ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 61. Вып. 1, 1997

УДК 531.36

© 1997 г. А.В. Борисов, А.В. Цыгвинцев

МЕТОД КОВАЛЕВСКОЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Приводится пример из динамики твердого тела, имеющий естественное физическое обоснование. Поведение решений уравнений движения в вещественной области при любых начальных условиях является регулярным, тем не менее в зависимости от значений некоторого управляющего параметра решение системы может ветвиться на комплексной плоскости времени, а система обладать многозначными первыми интегралами. Найдена также счетная последовательность однозначных полиномиальных интегралов сколь угодно высокой четной степени (в отличие от случая Ковалевской, где степень первого интеграла уравнений Эйлера – Пуассона равна четырем). В качестве обобщения рассмотрена одна система из неголономной механики.

Известно, что уравнения движения классических задач динамики твердого тела (уравнения Эйлера – Пуассона, уравнения Кирхгофа, уравнения Пуанкаре – Ламба – Жуковского) [1, 2] могут быть представлены в квазиоднородной форме (в смысле определения [3]). Со времен Ковалевской для поиска интегрируемых случаев таких систем применялся метод, основанный на изучении ветвления общего решения на комплексной плоскости времени. Мероморфность общего решения связывалась с существованием дополнительного алгебраического первого интеграла, а также с интегрируемостью системы с помощью тэта-функций. На развитии этой идеи построен метод Гюссона доказательства несуществования дополнительного алгебраического интеграла и методы работ [4–6], в которых найдены препятствия к существованию дополнительного однозначного в комплексной области первого интеграла. Эти результаты создали в динамике твердого тела уверенность в том, что интегрируемость уравнений движения, а значит, и их регулярное поведение часто связаны с существованием однозначных интегралов и интегрируемостью в тэта функциях.

1. Квазиоднородные системы и показатели Ковалевской. Будем называть [3] систему n дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = v_i(x_1,\ldots,x_n), \quad i=1,\ldots,n \tag{1.1}$$

квазиоднородной с показателями квазиоднородности $g_1,\ldots,g_n \in Q$, если

$$v_i(\alpha^{g_1}x_1,\ldots,\alpha^{g_n}x_n)=\alpha^{g_i+1}v_i(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.2}$$

при всех значениях x и $\alpha > 0$. Для квазиоднородного первого интеграла $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ системы (1.1) требуется выполнение равенства

$$\Phi(\alpha^{g_1}x_1,\ldots,\alpha^{g_n}x_n)=\alpha^{g}\Phi(x_1,\ldots,x_n) \tag{1.3}$$

где величина $g \in \mathbb{R}$ называется показателем квазиоднородности.

В качестве примера можно рассмотреть систему (1.1) с однородными квадратичными правыми частями. В этом случае $g_1 = g_n = 1$. В динамике твердого тела к такому классу систем сводятся уравнения Кирхгофа, описывающие движение односвязного твердого тела в безграничном объеме безвихревой идеальной несжимаемой жидкости [12], уравнения

Пуанкаре – Ламба – Жуковского, имеющего эллипсоидальные полости, заполненные однородной вихревой идеальной жидкостью [2].

Метод Ковалевской был модифицирован в применении к квазиоднородным системам; причем так называемые показатели Ковалевской, характеризующие разложение общего решения вблизи особой точки системы дифференциальных уравнений (в случае мероморфности общего решения они являются целыми числами), были связаны со степенями квазиоднородности первых интегралов [3]. Для дальнейших приложений приведем более точную формулировку полученных ранее результатов [3, 7].

Уравнения (1.1) имеют частное решение вида

$$x_i = c_1 t^{-g_1}, \ldots, x_n = c_n t^{-g_n},$$

где постоянные коэффициенты c_i (в общем случае комплексные) удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.4}$$

В реальных системах можно найти некоторые частные нетривиальные решения (1.4). Показателями Ковалевской (ПК) называются собственные числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ матрицы

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c}) + g \right\|; \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n), \quad g = \operatorname{diag}(g_1, \ldots, g_n). \tag{1.5}$$

В силу автономности системы (1.1) один из ПК всегда равен –1. Как легко показать, сумма всех ПК для данного вектора **c** постоянна и равна размерности системы. Связь между степенями квазиоднородности первых интегралов, полей симметрий и ПК дается следующими теоремами.

Теорема 1 [3]. Если Φ – квазиоднородный интеграл системы (1.1) и grad $\Phi(\mathbf{c}) \neq 0$ и конечен, то квазиоднородная степень интеграла ρ является одним из ПК системы.

Теорема 2 [7]. Если $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0$ (т.е. $\mathbf{u}$ – поле симметрий системы (1.1)) и $\mathbf{u}$ квазиоднородно, deg (u_i/x_i) равны друг другу при $i = 1, \ldots, n$) и $\mathbf{u}(\mathbf{c}) \neq 0$, то –deg (u_i/x_i) – один из ПК системы. Если полей интегралов (или полей симметрий) несколько и они независимы на решении (1.4), то квазиоднородная степень каждого является ПК с соответствующей кратностью.

Исследование существования квазиоднородных интегралов у квазиоднородных систем (1.1), на самом деле, имеет более общий смысл, так как для таких систем всякий мероморфный в $\mathbb{C}^n$ первый интеграл сводится к рациональному квазиоднородному, если знаки g_i одинаковы, или к полиномиальному квазиоднородному, если он не имеет особых точек. Отметим, что квазиоднородный интеграл может иметь иррациональную или комплексную степень квазиоднородности, а поэтому быть неоднозначным. В следующих разделах приведены примеры, в которых существуют неоднозначные интегралы.

2. Уравнения Эйлера на $SO(4)$ и уравнения Пуанкаре – Ламба – Жуковского. Известно, что уравнения Эйлера, описывающие свободное вращение четырехмерного твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадают с классическими уравнениями Пуанкаре – Ламба – Жуковского [8] (точнее, включают их в себя). Уравнения этой задачи можно рассматривать в качестве приближения при описании движения Земли, имеющей твердую мантию и жидкое ядро (подробности см. в книге [9]). Уравнения движения волчка на $SO(4)$ анализировались также в физических работах [10, 11], в которых рассматривалась динамика взаимодействующих спинов во внешнем поле; причем были переоткрыты некоторые из результатов работ [12], исследовавших даже более общую ситуацию.

Алгебра Ли $SO(4)$ не является простой и может быть представлена в виде прямой суммы $SO(3) \oplus SO(3)$. Можно представлять себе, что один экземпляр $SO(3)$ соответствует вращению твердого тела вокруг неподвижной точки, а другой – квазитвердому (по Гельмгольцу) движению жидкости.

Если M_i и γ_i – соответственно компоненты вектора кинетического момента и вектора вихря в связанной с телом системой координат, то уравнения движения рассматриваемой системы можно представить в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \partial H / \partial \mathbf{M} = \mathbf{M} \times (A\mathbf{M} + B\boldsymbol{\gamma})$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \partial H / \partial \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times (B\mathbf{M} + C\boldsymbol{\gamma}), \tag{2.1}$$

где гамильтониан H является однородной квадратичной формой переменных $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$

$$H = (A\mathbf{M}, \mathbf{M})/2 + (B\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) + (C\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})/2. \tag{2.2}$$

Коэффициенты матриц A, B, C определяются динамическими характеристиками твердого тела и геометрическими характеристиками эллипсоидальной полости. В дальнейшем будем считать их диагональными.

Заметим, что уравнения (2.1) могут быть представлены в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{R}^6 \tag{2.3}$$

со скобкой Пуассона (вырожденной), определяемой коммутационными соотношениями алгебры $SO(4) \approx SO(3) \oplus SO(3)$

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = 0 \tag{2.4}$$

где ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты.

Уравнения (2.1) кроме интеграла энергии $H = E = \mathrm{const}$ всегда обладают еще двумя первыми интегралами (аннуляторами пуассоновой структуры) $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = M_0^2$, $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = \gamma_0^2$, при ограничении на которые пуассонова структура (2.4) становится невырожденной. На поверхностях $\mathbf{M}^2 = M_0^2$, $\boldsymbol{\gamma}^2 = \gamma_0^2$ система (2.1) сводится к обычной автономной гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, и для ее интегрируемости необходимо знать еще один первый интеграл.

Вычислим ПК для уравнений (2.1). Системе (1.4) для постоянных c_i удовлетворяют два следующих вектора:

$$(\pm(a_{13}a_{21})^{-1/2}, \mp(a_{21}a_{32})^{-1/2}, \pm(a_{32}a_{13})^{-1/2}, 0, 0, 0)$$
$$(0, 0, 0, \pm(c_{13}c_{21})^{-1/2}, \mp(c_{21}c_{32})^{-1/2}, \pm(c_{32}c_{13})^{-1/2}), \tag{2.5}$$

где $a_{ij} = a_i - a_j$, $c_{ij} = c_i - c_j$. Эти решения существуют при условии, что все элементы матриц А и C различны. Для ПК двух различных решений (2.5) будем иметь

$$\rho_1 = -1, \quad \rho_2 = \rho_3 = 2, \quad \rho_4 = 1, \quad \rho_{5,6} = 1 \pm k_d$$
$$k_d = \left[-\frac{b_1 d_{32}^2 + b_2 d_{13}^2 + b_3 d_{21}^2}{d_{21} d_{32} d_{13}} \right]^{-1/2}, \quad d = a, c. \tag{2.6}$$

Для того чтобы все приведенные ПК были целыми числами, необходимо выполнение соотношений

$$b_1^2 d_{32} + b_2^2 d_{13} + b_3^2 d_{21} + k_1^2 d_{21} d_{32} d_{13} = 0, \quad d = a, c, \tag{2.7}$$

где $k_d \in \mathbb{N}$, что совпадает с условиями, приведенными ранее [7] (полученными из условий мероморфности общего решения на комплексной плоскости времени). Согласно теореме 1, величины $\rho = 1 + k_a$ и $\rho = 1 + k_c$ претендуют на роль "хороших" степеней (для которых $\operatorname{grad} \Phi(c) \neq 0$) первых "хороших" интегралов, если последние существуют. Квадратичные интегралы системы (2.1) были открыты и обобщены в работах Фрама, Шоттки, В.А. Стеклова, С.В. Манакова (см. [12, 7]).

Был указан [14] общий случай интегрируемости, при котором $k_a = 3$, $k_c = 1$. В этом случае дополнительный интеграл имеет четвертую степень, а на коэффициенты матриц A, B, C кроме условий (2.7) наложены дополнительные ограничения.

3. Ограниченная постановка задачи. Проведем в уравнениях (2.1) замену $\boldsymbol{\gamma}$ на $\mu\boldsymbol{\gamma}$ и устремим μ к нулю. Получим систему

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times A\mathbf{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times B\mathbf{M} \tag{3.1}$$

описывающую вращение тела, когда интенсивность вихря мала по сравнению с моментом импульса. Первое векторное уравнение системы интегрируется независимо (задачи Эйлера – Пуансо), а второе – после подстановки в него уже известной функции $\mathbf{M}(t)$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times B\mathbf{M}(t) \tag{3.2}$$

представляет собой линейную гамильтонову систему на $SO(3)$ с периодическими коэффициентами. Для ее интегрируемости необходимо знать еще один первый интеграл (кроме геометрического), являющийся периодическим по (t). Такой интеграл действительно существует вследствие линейности и гамильтоновости, но неизвестно, как можно его распространить на общую систему (3.1), поведение которой тем не менее регулярно.

Дополнительный интеграл (3.2) является неоднозначным в комплексном смысле, т.е. он не будет голоморфным в $\mathbf{C}^3 \times X$, где X – риманова поверхность первой тройки уравнений (3.1). Однако при выполнении первого условия (2.7), получающегося из требования целочисленности ПК для системы (3.1), при нечетных значениях $k = k_a$ дополнительный первый интеграл системы (3.2) можно найти явно. При этом оказывается возможным выписать явно также дополнительный первый интеграл общей системы (3.1).

Заметим, что для интегрируемости системы (3.1) не хватает одного дополнительного интеграла, кроме тривиальных $I_1 = (\mathbf{M}, A\mathbf{M})$, $I_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{M})$, $I_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})/2$ и стандартной инвариантной меры. Оказывается, что его проще получить, определив дополнительные поля симметрий системы (3.1).

Введем дифференциальный оператор, определенный системой (3.1)

$$\hat{D} = \mathbf{M} \times A\mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times B\mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \tag{3.3}$$

Тогда поле симметрии будет задаваться некоторым оператором $\hat{P}$, коммутирующим с $\hat{D}$ в обычном смысле

$$[\hat{D}, \hat{P}] = \hat{D}\hat{P} - \hat{P}\hat{D} = 0 \tag{3.4}$$

Будем искать $\hat{P}$ в виде

$$\hat{P} = \mathbf{P}(\mathbf{M})\partial / \partial\boldsymbol{\gamma} \tag{3.5}$$

Расписывая условие (3.4), приходим к трем линейным уравнениям в частных производных, определяющим вектор $\mathbf{P} = (P_1(\mathbf{M}), P_2(\mathbf{M}), P_3(\mathbf{M}))$:

$$\hat{D}\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 0 & M_3 b_3 & -M_2 b_2 \\ -M_3 b_3 & 0 & M_1 b_1 \\ M_2 b_2 & -M_1 b_1 & 0 \end{Vmatrix} \mathbf{P} \tag{3.6}$$

Линейной заменой

$$\mathbf{P} = \mathrm{diag}(M_1, M_2, M_3) A_1^{-1} K A_3^{-1} K \ldots A_{k-2}^{-1} K \mathbf{T} \tag{3.7}$$

приведем (3.6) к виду

$$\hat{D}\mathbf{T} = K A_k \mathbf{T} \tag{3.8}$$

где

$$A_n = \begin{Vmatrix} -a_{32}n & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & -a_{13}n & b_1 \\ b_2 & -b_1 & -a_{21}n \end{Vmatrix}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.9}$$

– постоянные матрицы; причем

$$\det A_n = -n(n^2 a_{32} a_{13} a_{21} + b_1^2 a_{32} + b_2^2 a_{13} + b_3^2 a_{21}) \tag{3.10}$$

$k = \mathrm{diag}(M_1^2, M_2^2, M_3^2)$, $k > 0$ – нечетное число. Отсюда следует, что $\mathbf{T}$ – постоянный вектор, определяемый из условия $A_k\mathbf{T} = 0$. Видно, что $\mathbf{T} \neq 0$, если $\det A_k = 0$, т.е.

$$k^2 a_{32} a_{13} a_{21} + b_1^2 a_{32} + b_2^2 a_{13} + b_3^2 a_{21} = 0 \tag{3.11}$$

(k – нечетное число).

Это условие является достаточным для существования у системы (3.1) нетривиального поля симметрии, явно представляемого выражением (3.7).

Из тождества $\hat{D}I_3 \equiv 0$ элементарно следует, что и $\hat{D}(\hat{P}I_3) \equiv 0$, т.е. $\hat{P}I_3 = I_4$ – искомый дополнительный интеграл уравнений (3.1) при условии (3.11). Запишем его в виде

$$I_4 = (\mathbf{P}(\mathbf{M}), \boldsymbol{\gamma}) \tag{3.12}$$

Из линейности I_4 по $\boldsymbol{\gamma}$ следует его независимость с I_1, I_2, I_3. Более того, можно показать, что, являясь однородной формой порядка $k + 1$, интеграл I_4 не сводится к комбинации интегралов меньшей степени.

Условию (3.11) удовлетворяет случай, когда $B = kA$, где k – нечетное число. При $k = 1$ имеем уравнения Эйлера – Пуассона, при этом $I_4 = (M, \gamma)$. При $k = 3$ имеем согласно (3.12)

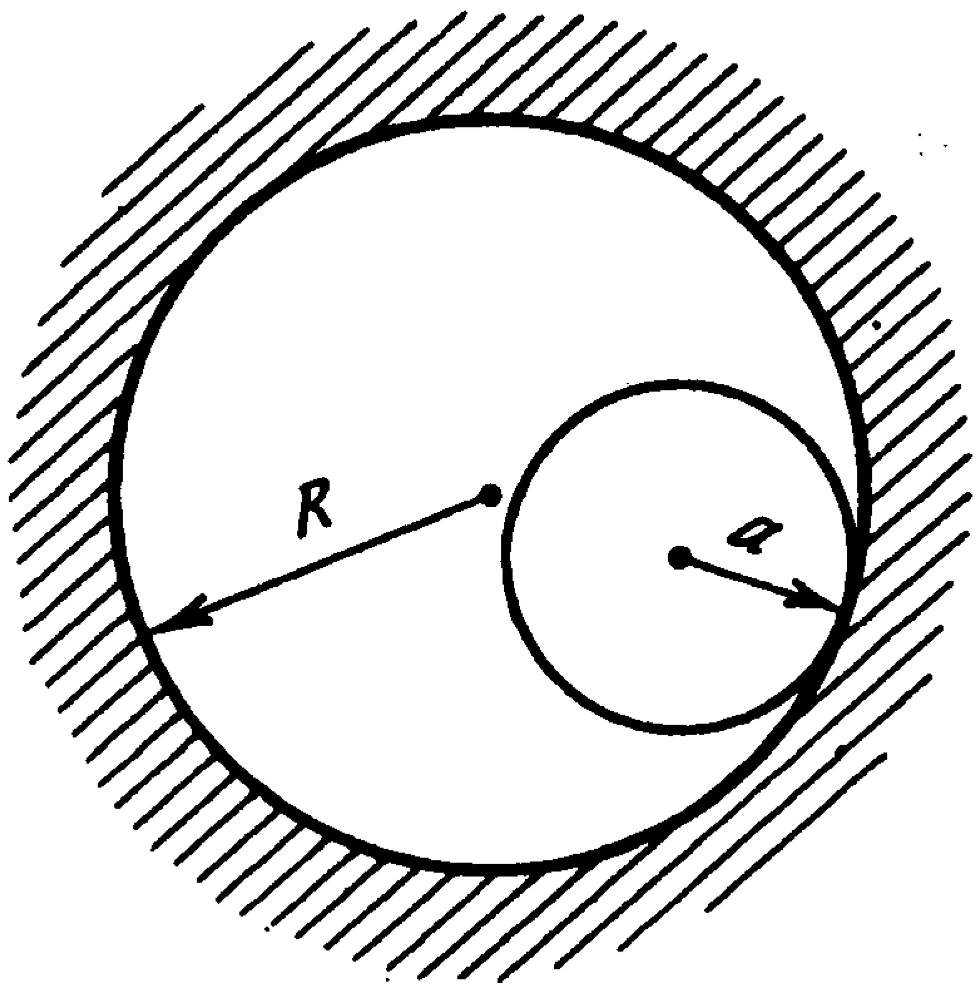
$$I_4 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \tag{3.13}$$

$$\Phi_1 = \gamma_1 M_1 [(a_{13}a_{21} + 9a_1^2)M_1^2 + (3a_3 a_{21} + 9a_1 a_2)M_2^2 + (9a_1 a_3 - 3a_2 a_{13})M_3^2] \ (1\,2\,3).$$

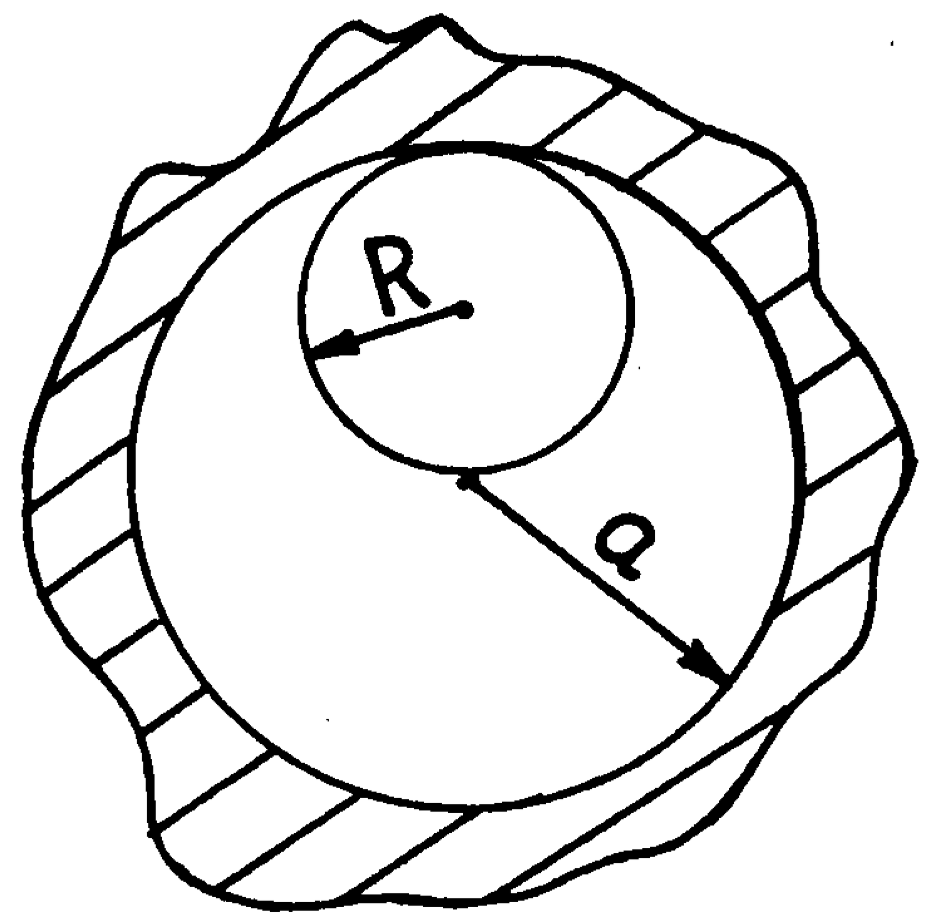
Как уже было замечено выше, система уравнений (3.1) обладает дополнительным четвертым интегралом при любых значениях элементов матриц A и B. При условии (3.11) он представляется полиномом. Удалось также найти его явное выражение в случае, когда выполняются условия $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 \neq 0$, а условие (3.11) не обязательно выполнено. Тогда

$$I_4 = \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \cos\varphi \tag{3.14}$$

$$\varphi = \frac{b_3}{\sqrt{a_{13}a_{32}}} \ln(\sqrt{a_{13}}\, M_1 + \sqrt{a_{13}}\, M_2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Этот пример еще раз подтверждает тот факт, что общее решение уравнений (3.1), как их интегралы, могут быть многозначными.

Вообще говоря, справедливо следующее утверждение: общее решение системы уравнений (3.1) выражается в однозначных функциях времени тогда и только тогда, когда выполнено условие (3.11).

Представляется интересным распространить приведенные выше интегралы системы (3.1) на систему (2.1). Однако авторам этого сделать не удалось, исключая случай $k = 1$, который был известен ранее [12, 13]. Как показывают численные исследования, проведенные при помощи построения отображения Пуанкаре, такое обобщение невозможно, если не накладывать дополнительных ограничений на коэффициенты матриц A, B, C.

Отметим, что некоторые примеры вполне интегрируемых систем в вещественной области с ветвящимися решениями как функции комплексного времени приведены в книге [15].

4. Обобщение задачи Чаплыгина о качении динамически несимметричного шара. Рассмотрим задачу о движении по инерции шара Чаплыгина [16] по поверхности сферы без проскальзывания (фиг. 1). Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \lambda \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \lambda = R/(R-a) \tag{4.1}$$

$$(\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}))$$

Здесь $\mathbf{M}$ – кинетический момент относительно точки контакта в связанной с телом системе координат, $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор, соединяющий центры обоих шаров, I – тензор инерции относительно центра масс. Уравнения (4.1) имеют первые интегралы $(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathrm{const}$, $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \mathrm{const}$, $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1$ и инвариантную меру, найденную Чаплыгиным

$$\mu = [1 - D(I^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})]^{-1/2}$$

Для интегрируемости этих уравнений не хватает еще одного первого интеграла – аналога интеграла площадей. Заметим, что при $D = 0$ уравнения (4.1) сводятся к системе (3.1) при $B = \lambda A$, $A = I^{-1}$. Поэтому можно пытаться обобщить интеграл (3.12) на уравнения (4.1) при $D \neq 0$.

При $\lambda = 1$ ($R \Rightarrow \infty$) получаем классическую задачу Чаплыгина, которая интегрируема при $\lambda = -1$ ($a = 2R$), что соответствует внешнему обкатыванию неподвижного шара динамически несимметричной сферой удвоенного радиуса (фиг. 2).

Оказывается, что интеграл (3.12) при $B = -A$ будет справедлив и для системы (4.1). Поэтому указанная задача интегрируема. Однако она не является принципиально новой интегрируемой задачей неголономной механики, так как ее уравнения линейной заменой переменных могут быть преобразованы к уравнениям (4.1) при $\lambda = 1$ [17]. При

$\lambda = 1$ также возникает интегрируемое обобщение системы (4.1), если ввести поле сил задачи Бруна, которое в данной задаче трудно интерпретировать физически.

Авторы не смогли найти каких-либо обобщений интеграла (3.12) на систему (4.1). Как потом оказалось, сделать это непосредственно невозможно, так как, вообще говоря, поведение системы (4.1) при $\lambda = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) будет стохастическим. Это подтвердили численные исследования отображения Пуанкаре.

Авторам также не удалось найти обобщения интеграла площадей на случай введения уравновешенного гиростата [18], даже при $\lambda = -1$.

Авторы благодарят Ю.Н. Федорова за обсуждения, а также А.А. Багреца и Д.А. Багреца за проведенные численные исследования по регулярному и стохастическому поведению задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ СССР, 1985. Т. 3. 304 с.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Yoshida H.* Necessery condition for the existence of algebraic first integrals. I; II // Celest. Mech. 1983. V. 31. № 4. P. 369–399.
4. *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 400–406.
5. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16. Вып. 3. С. 30–41.
6. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. II // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. Вып. 1. С. 8–23.
7. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской – Ляпунова // Мат. заметки. 1992. Т. 51. Вып. 2. С. 46–52.
8. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $SO(4)$ // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1298–1300.
9. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М.: Мир, 1976. Т. 2. 483 с.
10. *Srivastava N., Kaufman C., Müller G., Weber R., Thomas H.* Integrable and non-integrable classical spin clusters // Z. Phys. B. Condensed Matter. 1988. V. 70. № 2. P. 251–268.
11. *Srivastava N., Kaufman C., Müller G., Magyari E., Weber R., Thomas H.* Classical spin clusters: Integrability and dynamical properties // J. Appl. Phys. 1987. V. 61. № 8. P. 4438–4440.
12. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991. 320 с.
13. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. М.: Изд-во МГУ, 1988. 413 с.
14. *Adler M., Moerbeke P. van.* The algebraic integrability of geodesic flow on $SO(4)$ // Invent. Math. 1982. V. 67. № 2. P. 297–331.
15. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1995. 431 с.
16. *Чаплыгин С.А.* О катании шара по горизонтальной плоскости // Мат. сб. 1985. Т. 24. Вып. 1. С. 139–168.
17. *Козлов В.В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики. 1985. Т. 8. № 3. С. 85–107.

Москва

Поступила в редакцию
12.IX.1995