УДК 531.36:62-50

© 1997 г. А.Т. Заремба

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Представлена схема управления, обеспечивающая асимптотическую устойчивость заданного программного движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Тело управляется при помощи пар реактивных сил или управляющее воздействие создается вращающимися маховиками. Инерционные параметры и кинетический момент системы оцениваются в процессе движения. Синтез управления использует линейное представление уравнений динамики относительно вектора параметров и свойство пассивности динамического объекта. Представлен закон управления и подстройки параметров, который гарантирует асимптотическую устойчивость движения и для программных движений, удовлетворяющих условию неисчезающего возбуждения, обеспечивает сходимость вектора настраиваемых параметров к его истинному значению. Определена область фазового пространства, для которой достигается экспоненциальная стабилизация движения.

Аналогичная задача рассматривалась ранее [1]; полученный при этом закон управления вращательным движением беспилотного летательного аппарата требует вычисления сложных нелинейных выражений, включающих якобиан кинематических соотношений и его производную, которые плохо обусловлены при поворотах, близких к $\pm\pi$.

В отличие от этих результатов, представленные ниже алгоритмы управления не имеют особенностей во всем фазовом пространстве.

Было построено [2] динамическое управление твердым телом при известных инерционных параметрах. На основе рекуррентных алгоритмов формирования уравнений динамики синтезировано управление, обеспечивающее стабилизацию программного движения многозвенной цепи твердых тел [3].

1. Динамическая модель системы. Рассматривается твердое тело P_0, имеющее неподвижную точку O, совпадающую с его центром масс. С телом P_0 связаны оси системы координат $Oxyz$ и тройка взаимно ортогональных ортов c_1, c_2, c_3 занимает неизменное положение в системе $Oxyz$. Программное движение определяет тройка взаимно ортогональных ортов s_1, s_2, s_3, которая вращается как твердое тело с угловой скоростью ω_d по отношению к абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Вращательное движение тела описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$M\dot{\omega} + \omega \times M\omega = u \tag{1.1}$$

Здесь ω – угловая скорость управляемого тела, $u \in R^3$ – вектор управляющих моментов, создаваемых парами реактивных сил.

Если тело P_0 управляется при помощи вращающихся симметричных маховиков $P_1, \dots, P_m$, то в отсутствие внешних воздействий уравнения динамики системы тел приводятся к виду [2, 4]

$$M\dot{\omega} + \omega \times R^t L_0 = u, \quad L_0 = \text{const}, \quad M = \theta_0 - \sum_{i=1}^{m} C_i b_i b_i^t, \quad u = \sum_{i=1}^{m} b_i \tau_i \tag{1.2}$$

Здесь θ_0 – тензор инерции системы тел, b_i – орт оси вращения i-го маховика (индекс t означает транспонирование), C_i – момент инерции i-го маховика относительно оси вращения, L_0 – кинетический момент системы тел в осях $O\xi\eta\zeta$, $R \in SO(3)$ – матрица вращения, приводящая оси $O\xi\eta\zeta$ к осям $Oxyz$; τ_i – управляющий момент, приложенный к оси i-го маховика.

В дальнейшем используется общая форма записи для (1.1), (1.2)

$$M\dot{\omega} + \omega \times N(\omega, L_0) = u \tag{1.3}$$

и (1.3) дополняется кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{s}_i = -(\omega - \omega_d) \times s_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Инерционные параметры и кинетический момент динамического объекта (1.3), (1.4) неизвестны. Требуется определить управляющий момент u и закон подстройки управляющих параметров системы так, чтобы оси c_1, c_2, c_3, связанные с телом, стабилизировались в направлении соответствующих подвижных осей s_1, s_2, s_3, и угловая скорость ω стремилась к ω_d.

Для определения закона управления используется следующее свойство динамического уравнения (1.3).

1°. Уравнение динамики (1.3) допускает линейное представление относительно вектора неизвестных параметров $\theta \in R^p$

$$M\dot{\omega}_r + \omega_r \times N(\omega, L_0) = Y(\omega, \omega_r, \dot{\omega}_r)\theta \tag{1.5}$$

Здесь ω_r, $\dot{\omega}_r \in R^3$ – произвольные векторы, вектор θ содержит неизвестные составляющие матрицы инерции и кинетического момента, Y – известная $(3 \times p)$-матрица-функция.

Если управление создается при помощи пар реактивных сил и $0xyz$ – главные центральные оси инерции тела P_0, то $N(\omega, L_0) = M\omega$, $\theta = (A, B, C)^t$ и (3×3)-матрица Y имеет вид

$$Y = \begin{Vmatrix} \dot{\omega}_{r1} & -\omega_2\omega_{r3} & \omega_{r2}\omega_3 \\ \omega_1\omega_{r3} & \dot{\omega}_{r2} & -\omega_{r1}\omega_3 \\ -\omega_1\omega_{r2} & \omega_{r1}\omega_2 & \dot{\omega}_{r3} \end{Vmatrix}$$

Для нахождения функции Ляпунова, используемой при синтезе управления, полезно следующее свойство пассивности динамического объекта.

2°. Дифференциальное уравнение (1.3) определяет пассивное отображение $u \to \omega$, т.е.

$$\int_0^t u^t \omega d\tau \geqslant -\gamma^2 \text{ для всех } T > 0 \text{ и некоторого } \gamma \in R \tag{1.6}$$

Для доказательства неравенства (1.6) находим

$$\int_0^T \omega^t (M\dot{\omega} + \omega \times N(\omega, L_0)) d\tau = \frac{1}{2}(\omega^t(T) M\omega(T) - \omega^t(0) M\omega(0)) \geqslant -\gamma^2$$

Введем нормированные пространства квадратично интегрируемых функций

$$L_2^n(R_+) = \left\{ x: R_+ \to R^n \middle| \left(\int_0^\infty |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

и ограниченных функций

$$L_\infty^n(R_+) = \left\{ x: R_+ \to R^n \middle| \sup_{t\in[0,\infty)} |x(t)| < \infty \right\}$$

где R_+ – множество неотрицательных действительных чисел.

Лемма 1. Пусть x: $R_+ \to R^n$ действительная кусочно-гладкая вектор-функция, такая, что $x \in L_2^n \cap L_\infty^n$ и $\dot{x} \in L_\infty^n$. Тогда $x \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что для функции $\varphi = x^t x$: $R_+ \to R^1$ выполнены соотношения

$$\dot{\varphi} = 2x^t \dot{x} \in L_\infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \varphi dt = \int_0^\infty x^t x dt \leqslant \text{const} \tag{1.7}$$

Следовательно, функция $\varphi \in L_1$ и равномерно непрерывна на R_+. Поэтому ([5], с. 249) $\varphi \to 0$ при $t \to \infty$ и, следовательно, $x \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Синтез динамического управления с подстройкой параметров. Определим следующие вектор-функции, характеризующие ошибки отслеживания программного движения:

$$e = \sum k_i s_i \times c_i, \quad \omega_r = \omega_d - \Lambda e, \quad \upsilon = \omega - \omega_r \tag{2.1}$$

Вектор $e \in R^3$ [2] характеризует ошибку ориентации твердого тела, причем k_i – попарно различные положительные числа ($i = 1, 2, 3$); вектор $\upsilon \in R^3$ учитывает ошибки ориентации и угловой скорости $\upsilon = \omega_e + \Lambda e$, где $\omega_e = \omega - \omega_d$ и $\Lambda > 0$; суммирование ведется от $i = 1$ до $i = 3$.

Пусть $\theta_r = R^p$ – вектор оценки параметров объекта и $\theta_e \in R^p$, $\theta_e = \theta_r - \theta$ – вектор ошибки оценки параметров. Предполагается, что программное движение удовлетворяет требуемым условиям гладкости $\omega_d \in C^1(R_+)$.

Необходимо определить управление $u(t)$ и закон подстройки параметров так, чтобы выполнялась следующая цель управления:

$$\lim_{t\to\infty} \omega = \omega_d, \quad \lim_{t\to\infty} s_i = c_i, \quad i = 1,2,3 \tag{2.2}$$

Определим также вспомогательную цель управления

$$\lim_{t\to\infty} \omega = \omega_d, \quad \lim_{t\to\infty} e = 0 \tag{2.3}$$

которая определяет сходимость движений твердого тела к движениям $\omega = \omega_d$, $s_1 = \pm c_1$, $s_2 = \pm c_2$, $s_3 = s_1 \times s_2$, одно из которых соответствует программной траектории.

Лемма. 2. Для всех $T > 0$ выполнено неравенство

$$\int_0^T \omega_e^t e d\tau \geqslant -\gamma^2, \quad \gamma^2 = 2\sum k_i \tag{2.4}$$

Доказательство. Подстановкой (2.1) в (2.4) находим

$$\int_0^T \omega_e^t \sum_{i=1}^{i=3} k_i s_i \times c_i d\tau = \int_0^T \sum_{i=1}^{i=3} k_i c_i^t (\omega_e \times s_i) d\tau = -\int_0^T \sum_{i=1}^{i=3} k_i c_i^t \dot{s}_i d\tau = -\sum_{i=1}^{i=3} k_i c_i^t s_i \Big|_0^T \geqslant -\gamma^2$$

Лемма 3. Если $\upsilon \in L_2^3$, то e, $\omega_e \in L_2^3$.

Доказательство. Используя (2.1) и лемму 2, находим

$$\int_0^T \omega_e^2 d\tau + \int_0^T e^2 d\tau = \int_0^T \upsilon^2 d\tau - 2\Lambda \int_0^T \omega_e^t e d\tau \leqslant \int_0^\infty \upsilon^2 d\tau + 2\Lambda\gamma^2 < \infty \tag{2.5}$$

Затем переходим к пределу при $T \to \infty$.

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V=[v^t M v+\theta_e^t \Gamma^{-1}\theta_e]/2 \tag{2.6}$$

где Γ – симметричная положительно определенная (3×3)-матрица коэффициентов обратной связи.

Дифференцированием равенства (2.6) вдоль траекторий системы находится закон управления и подстройки параметров

$$u=M_r\dot{\omega}_r+\omega_r\times N(\omega,L_{0r})-K_d v \tag{2.7}$$

$$\dot{\theta}_r=-\Gamma Y^t(\omega,\omega_r,\dot{\omega}_r)v \tag{2.8}$$

где K_d – симметричная положительно определенная (3×3)-матрица коэффициентов обратной связи, M_r, L_{0r} – оценки тензора инерции и вектора кинетического момента.

Теорема 1. Рассмотрим движение твердого тела (1.3), (1.4) при управлении (2.7) и законе подстройки параметров (2.8). Тогда для ограниченных программных траекторий ω_d, $\dot{\omega}_d\in L^3_\infty(R_+)$ выполняется вспомогательная цель управления (2.3) и движения твердого тела стремятся к асимптотически устойчивым движениям $\omega=\omega_d$, $s_1=\pm c_1$, $s_2=\pm c_2$, $s_3=s_1\times s_2$. При этом вектор настраиваемых параметров θ_r и управляющее воздействие u остаются ограниченными.

Доказательство. Дифференцированием равенства (2.6) с учетом (1.3), (1.4) находим

$$\dot{V}=v^t M(\dot{\omega}-\dot{\omega}_r)+\theta_e^t\Gamma^{-1}\dot{\theta}_e=v^t(u-\omega_r\times N(\omega,L_0)-M\dot{\omega}_r)+\theta_e^t\Gamma^{-1}\dot{\theta}_e$$

Используя линейное представление (1.5) и, учитывая соотношения (2.7), (2.8), получим

$$\dot{V}=-v^t K_d v \tag{2.9}$$

При этом использовано равенство $\dot{\theta}_e=\dot{\theta}_r$, так как $\dot{\theta}=0$. Из (2.6), (2.9) следует

$$v\in L_2^3\cap L_\infty^3,\quad \theta_e\in L_\infty^p$$

Используя лемму 3, находим, что ω_e, $e\in L_2^3$, а из ограниченности e и v следует, что $\omega_e\in L_\infty^3$.

Дифференцированием равенства (2.1) находим

$$\dot{e}=-\sum k_i(\omega_e\times s_i)\times c_i$$

т.е. из ограниченности ω_e следует ограниченность $\dot{e}$. Следовательно, согласно лемме 1, $e\to 0$ при $t\to\infty$.

Покажем стремление к нулю вектора v. Так как $\omega_d\in L_\infty^3$, то из ограниченности ω_e следует ограниченность ω. Учитывая ограниченность $\theta_e,\omega,\dot{\omega}_d,\dot{e}$, находим из (2.7), что управляющее воздействие u ограничено. Далее из (1.3) следует, что $\dot{\omega}\in L_\infty^3$. Из ограниченности $\dot{\omega}$ следует ограниченность $\dot{v}$ и, согласно лемме 1, $v\to 0$ при $t\to\infty$.

Из стремления к нулю векторов v, e при $t\to\infty$ следует, что движения твердого тела стремятся к асимптотически устойчивым движениям $\omega=\omega_d$, $s_1=\pm c_1$, $s_2=\pm c_2$, $s_3=s_1\times s_2$, одно из которых соответствует программной траектории.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации заданного положения твердого тела. Полагая $\omega_d=\dot{\omega}_d=0$ в (2.7), находим

$$u=-K_d\omega-K_d\sum k_i s_i\times c_i-\Lambda Y(\omega,e,\dot{e})\theta_r \tag{2.10}$$

Управление (2.10) отличается от стабилизирующего управления ([2], с. 425) динамическим слагаемым, пропорциональным оценке параметров объекта, которое улучшает сходимость к нулю ошибки ориентации.

3. Экспоненциальная стабилизация движения. Для достижения экспоненциального отслеживания программного движения и сходимости оценок параметров объекта к их истинным значениям функция Ляпунова (2.6) заменяется на

$$V = 1/2[v^t M v + \theta_e^t \Gamma^{-1}\theta_e + K_p \sum k_i (c_i - s_i)^2 + \left\| Mv - \varepsilon - \varphi^t \theta_e \right\|^2 \tag{3.1}$$

где $\varepsilon \in R^3$ – вспомогательный вектор и φ – $(p \times 3)$-матрица-функция.

Дополнительный член, аналогичный последнему слагаемому в (3.1), использовался [6] для экспоненциальной стабилизации движения манипулятора с жесткими звеньями.

Дифференцированием равенства (3.1) находим закон управления и подстройки параметров вида

$$u = Y_c\theta_r - K_p e - \alpha v, \quad \dot{\theta}_r = -\Gamma Y_c^t v + \lambda_c \Gamma\varphi\varepsilon$$
$$\dot{\varepsilon} = -\lambda_c\varepsilon - \alpha v - K_p e + \varphi^t\Gamma Y_c^t v - \lambda_c\varphi^t\Gamma\varphi\varepsilon, \quad \dot{\varphi} = -\lambda_c\varphi + Y_c^t \tag{3.2}$$

Здесь $\lambda_c > 0$ и $\alpha > \lambda_c(\sigma_M)^2$, где σ_M – максимальное собственное число матрицы M, а $(3 \times p)$-матрица-функция Y_c определяется неравенством

$$Y_c(\omega, \omega_r, \dot{\omega}_c)\theta = M\dot{\omega}_c + \omega_r \times N(\omega, L_0), \quad \dot{\omega}_c = \dot{\omega}_r - \lambda_c v \tag{3.3}$$

Матрица Γ в (3.2) настраивается при помощи метода наименьших квадратов [7]

$$\dot{\Gamma}^{-1} = \frac{\lambda_c}{2}(\varphi\varphi^t - \lambda(t)\Gamma^{-1}), \quad \Gamma(0) = \Gamma^t(0) > 0, \quad \|\Gamma(0)\| \leqslant k_0; \quad \lambda(t) = \lambda_0\left(1 - \frac{\|\Gamma\|}{k_0}\right) \tag{3.4}$$

с зависящим от времени параметром $\lambda(t)$.

Закон подстройки (3.4) обладает следующими свойствами: а) для любого $t \geqslant 0$ выполнены неравенства $\lambda(t) \geqslant 0$ и $\Gamma(t) \leqslant k_0 I$; б) для программных движений с неисчезающим возбуждением, т.е. для которых можно найти положительные числа β_1, β_2 и δ, такие, что выполняются неравенства

$$\beta_1 I_3 \leqslant \int_t^{t+\delta} \varphi^t(\tau)\varphi(\tau)d\tau \leqslant \beta_2 I_3 \tag{3.5}$$

для любого $t \geqslant 0$; существует положительное число $\lambda_1 \geqslant 0$, такое, что $\lambda(t) \geqslant \lambda_1$ для любого $t \geqslant 0$.

Отделимость от нуля переменной $\lambda(t)$ позволяет добиться сходимости вектора оценки параметров θ_r к его истинному значению.

Управление вида (3.2)–(3.4) является композитным [7], так как при подстройке параметров объекта используется как информация об ошибке отслеживания программного движения, так и величина предсказания ошибки.

Теорема 2. Рассмотрим движение твердого тела (1.3), (1.4) при управлении и законе подстройки параметров (3.2)–(3.4). Тогда для ограниченных программных движений ω_d, $\dot{\omega}_d \in L_\infty^3(R_+)$ выполняется вспомогательная цель управления (2.3).

Более того, если программное движение таково, что выполняется условие неисчезающего возбуждения (3.5), то

а) вектор θ_r стремится к истинному значению параметров объекта;

б) вектор ε стремится к нулю $\varepsilon \to 0$;

в) все установившиеся движения $\omega = \omega_d$, $s_1 = \pm c_1$, $s_2 = \pm c_2$, $s_3 = s_1 \times s_2$, $\theta_e = \varepsilon = 0$, кроме программного, неустойчивы, и в области

$$D{:}\{s{:}e^t e > \Lambda^{-1} V_\delta\}, \quad \left(V_\delta = \sum_{i=1}^{3} k_i (c_i - s_i)^2 \right) \tag{3.6}$$

функция Ляпунова (3.1) сходится к нулю экспоненциально.

Доказательство. Дифференцированием первого слагаемого (3.1), учитывая (1.3), (1.5) и первое соотношение (3.2), находим

$$T_1 = v^t(u - \omega \times N(\omega, L_0) - M\dot{\omega}_r) = v^t(u - \omega_t \times N(\omega, L_0) - M\dot{\omega}_r) =$$

$$= v^t(u - Y_c\theta - \lambda_c M v) = -\lambda_c v^t M v + v^t(u - Y_c\theta_r + Y_c\theta_e) =$$

$$= -\lambda_c v^t M v - \alpha v^t v - K_p v^t e + v^t Y_c \theta_e \tag{3.7}$$

Дифференцированием второго и третьего слагаемого (3.1) определяем

$$T_2 + T_3 = \theta_e^t \Gamma^{-1} \dot{\theta}_e + \frac{\lambda_c}{4}\left(\|\theta_e\|^2_{\varphi\varphi'} - \lambda(t)\|\theta_e\|_{\Gamma^{-1}} \right) + K_p \omega_e^t e \tag{3.8}$$

где $\|X\|_A$ – квадратичная норма, порожденная симметричной матрицей A.

Дифференцированием последнего слагаемого (3.1) с учетом (3.2) находим [6]

$$T_4 = (Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e)^t(-\lambda_c M v + Y_c\theta_e - K_p e - \alpha v - \dot{\varepsilon} - \dot{\varphi}^t\theta_e - \varphi^t\dot{\theta}_e) =$$

$$= \frac{\lambda_c}{2}\left\|Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e\right\|^2 - \frac{\lambda_c}{2}\|Mv - \varepsilon\|^2 + \lambda_c(Mv - \varepsilon)^t\varphi^t\theta_e - \frac{\lambda_c}{2}\|\theta_e\|^2_{\varphi\varphi'} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\lambda_c}{2}\left\|Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e\right\|^2 - \frac{\lambda_c}{2}\|\theta_e\|^2_{\varphi\varphi'} - \lambda_c\varepsilon^t\varphi^t\theta_e + \frac{\lambda_c}{2}\sigma_M\left(\mu\|v\|^2 + \frac{1}{\mu}\|\theta_e\|^2_{\varphi\varphi'} \right) \tag{3.9}$$

Полагая в (3.9) $\mu = 2\sigma_M$ и складывая равенства (3.7)–(3.9), находим

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_c v^t M v - \frac{\lambda_c}{2}\left\|Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e\right\|^2 - \frac{\lambda_c}{4}\lambda(t)\|\theta_e\|^2_{\Gamma^{-1}} - K_p \Lambda e^t e \tag{3.10}$$

Из (3.1), (3.10) следует первая часть утверждения теоремы.

Покажем сходимость вектора оценки параметров к истинному значению $\theta_e \to 0$ при выполнении условия (3.5). Учитывая (3.5), из (3.1), (3.10) заключаем, что $\theta_e \in L_2^p \cap L_\infty^p$.

Покажем ограниченность $\dot{\theta}_e$. Учитывая ограниченность Y_c, из последнего равенства (3.2) выводим ограниченность φ и далее из (3.1), (3.10) ограниченность ε, что означает ограниченность $\dot{\theta}_e$ согласно второму равенству (3.2). Следовательно, $\theta_e \to 0$ при $t \to \infty$.

Далее $\varepsilon \to 0$ так как вектор $\eta = Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e \to 0$. Последнее следует из $\eta \in L_2^3 \cap$ $\cap\, L_\infty^3$ (3.10) и ограниченности производной $\dot{\eta} \in L_\infty^3$ (3.2).

Используя сходимость вектора оценок параметров к истинному значению, покажем, что все установившиеся движения, кроме программного движения, являются неустойчивыми по Ляпунову.

Покажем неустойчивость, например, установившегося движения $\omega = \omega_d$, $s_1 = -c_1$, $s_2 = c_2$, $s_3 = -c_3$, $\theta_e = \varepsilon = 0$. Для этого выбираем функцию

$$V_c = [v^t M v + \theta_e^t\Gamma^{-1}\theta_e - k_1(c_1 + s_1)^2 + k_2(c_2 - s_2)^2 - k_3(c_3 + s_3)^2] + \left\|Mv - \varepsilon - \varphi^t\theta_e\right\|^2/2 \tag{3.11}$$

которая ограничена в области $V_c < 0$, существующей в сколь угодно малой окрестности установившегося движения $\omega = \omega_d$, $s_1 = -c_1$, $s_2 = c_2$, $s_3 = -c_3$, $\theta_e = \varepsilon = 0$ при всех $t \geqslant t_0$ и имеет знакоотрицательную производную (3.10). Далее применим теорему Четаева о неустойчивости движения [8].

Неустойчивость других установившихся движений доказывается аналогично. В области (3.6) неравенство (3.10) записывается в виде

$$\dot{V} + \gamma V \leqslant 0, \quad \gamma = \min\{\lambda_c, \lambda_c\lambda_1 / 2, 2\} > 0 \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует экспоненциальное стремление к нулю функции Ляпунова, что завершает доказательство теоремы.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации ориентации твердого тела в заданном направлении $s_0(t)$. Полагаем $e = s_0 \times c_0$ и $V_\delta = (s_0 - c_0)^2$, где c_0 – орт, связанный с телом. Первое соотношение для управляющего момента преобразуется к виду

$$\begin{gathered} u = M_r\dot{\omega}_d + \omega_d \times N(\omega, L_{0r}) - K_e e - K_v\,\omega_e - \Lambda Y(\omega, e, \dot{e})\theta_r \\ K_e = (K_p + \alpha\Lambda)I_3 + \lambda_c\Lambda M_r, \quad K_v = \alpha I_3 + \lambda_c M_r \end{gathered} \tag{3.13}$$

Область (3.6) имеет вид

$$D{:}\{s_0{:}(s_0c_0) > 2/\Lambda - 1\} \tag{3.14}$$

На сфере единичного радиуса, описанной вокруг точки 0, выражение (3.14) определяет область, при попадании в которую конца орта s_0 достигается экспоненциальная стабилизация движения при выполнении условия (3.5). При $\Lambda > 1$ область D_0 охватывает положение равновесия $s_0 = c_0$ и при уменьшении Λ стремится к единичной сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Slotine J.-J., Di Benedetto M.D.* Hamiltonian Adaptive Control of Spacecraft // IEEE Trans. Aut. Contr. 1990. Vol. 35. No. 7. P. 848–852.
2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
3. *Заремба А.Т.* Уравнение динамики многозвенного манипулятора с голономными связями // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 4. С. 25–34.
4. *Crouch P.E.* Spacecraft attitude control and stabilization: Applications of geometric control theory to rigid body models // IEEE Trans. Aut. Contr. 1984. Vol. 29. No. 4. P. 321–331.
5. *Дезоер Ч., Видьясагар М.* Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. М.: Наука, 1983. 280 с.
6. *Stotsky A.A.* Composite and pseudogradient algorithms for rigid robots // Proc. IEEE Workshop on "Variable Structure and Lyapunov Control of Uncertain Dynamical Systems". Sheffield. 1992.
7. *Slotine J.-J., Li W.* Composite adaptive control of robot manipulators // Automatica. 1989. Vol. 25. No. 4. P. 509–519.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 207 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
26.VIII.1996