G)$ и управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) \in U$, такие, что выполняются условия:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ – определенно-положительная, допускает бесконечно-малый высший предел, $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leqslant V(t, \mathbf{x}) \leqslant \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$;

2) функция $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})] \leqslant 0$;

3) правая часть системы (1.1) $\mathbf{X}^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}))$ и функция $W^0(t, \mathbf{x}) = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}))$ удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2);

4) для любой предельной к $(\mathbf{X}^0, W^0)$ пары (Φ, Ω) множество $\{\Omega(t, \mathbf{x}) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, \mathbf{x})$, кроме $\mathbf{x} = 0$.

Тогда $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ – стабилизирующее управление с гарантированной оценкой качества $P(t, \mathbf{x}) = V(t, \mathbf{x})$. При этом невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для производной функции $V(t, \mathbf{x})$ в силу системы (1.1) из условия 2 теоремы имеем

$$dV/dt \leqslant -W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})) \leqslant 0 \tag{3.1}$$

Учитывая, что функция $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqslant 0$ и выполнены условия 1, 3, 4, согласно теореме об асимптотической устойчивости [4] получаем равномерную асимптотическую устойчивость решения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1).

В силу асимптотической устойчивости решения $\mathbf{x} = 0$ и условия 1 теоремы имеем: $\lim V(T, \mathbf{x}(T)) = 0$ при $T \to +\infty$. Проинтегрировав неравенство (3.1) от t_0 до T и переходя к пределу при $T \to \infty$, получим

$$\int_{t_0}^{\infty} W(t, \mathbf{x}^0_{(t)} \mathbf{u}^0(t))dt \leqslant V(t_0, \mathbf{x}_0) = P(t_0, \mathbf{x}_0) \tag{3.2}$$

Теорема доказана.

Если в теореме 2 вместо второго условия потребовать выполнение тождественного равенства

$$B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})] \equiv 0 \tag{3.3}$$

и добавить условие

$$B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})] \leqslant B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x})] \tag{3.4}$$

для любого другого управления $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in U$, то имеем теорему об оптимальной стабилизации [5].

Теорема 3. Пусть для системы (1.1) с критерием качества (1.2), $\min I$ по $\mathbf{u} \in U$, существуют функция Ляпунова $V(t, \mathbf{x}) \in C^1(G)$ и управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) \in U$, такие, что выполняются условия 1, 3, 4 теоремы 2 и условия (3.3) и (3.4).

Тогда $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ – стабилизирующее управление, решающее задачу об оптимальной стабилизации для системы (1.1). При этом невозмущенное движение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво и выполняется соотношение

$$I^0 = \int_{t_0}^{\infty} W(t, \mathbf{x}^0_{(t)} \mathbf{u}^0(t))dt = \min \int_{t_0}^{\infty} W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}))dt = V(t_0, \mathbf{x}_0)$$

для любого $\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}) \in U$, решающего задачу стабилизации невозмущенного движения системы (1.1) $\mathbf{x} = 0$.

Теорема 4. Пусть для системы (1.1) с критерием качества (2.1) существуют функция Ляпунова $V(t, \mathbf{x}) \in C^1(G)$, $V(t, 0) = 0$, и управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) \in U$, такие, что выполняются условия 2,3 теоремы 2, а также условия:

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ – определенно-положительная, $V(t, \mathbf{x}) \geqslant \alpha_1(\|\mathbf{x}\|)$;

2) существуют числа H_0 и $H_1 (0 < H_0 < H_1)$, такие, что $\sup(V(t, \mathbf{x})$ при $\|\mathbf{x}\| < H_0) < \alpha_1(H_1)$;

3) существует хотя бы одна последовательность $t_n \to +\infty$, для которой предельная к $(\mathbf{X}^0, W^0)$ пара (Φ, Ω) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ будут таковы, что для любого $c = c_0 = \text{const} > 0$ множество $\{V_\infty^{-1}(t,c): c = c_0\} \cap \{\Omega(t,\mathbf{x}) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, \mathbf{x})$.

Тогда $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ – стабилизирующее управление с гарантированной оценкой качества $P(t, \mathbf{x}) = V(t, \mathbf{x})$. При этом невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Для производной функции $V(t, \mathbf{x})$ в силу системы (1.1) из условий 2 теоремы 2 имеем неравенство (3.1). Отсюда и из условий 1, 2 следует устойчивость решения $\mathbf{x} = 0$ системы (1.1). При этом ее решения из области $\Gamma_1 = \{\|\mathbf{x}\| < H_0\}$ будут ограничены, $\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant H_1$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ – решение системы (1.1) из области Γ_1. Согласно условию 1 теоремы и неравенству (3.1) функция $V(t) = V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \to c_0$ при $t \to +\infty$. Пусть $t_n \to +\infty$ – последовательность, определяющая пару (Φ, Ω) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, для которой $\mathbf{x}(t_n) \to \mathbf{x}^*$ при $t_n \to +\infty$. Составим последовательность функций $\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}(t_n + t, t_0, \mathbf{x}_0)$. Согласно [1] последовательность функций $\{\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}(t_n + t, t_0, \mathbf{x}_0)\}$, определяемая для значений $t_n \geqslant t_0$, будет сходиться к некоторому решению $\mathbf{x} = \varphi(t) :]-\infty, +\infty[\to \Gamma$ системы $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, \mathbf{x})$ равномерно на каждом отрезке $[-T, T]$. Переходя к пределу при $t_k \to +\infty$, как и в [4], получаем

$$\varphi(t) \in \{\Omega(t,\mathbf{x}) = 0\} \cap \{V_\infty^{-1}(t,c): c = c_0\}$$

Но по условию 3) теоремы это возможно, если только $c_0 = 0$. Итак, вдоль каждого решения системы (1.1) $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in \Gamma_1$ функция

$$V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{3.5}$$

Тем самым имеем асимптотическую устойчивость решения $\mathbf{x} = 0$, равномерную по $\mathbf{x}_0$ [6].

Интегрируя соотношение (3.1) в пределах от t_0 до $+\infty$ и учитывая (3.5), получим соотношение (3.2). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим часто встречающуюся в робототехнике и имеющую практический интерес управляемую линейную систему, описываемую уравнениями

$$\ddot{\mathbf{x}} + P(t)\mathbf{x} = S(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^n \tag{3.6}$$

где $P(t)$ – симметричная ограниченная положительно-определенная $(n \times n)$-матрица, $0 < P_0 \leqslant P(t) \leqslant P_1$, $S(t)$ – ограниченная $(n \times n)$-матрица управляющих воздействий $\mathbf{u}$.

Пусть качество переходного процесса оценивается функционалом (1.2), для которого

$$W(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{x}}^T F(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T Q(t)\mathbf{u} \tag{3.7}$$

где $Q(t)$ – симметричная ограниченная положительно-определенная $(n \times n)$-матрица, а ограниченная неотрицательная матрица $F(t)$ удовлетворяет неравенству

$$F \leqslant \frac{1}{4}P^{-1}SQ^{-1}S^T P^{-1} + \frac{1}{2}P^{-1}\dot{P}P^{-1}. \tag{3.8}$$

С помощью функции Ляпунова

$$V(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^T P^{-1}(t)\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T E\mathbf{x}$$

(где E – единичная матрица, а $P^{-1}(t)$ – обратная к $P(t)$ матрица) на основании теоремы 2 находим, что управляющие воздействия

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) S^T(t) P^{-1}(t)\dot{\mathbf{x}}$$

при выполнении условия

$$P^{-1} S Q^{-1} S^T P^{-1} + P^{-1}\dot{P}P^{-1} \geqslant \gamma_0 E \quad (\gamma_0 = \text{const} > 0)$$

решают для системы (3.6) задачу стабилизации нулевого состояния $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} = 0$ с гарантированной оценкой $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ функционала (1.2), определяемого соотношениями (3.7) и (3.8).

Если же матрицу F определить равенством $4F = P^{-1} S Q^{-1} S^T P^{-1} + 2P^{-1}\dot{P}P^{-1}$, то эти воздействия решают соответствующую задачу об оптимальной стабилизации.

Пример 2. Рассмотрим задачу об использовании гравитационного момента для стабилизации управляемого плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите. Уравнение такого движения приводится к виду [7]

$$\alpha'' - l(\nu)\alpha' + m(\nu)\sin\alpha = 2l(\nu) + U \quad (\alpha = 2\theta)$$
$$l(\nu) = \frac{2e\sin\nu}{1+e\cos\nu}, \quad m(\nu) = \frac{n^2}{1+e\cos\nu}, \quad n^2 = 3\frac{A-C}{B} \tag{3.9}$$

где θ – угол отклонения оси Oz от Oz_0; ν – истинная аномалия центра масс спутника – точки O на эллиптической орбите с эксцентриситетом e, $0 < e < 1$; штрих означает производную по ν; U – управляющий момент; $Ox_0y_0z_0$ – орбитальная система координат; Ox, Oy и Oz – главные центральные оси инерции спутника с моментами A, B и C; при движении ось Oy спутника постоянно совпадает с нормалью к плоскости орбиты – осью Oy_0.

Пусть управление U обеспечивает заданное вращательное движение $\alpha = \alpha_0(\nu)$, $|\alpha_0(\nu)| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$. Определим дополнительное управляющее воздействие $u = U - U_0$ так, чтобы это движение было асимптотически устойчиво и выполнялась гарантированная оценка качества переходного процесса

$$I = \int_{\nu_0}^{+\infty} (k_1 x'^2 + u^2)d\nu, \quad k_1(\nu) \geqslant 0, \quad x = \alpha - \alpha_0(\nu) \tag{3.10}$$

Полагая $u = -k(\nu)x'$, из (3.9) имеем уравнение движения в возмущениях

$$x'' + (k(\nu) - l(\nu))x' + g(\nu, x)\sin\frac{x}{2} = 0, \quad g(\nu, x) = 2m(\nu)\cos\frac{\alpha_0(\nu) + x}{2} \tag{3.11}$$

Решение ищем с помощью функции Ляпунова

$$V(\nu, x) = \frac{1}{2}\frac{1}{g(\nu, x)}x'^2 + 2(1 - \cos\tfrac{x}{2})$$

которая в силу $g(\nu, x) \geqslant g_0 > 0$ определенно-положительна и допускает бесконечно малый высший предел. На основании теоремы 2 имеем, что управление $u^0 = -k(\nu)x'$ обеспечивает стабилизацию плоского вращательного движения $\alpha = \alpha_0(\nu)$ спутника вокруг центра масс на эллиптической орбите с гарантированной оценкой качества управления $V(\nu_0, x_0)$ по функционалу (3.10), если выполняются условия

$$(4k(\nu) - 3l(\nu))\cos\frac{a_0(\nu)}{2} \geqslant \gamma_0 + \alpha_0'(\nu)\sin\frac{\alpha_0(\nu)}{2}$$

$$k_1 + (k(\nu) - r(\nu))^2 \leq r(\nu)\left(r(\nu) - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha_0(\nu)}{2}\alpha_0'(\nu) - \frac{3}{2}l(\nu)\right) - \varepsilon_0, \quad r(\nu) = \frac{1}{2g(\nu, 0)}$$

где γ_0, ε_0 – положительные постоянные.

4. Об определении вида подынтегральной функции в критерии качества и управляющих воздействий в задаче с действием дополнительных управляющих сил. Рассматривается система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n; \quad \mathbf{X}(t, 0) = 0 \tag{4.1}$$

где функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ непрерывна и удовлетворяет в G условиям существования и единственности решений.

Пусть существует функция Ляпунова $V(t, \mathbf{x}) \in C^1(G)$, $V(t, 0) = 0$, определяющая устойчивость решения $\mathbf{x} = 0$ системы (4.1) с производной в силу уравнений (4.1) $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$.

Допустим, что к системе (4.1) приложены дополнительные управляющие силы вида $\mathbf{X}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = M(t, \mathbf{x})\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in R^r$, $M(t, \mathbf{x})$ – $(n \times r)$-матрица, и для полученной управляемой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + M(t, \mathbf{x})\mathbf{u} \tag{4.2}$$

оценкой качества управления является оценка интеграла (1.2).

Поставим задачу: построить вид подынтегральной функции $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, при котором указанная для системы (4.1) функция Ляпунова $V(t, \mathbf{x})$ может определять стабилизацию для (4.2) с гарантированной оценкой качества $P(t, \mathbf{x}) \equiv V(t, \mathbf{x})$ управляемой системы (4.2).

Эта задача подобна задаче об оптимальной стабилизации, поставленной и решенной В.В. Румянцевым [8], как развитие проблем аналитического конструирования регуляторов [9] и выбора оптимизирующего функционала [10].

Следуя [8], зададим подынтегральную функцию в (1.2) в виде

$$W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u}^T R(t, \mathbf{x})\mathbf{u} \tag{4.3}$$

где $R(t, \mathbf{x})$ – симметричная положительно-определенная $(r \times r)$-матрица, а $F(t, \mathbf{x})$ – неотрицательная функция, подлежащая определению.

Подставив значения $V(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в выражение $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})]$, определим управляющее воздействие

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} R^{-1}(t, \mathbf{x}) M^T(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \right) \tag{4.4}$$

доставляющее минимум функции $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}]$ по $\mathbf{u}$ (здесь $R^{-1}(t,\mathbf{x})$ – матрица, обратная к $R(t,\mathbf{x})$).

Из условия $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})] \leq 0$ найдем соотношения, которым должна удовлетворять функция $F(t, \mathbf{x})$:

$$0 \leq F \leq -\dot{V} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T M R^{-1} M^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) \tag{4.5}$$

Это соотношение дает возможность более широкого выбора функционала (1.2) с $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ в форме (4.3) по сравнению с задачей оптимальной стабилизации [7], когда функция $F(t, \mathbf{x})$ определяется строгим равенством

$$F = -\dot{V} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T M R^{-1} M^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) \tag{4.6}$$

Производная функции $V(t, \mathbf{x})$ в силу уравнений (4.2) со значением $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ из (4.4) будет вычисляться по формуле

$$\frac{dV}{dt} = -W^0 = \dot{V} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T M R^{-1} M^T \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Применив теорему 2, получим следующий результат.

Теорема 5. Пусть для системы (4.1) известна допускающая бесконечно малый высший предел, положительно-определенная функция $V(t, \mathbf{x})$ с производной $\dot{V}(t,\mathbf{x}) \leqslant 0$, а также выполнены следующие условия:

1) правая часть системы (4.2) $\mathbf{X}^0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) + M(t, \mathbf{x})\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})$ и функция $W^0(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2);

2) для любой предельной к $(\mathbf{X}(t, \mathbf{x}), W^0(t, \mathbf{x}))$ пары (Φ, Ω) множество $\{\Omega(t, \mathbf{x}) = 0\}$ не содержит решений предельной системы $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, \mathbf{x})$, кроме $\mathbf{x} = 0$.

Тогда управляющее воздействие (4.4) является стабилизирующим с гарантированной оценкой качества $V(t_0, \mathbf{x}_0)$ функционала (1.2) с (4.3) и (4.5).

Следствие. Если в теореме 5 потребовать выполнение условия $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x})] = 0$ и неравенства $B[V, t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})] \geqslant 0$ для любого другого управления $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in U$, то при сохранении остальных условий имеем решение задачи об оптимальной стабилизации системы (4.2) управляющими воздействиями (4.4) с минимумом функционала (1.2), (4.3), (4.6).

Пример. Рассмотрим голономную механическую систему, описываемую уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{4.7}$$

для которой функция Лагранжа имеет структуру $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_2 + L_1 + L_0$, где $L_2 = \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}/2$ – квадратичная форма скоростей $\dot{\mathbf{q}}$; $L_1 = B^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ – линейная форма скоростей $\dot{\mathbf{q}}$; а $L_0 = L_0(t, \mathbf{q})(L_0(t, 0) \equiv 0)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\partial L_0/\partial \mathbf{q} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{q} = 0, \quad \partial L_0/\partial t \geqslant 0, \quad -L_0(t, \mathbf{q}) \geqslant \alpha(\|\mathbf{q}\|)$$

Такая система имеет положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$, которое в силу $(L_2 - L_0)^{\cdot} = -\partial L_0/\partial t \leqslant 0$ будет устойчивым.

Поставим задачу определения сил вида $Q = M(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{u}$ ($M(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – ограниченная $(n \times r)$-матрица), при которых для управляемой системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = M(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{u} \tag{4.8}$$

1) положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$ будет асимптотически устойчиво;

2) имеется гарантированная оценка качества управления (1.2) с подынтегральной функцией

$$W(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{u}^T R(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{u} \tag{4.9}$$

где $R(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – симметричная ограниченная положительно-определенная $(r \times r)$-матрица, а неотрицательная функция $F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ подлежит определению.

Используя в качестве функции Ляпунова $V = L_2 - L_0$, согласно результатам разд. 4 имеем управление, решающее задачу:

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{2}R^{-1}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})M^T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \tag{4.10}$$

и условия для выбора функции $F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$0 \leqslant F(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leqslant \frac{1}{4}\dot{\mathbf{q}}^T N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}, \qquad N = MR^{-1}M^T \tag{4.11}$$

При этом для производной по времени от функции V с учетом (4.10) имеем оценку

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \leqslant 0$$

Предельная к (4.8) система при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ имеет вид [4]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial L_{0^*}}{\partial \mathbf{q}} + N^*\dot{\mathbf{q}} + G\dot{\mathbf{q}}, \quad G^T = -G \tag{4.12}$$

где $\overset{*}{L_0}$ и N^* – функция и матрица, предельная к L_0 и N.

Пусть множество $\{\dot{\mathbf{q}}^T N^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}$ не содержит решений системы (4.12), кроме $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = 0$. Тогда согласно теореме 5 управляющее воздействие (4.10) решает задачу стабилизации для системы (4.8) с гарантированной оценкой качества управления $P(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - L(t, \mathbf{q})$ по функционалу (1.2), подынтегральная функция которого может выбираться согласно соотношениям (4.9) и (4.11).

Авторы благодарят В.В. Румянцева за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01067).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J. Different. Equat. 1977. V. 23. N. 2. P. 216–223.
2. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
4. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
5. *Андреев А.С.* Об оптимальной стабилизации движений управляемых механических систем // Тез. докл. 5-й Всесоюз. конф. по управлению в механических системах. Казань: КАИ, 1985. С. 60.
6. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
7. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
8. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
9. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
10. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.

Ульяновск

Поступила в редакцию
12.X.1995