

УДК 531.391

© 1997 г. А.И. Нейштадт, В.В. Сидоренко

ЗАПАЗДЫВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМЕ ЦИГЛЕРА

Рассматривается запаздывание потери устойчивости в системе Циглера при медленном увеличении следящей силы. Строится функция "входа-выхода", позволяющая предсказать момент потери устойчивости по заданному начальному значению силы.

Запаздывание потери устойчивости при медленном изменении параметров впервые было обнаружено при изучении модельной системы [1]. Была изложена [2–6] теория этого эффекта в системах общего вида. Ниже рассматривается влияние медленного изменения параметров на динамику модифицированной системы Циглера [7]. Предшествующие исследования системы Циглера методами классической теории бифуркаций позволили объяснить многие парадоксальные особенности неконсервативных механических систем, нагруженных следящими силами [8, 9].

Отметим, что запаздывание потери устойчивости не связано с наличием каких-то управляющих воздействий, удерживающих систему в окрестности неустойчивого стационарного состояния (ср. [10]).

1. Описание системы. Уравнения движения. Системой Циглера будем называть плоскую шарнирно-стержневую механическую систему с двумя степенями свободы, нагруженную медленно увеличивающейся следящей силой P (фиг. 1). Предполагается, что при горизонтальном положении стержней пружины в шарнирах находятся в естественном недеформированном состоянии. Стержни, имеющие одинаковую длину l и несущие материальные точки с массами M и m , считаются невесомыми.

В качестве обобщенных координат системы используем углы отклонения стержней от горизонтального положения φ_1 и φ_2 .

Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_k} + Q_k, \quad k = 1, 2 \quad (1.1)$$

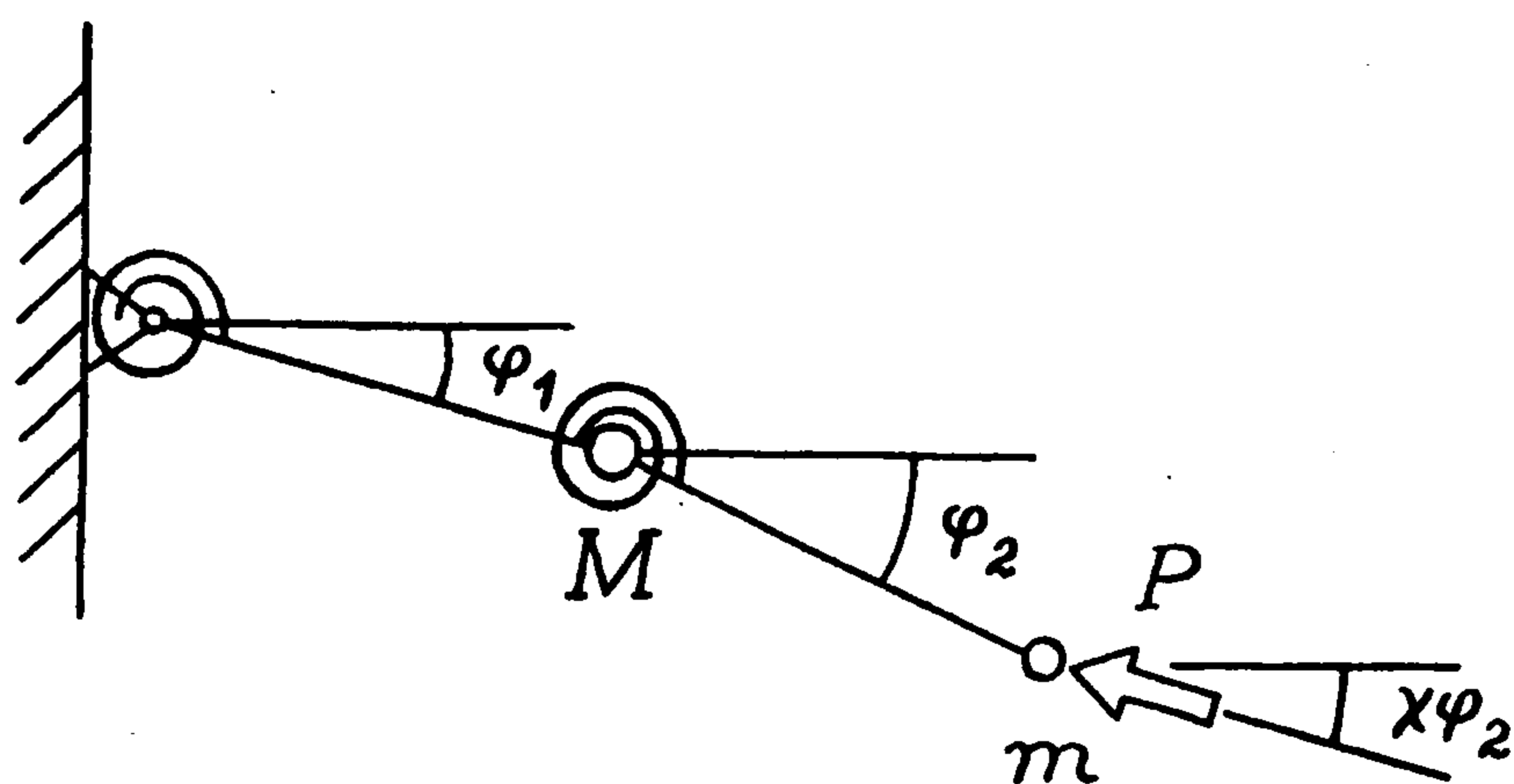
$$T = l^2 \{ (m + M) \dot{\varphi}_1^2 + m \dot{\varphi}_2 [2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2] \} / 2$$

$$U = U_g + U_e, \quad U_g = gl \{ (m + M) \sin \varphi_1 + m \sin \varphi_2 \}$$

$$U_e = c \{ \varphi_1^2 (1 + \delta \varphi_1^2) + (\varphi_1 - \varphi_2)^2 [1 + \delta (\varphi_1 - \varphi_2)^2] \} / 2$$

$$\Phi = b [\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2] / 2$$

где T – кинетическая энергия системы, U – потенциальная энергия, которая складывается из гравитационной энергии U_g и энергии упругих деформаций пружин в шарнирах U_e (c – коэффициент жесткости пружин, δ – параметр, определяющий нелинейность упругих свойств пружин, g – ускорение свободного падения), Φ – диссипативная функция, характеризующая рассеяние энергии в шарнирах (b – коэффи-



Фиг. 1

циент диссипации), Q_1 и Q_2 – обобщенные силы, порождаемые неконсервативной следящей силой P .

Угол, образуемый линией действия неконсервативной силы P с горизонталью, пропорционален с коэффициентом χ углу отклонения второго стержня ($0 < \chi \leq 1$). Следящие силы такого типа рассматривались, например, в [11].

Выражения для обобщенных сил найдем, вычислив виртуальную работу силы P

$$\delta A = (\mathbf{P}, \delta \mathbf{r}_m) = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2; \quad Q_k = \left(\mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \varphi_k} \right)$$

После преобразований получим

$$Q_1 = -|\mathbf{P}| \sin(\chi \varphi_2 - \varphi_1), \quad Q_2 = -|\mathbf{P}| \sin(\chi - 1) \varphi_2$$

В качестве независимой переменной удобно взять безразмерное время $\tau = t / l(c/m)^{1/2}$. Это позволяет переписать уравнения Лагранжа (1.1) следующим образом:

$$(1 + \mu) \ddot{\varphi}_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \beta(2\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + 2\varphi_1 - \varphi_2 + 2\delta[\dot{\varphi}_1^3 + (\varphi_1 - \varphi_2)^3] + \kappa(1 + \mu) \cos \varphi_1 + p \sin(\chi \varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad (1.2)$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \beta(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - (\varphi_1 - \varphi_2)[1 + 2\delta(\varphi_1 - \varphi_2)^2] + \kappa \cos \varphi_2 + p \sin(\chi - 1) \varphi_2 = 0$$

$$(\mu = M/m, \quad \kappa = l g m / c, \quad \beta = b / l(m c)^{1/2}, \quad p = |\mathbf{P}| l / c)$$

Точки в (1.2) и далее означают производные по безразмерному времени τ .

Замечание. Обычно системой Циглера называют более простую механическую систему, получающуюся из рассматриваемой при $\chi = 1$, $\delta = \kappa = 0$ [7–9].

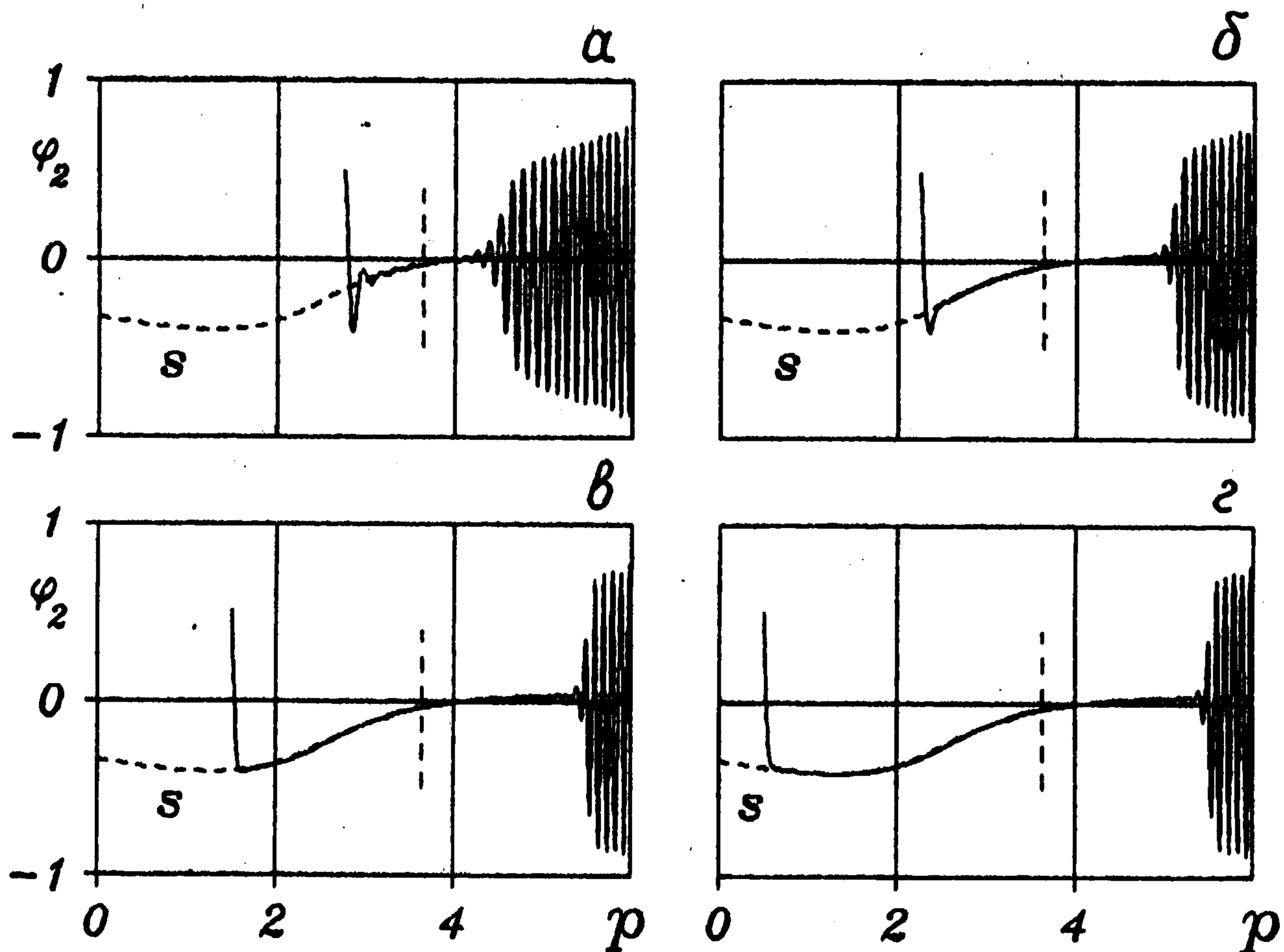
2. Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера. При фиксированном значении безразмерной следящей силы p система (1.2) допускает семейство стационарных решений

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 \equiv 0 \quad (2.1)$$

$$\varphi_1 \equiv \varphi_{10}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p), \quad \varphi_2 \equiv \varphi_{20}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p)$$

переходящих при $\kappa \rightarrow 0$ в тривиальное решение $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$.

При условии $p \leq p_{cr}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi)$ решения (2.1) асимптотически устойчивы; области притяжения этих решений в фазовом пространстве системы обозначим $\mathcal{D}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p)$.



Фиг. 2

В пространстве параметров $(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi)$ можно выделить области S_1 и S_2 со следующими свойствами: если параметры принадлежат области S_1 , то при $p = p_{cr}$ один из корней характеристического уравнения линеаризованной в окрестности стационарного решения (2.1) системы (1.2) равен нулю; если параметры принадлежат области S_2 , то при $p = p_{cr}$ пара корней характеристического уравнения лежит на мнимой оси.

Рассмотрим систему Циглера с параметрами из S_2 , в которой значение следящей силы медленно увеличивается:

$$p = p_i + \epsilon t, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad 0 \leq p_i < p_{cr}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi) \quad (2.2)$$

В этом случае фазовые траектории системы (1.2), соответствующие решениям с начальными условиями

$$(\dot{\varphi}_k(0), \varphi_k(0)) \in \mathcal{D}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p_i)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^2 \dot{\varphi}_k^2(0) + (\varphi_k(0) - \varphi_{k0}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p_i))^2 \right\}^{1/2} \sim 1$$

после завершения переходного процесса будут оставаться в $O(\epsilon)$ -окрестности стационарного решения (2.1) мгновенной системы (системы с фиксированным значением параметра p , равным его текущему значению), пока следящая сила не достигнет некоторого значения p_0 , зависящего от p_i и превосходящего p_{cr} на величину порядка 1, после чего происходит срыв со стационарного решения – быстрое развитие колебаний [2–6]. Таким образом, потеря устойчивости "запаздывает" – длительное время ($\sim \epsilon^{-1}$) фазовые траектории не покидают малой окрестности неустойчивого решения.

Численное интегрирование уравнений (1.2) подтверждает существование запаздывания потери устойчивости при медленном увеличении следящей силы.

В качестве примера на фиг. 2 показано, как от текущего значения следящей силы зависит поведение одной из обобщенных координат системы Циглера с параметрами $\kappa = 0,1$, $\beta = 30,0$, $\delta = 1,5$, $\mu = 1,0$, $\chi = 0,8$ (отметим, что при $\epsilon \neq 0$ значение следящей силы

можно использовать в качестве "медленного времени" в системе (1.2)). Расчеты были проведены для следующих начальных значений следящей силы: 2,75, 2,25, 1,5, 0,5 (фиг. 2,а-г). Во всех случаях параметр $\varepsilon = 10^{-3}$. Кривая S на фиг. 2 – значения φ_2 в стационарном решении (2.1) мгновенной системы; вертикальной штриховой линией отмечено критическое значение следящей силы $p_{cr} = 3,636$, при котором происходит потеря устойчивости стационарного решения (2.1) и рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова – Хопфа).

Результаты расчетов, представленные на фиг. 2, позволяют сделать следующий вывод: чем дальше фазовая траектория находится в окрестности устойчивого стационарного решения, тем дольше она будет оставаться в окрестности неустойчивого решения. Однако при некотором значении следящей силы ($\approx 5,5$) развитие колебаний происходит независимо от длительности пребывания фазовой траектории в окрестности устойчивого решения.

В системах с параметрами из S_1 запаздывание потери устойчивости отсутствует. Далее такие системы не рассматриваются.

3. Функция входа-выхода. Моментом срыва будет называть момент времени τ , в который фазовая траектория впервые покидает ε^σ -окрестность неустойчивого стационарного решения мгновенной системы ($0 < \sigma < 1$).

Функция входа-выхода $\Pi(\cdot)$ связывает значение следящей силы при $\tau = 0$ и ее предельное (при $\varepsilon \rightarrow 0$) значение в момент срыва фазовой траектории со стационарного решения для большинства начальных условий $(\dot{\varphi}_k(0), \varphi_k(0)) \in \mathcal{D}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p_i)$ таких, что

$$\left\{ \sum_{k=1}^2 \dot{\varphi}_k^2(0) + (\varphi_k(0) - \varphi_{k0}(\kappa, \beta, \delta, \mu, \chi, p_i))^2 \right\}^{1/2} > \varepsilon^\sigma$$

Следует отметить, что данное предельное значение не зависит от σ .

Для построения функции входа-выхода необходимо изучить некоторые свойства корней характеристического уравнения системы (1.2), линеаризованной в окрестности стационарного решения семейства (2.1) при комплексных значениях параметра p [4, 5].

Пусть $\lambda_1(p)$ – один из двух корней характеристического уравнения, лежащих при $p = p_{cr}$ на мнимой оси. Будем считать, что $\text{Im}\lambda_1(p_{cr}) < 0$.

Введем комплексную фазу

$$\Psi(p) = \int_{p_{cr}}^p \lambda_1(p') dp' \quad (3.1)$$

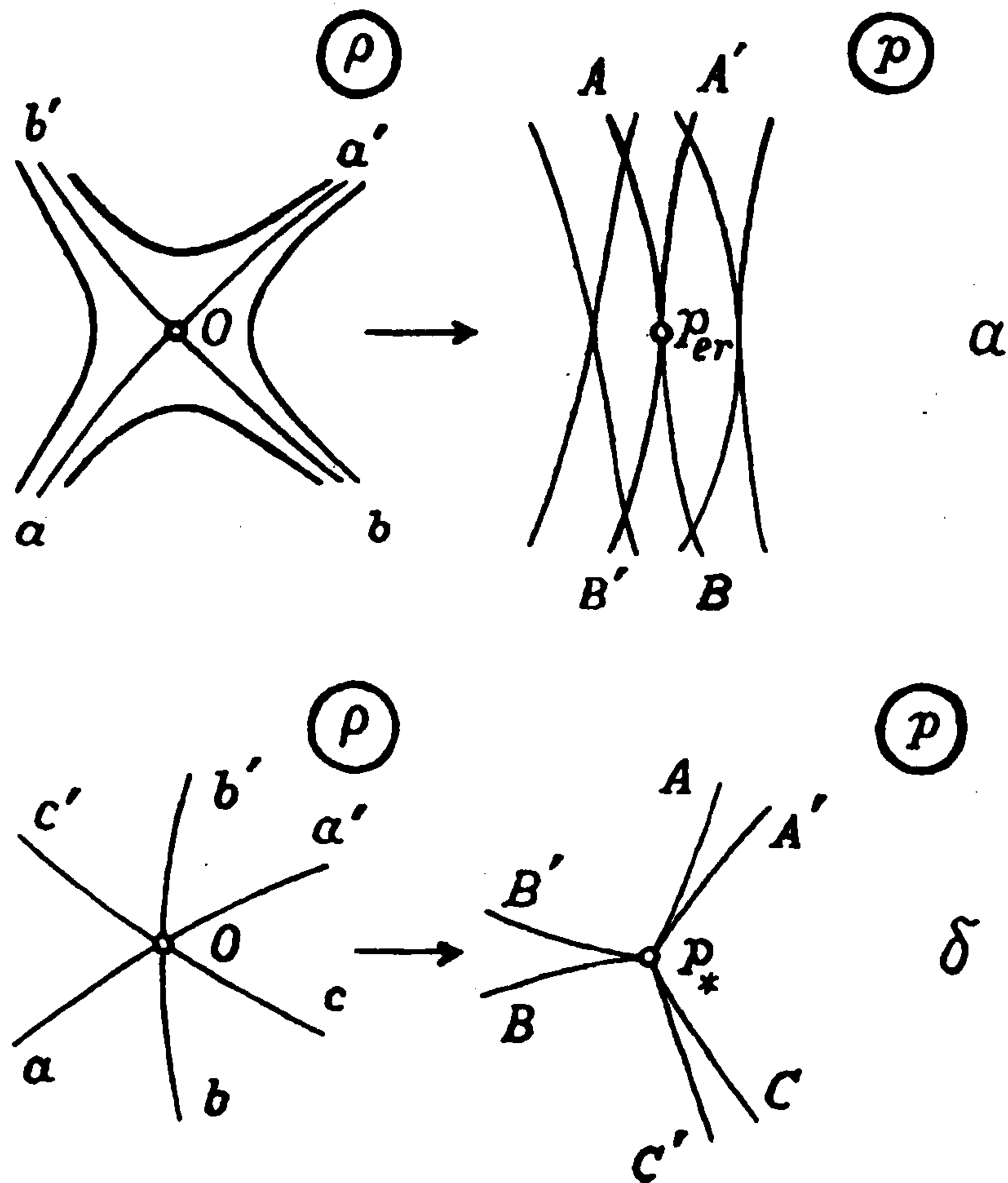
В общем случае фаза $\Psi(p)$ – многозначная функция комплексного переменного. Типичными точками ветвления этой функции будут точки, в которых корень λ_1 равен нулю или является кратным. Далее рассматривается ветвь функции $\Psi(p)$, полученная аналитическим продолжением с действительной оси.

Принимая во внимание положение линий уровня $\text{Re}\Psi(p) = \text{const}$ на плоскости комплексных значений p , представим интервал $I = [0, p_{cr}]$ в виде объединения интервала I_0 , примыкающего к p_{cr} и состоящего из точек, лежащих на дважды пересекающих действительную ось (справа и слева от p_{cr}) линиях уровня функции $\text{Re}\Psi(p)$, и интервала $I_1 = N_0$.

На интервале I_0 функция входа-выхода ставит в соответствие точке p точку $\Pi(p)$, лежащую на действительной оси справа от p_{cr} и удовлетворяющую условию

$$\text{Re}\Psi(p) = \text{Re}\Psi(\Pi(p)) \quad (3.2)$$

Если при $\varepsilon \neq 0$ в системе (1.2) в качестве независимой переменной взять значение следящей силы, то с помощью аналитического продолжения вдоль пути, близкого к соединяющей точки p и $\Pi(p)$ дуге линии уровня функции $\text{Re}\Psi(p)$, можно доказать, что



Фиг. 3

Собственные числа $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$ являются корнями характеристического уравнения $\det(\Lambda_0 - \lambda E) = 0$ и имеют в окрестности p_{er} вид

$$\lambda_{1,2}(p) = \lambda_0 \pm \sqrt{a(p - p_{er})} + O(|p - p_{er}|)$$

При обходе p_{er} по замкнутому контуру $\lambda_1(p)$ и $\lambda_2(p)$ переходят друг в друга.

Для упрощения последующих вычислений перейдем в (4.1) к новой независимой переменной $\xi = \lambda_0 \zeta$. После такой замены кратное характеристическое число матрицы $H(p_{er})$ будет равно 1.

Введем комплексную фазу

$$\Psi(p) = \int_{p_{er}}^p \lambda_1(p') dp' = (p - p_{er}) + \frac{2}{3} \alpha (p - p_{er})^{3/2} + O(|p - p_{er}|^2)$$

где $\alpha = \sqrt{a/\lambda_0}$.

Пусть $\tilde{\Psi}(\rho) = \Psi(p_{er} + \rho^2)$, $\rho \in \mathbb{C}^1$. При преобразовании $p = p_{er} + \rho^2$ линии уровня функции $\text{Re } \tilde{\Psi}(\rho)$ переходят в линии уровня функции $\text{Re } \Psi(p)$.

Условие $\text{Re } \tilde{\Psi}(\rho) = \text{const}$ можно переписать следующим образом:

$$x^2 - y^2 + \frac{2}{3} [\alpha_1 (x^3 - 3xy^2) + \alpha_2 (y^3 - 3x^2y)] + O(x^4 + y^4) = \text{const}$$

$$x = \text{Re } \rho, \quad y = \text{Im } \rho, \quad \alpha_1 = \text{Re } \alpha, \quad \alpha_2 = \text{Im } \alpha$$

Ниже предполагается, что $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$.

Разрешив $\text{Re } \tilde{\Psi}(x + iy) = 0$ относительно y , получим уравнения проходящих через точку O линий уровня aa' и bb' (фиг. 3,а)

$$y = \pm x \mp \frac{2}{3} (\alpha_1 \pm \alpha_2) x^2 + O(x^3)$$

Пусть $\alpha_1 > |\alpha_2|$. При преобразовании $p = p_{er} + \rho^2$ линии aa' и bb' переходят в линии AA' и BB' с точкой возврата p_{er} (фиг. 3,а). Линии уровня $\operatorname{Re} \tilde{\Psi}(\rho) = \operatorname{const}$, лежащие в секторе aOb , переходят в линии уровня $\operatorname{Re} \Psi(p) = \operatorname{const}$, лежащие в секторе $Ap_{er}B$. Линии уровня из секторов aOb' и bOa' переходят в линии уровня, лежащие в секторах $Ap_{er}B'$ и $Bp_{er}A'$ и пересекающих лучи $p_{er}A'$ и $p_{er}B'$ соответственно. Линии уровня из сектора $a'Ob'$ переходят в линии уровня в секторе $A'p_{er}B'$, пересекающие лучи $p_{er}A$ и $p_{er}B$.

При другом соотношении между α_1 и α_2 расположение линий уровня функции $\operatorname{Re} \Psi(p)$ в окрестности точки p_{er} либо совпадает с изображенным на фиг. 3,а, либо является его зеркальным отражением относительно вертикальной оси.

5. Поведение линий уровня в окрестности точки ветвления стационарного решения. Пусть при $p = p_*$ собственное число $\lambda_1 = 0$. С помощью линейной замены переменных $w = W(z - z_0(p))$, где W – некоторая неособая матрица с постоянными коэффициентами, в сочетании с заменой независимой переменной, аналогичной использованной в разд. 4, преобразуем систему (4.1) в систему

$$\frac{dw_1}{d\xi} = w_1^2 - (p - p_*) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} w_i w_j + O(|p - p_*| |w|, |w|^3) \quad (5.1)$$

$$\frac{dw_k}{d\xi} = \sum_{j=2}^n b_{kj} w_j + O(|p - p_*|, |w|^2), \quad k = \overline{2, n}$$

где $(n-1) \times (n-1)$ -матрица $\|b_{kj}\|$ является невырожденной.

Стационарное решение $w_0(p)$ системы (5.1) в окрестности p_* имеет вид

$$w_{10}(p) = \sqrt{p - p_*} + O(|p - p_*|)$$

$$w_{k0}(p) = c_k(p - p_*) + O(|p - p_*|^{3/2}), \quad k = \overline{2, n}$$

Таким образом, для функции $w_0(p)$ точка $p = p_*$ – точка ветвления второго порядка.

Ветвление стационарного решения приводит к ветвлению при $p = p_*$ собственных чисел системы (5.1), линеаризованной в окрестности этого решения:

$$\lambda_1(p) = 2\sqrt{p - p_*} + \beta(p - p_*) + O(|p - p_*|^{3/2})$$

$$\lambda_k(p) = \lambda_k(p_*) + \gamma_k \sqrt{p - p_*} + O(|p - p_*|), \quad k = \overline{2, n}$$

Рассмотрим поведение на комплексной плоскости линий уровня функции $\operatorname{Re} \Psi(p)$, где

$$\Psi(p) = \int_{p_*}^p \lambda_1(p') dp' = \frac{4}{3}(p - p_*)^{3/2} + \frac{\beta}{2}(p - p_*)^2 + O(|p - p_*|^{5/2})$$

Пусть $\tilde{\Psi}(\rho) = \Psi(p_* + \rho^2)$, $\tau \in \mathbb{C}^1$. Условие $\operatorname{Re} \tilde{\Psi}(\rho) = \operatorname{const}$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{8}{3}(x^3 - 3y^2x) + [\beta_1(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 4\beta_2(xy^3 - x^3y)] + (|x|^5 + |y|^5) = \operatorname{const}$$

$$x = \operatorname{Re} \rho, \quad y = \operatorname{Im} \rho, \quad \beta_1 = \operatorname{Re} \beta, \quad \beta_2 = \operatorname{Im} \beta$$

Линии уровня $\operatorname{Re} \tilde{\Psi} = 0$ называют линиями Стокса [13]. Разрешив $\operatorname{Re} \tilde{\Psi}(x + iy) = 0$ относительно x , получим уравнения этих линий

$$x = \beta_1 y^2 / 8 + O(|y|^3)$$

$$x = \pm \sqrt{3}y + \frac{1}{2}(\beta_1 \pm \sqrt{3}\beta_2)y^2 + O(|y|^3)$$

Пусть $\beta_1 > \sqrt{3}|\beta_2|$. При преобразовании $p = p_* + \rho^2$ линии Стокса $Oa, Ob, Oc, Oa', Ob', Oc'$ функции $\tilde{\Psi}(\rho)$ переходят в линии Стокса $p_*A, p_*B, p_*C, p_*A', p_*B', p_*C'$ функции $\Psi(p)$ (фиг. 3,б). Линии уровня $\text{Re } \tilde{\Psi}(\rho) = \text{const}$, лежащие в секторе aOc' , переходят в линии уровня $\text{Re } \Psi(p) = \text{const}$, лежащие в секторе Ap_*C' и пересекающие линии Стокса p_*C и p_*A' . Линии уровня из секторов $aOb, bOc, a'Ob', b'Oc'$ переходят в линии уровня, лежащие в секторах $Ap_*B, Bp_*C, A'p_*B', B'p_*C'$ и пересекающие линии Стокса p_*B', p_*C', p_*A, p_*B соответственно. Линии уровня из сектора cOa' переходят в линии уровня в секторе Cp_*A' , не пересекающие линий Стокса.

Положение линий уровня функции $\text{Re } \Psi(p)$ в окрестности точки $p = p_*$ при другом соотношении между β_1 и β_2 совпадает с изображенным на фиг. 3,б при повороте на угол $2\pi k/3$, где $k = 0$ или $k = \pm 1$.

6. Примеры функций входа-выхода для системы Циглера.

Пример 1. Когда система Циглера имеет достаточно жесткие шарниры, трение в которых также достаточно велико, параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\kappa \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll \beta^{-1} \ll 1$$

Получим приближенные формулы для функции входа-выхода такой системы.

Полагая для определенности $\kappa = \kappa_0 \varepsilon$, перепишем уравнения движения (1.2) в квазилинейной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \Xi(p)\mathbf{x} + \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (6.1)$$

$$\mathbf{x} = \|\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2\|^T, \quad \Sigma_1 = O(\varepsilon), \quad \Sigma_2 = O(|\mathbf{x}|^2)$$

$$\Xi(p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix}$$

$$h_{31} = -(3-p)/\mu, \quad h_{32} = (2-p)/\mu, \quad h_{33} = -3\beta/\mu, \quad h_{34} = 2\beta/\mu$$

$$h_{41} = 1 - h_{31}, \quad h_{42} = -1 + p(1-\chi) - h_{32}$$

$$h_{43} = \beta - h_{33}, \quad h_{44} = -1 - h_{34}$$

При $\varepsilon = 0$ система (6.1) всегда допускает тривиальное стационарное решение $\mathbf{x} \equiv 0$. Это означает, что изучаемый случай не является случаем общего положения [4].

Характеристическое уравнение системы (6.1), линеаризованной в окрестности решения $\mathbf{x} \equiv 0$ ($\varepsilon = 0$), имеет вид

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (6.2)$$

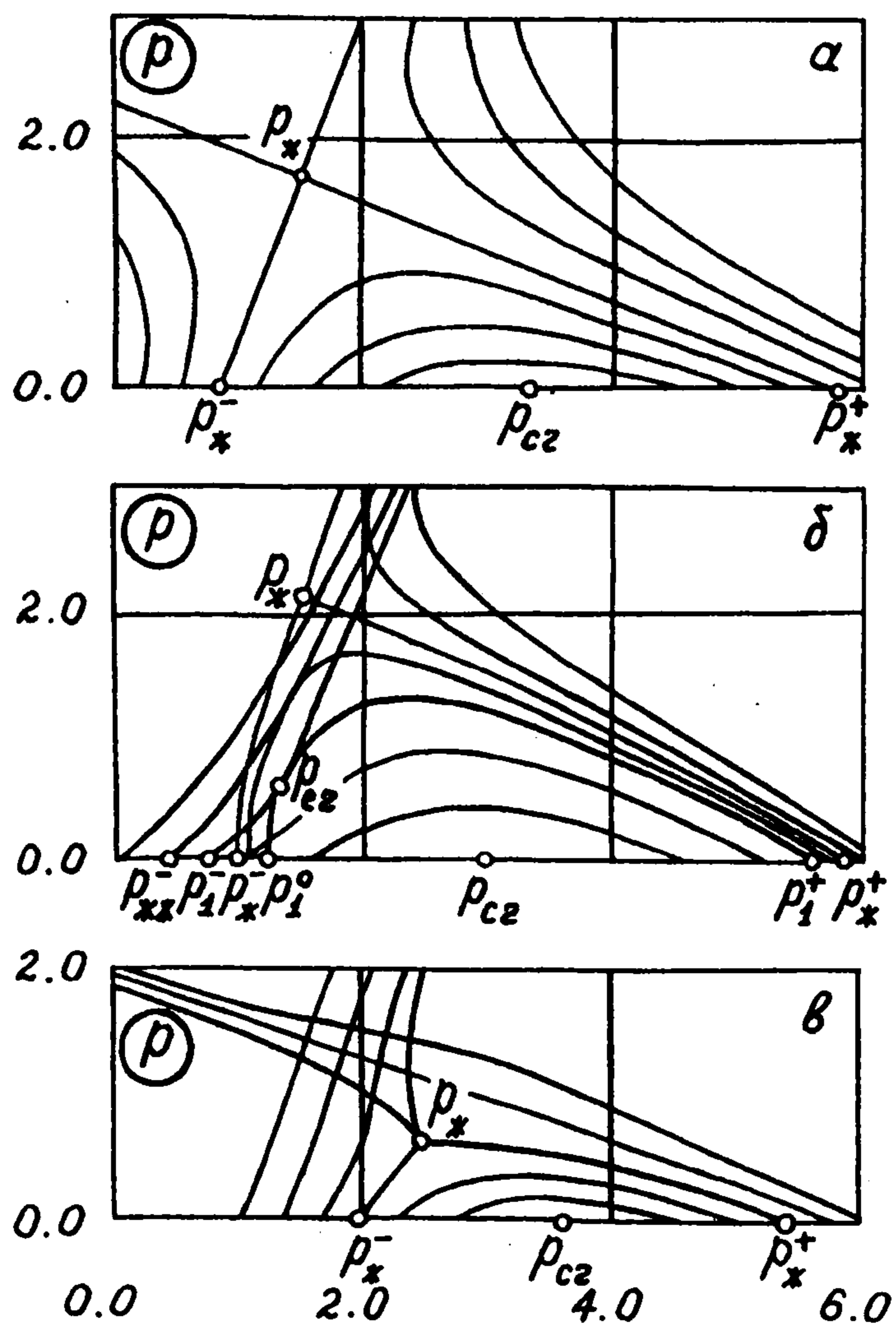
$$a_0 = \mu, \quad a_1 = (5+\mu)\beta, \quad a_2 = \beta^2 + 5 + \mu - (\mu\chi_1 + 2)p$$

$$a_3 = (2 - 3\chi_1 p)\beta, \quad a_4 = 1 - (3-p)\chi_1 p, \quad \chi_1 = 1 - \chi$$

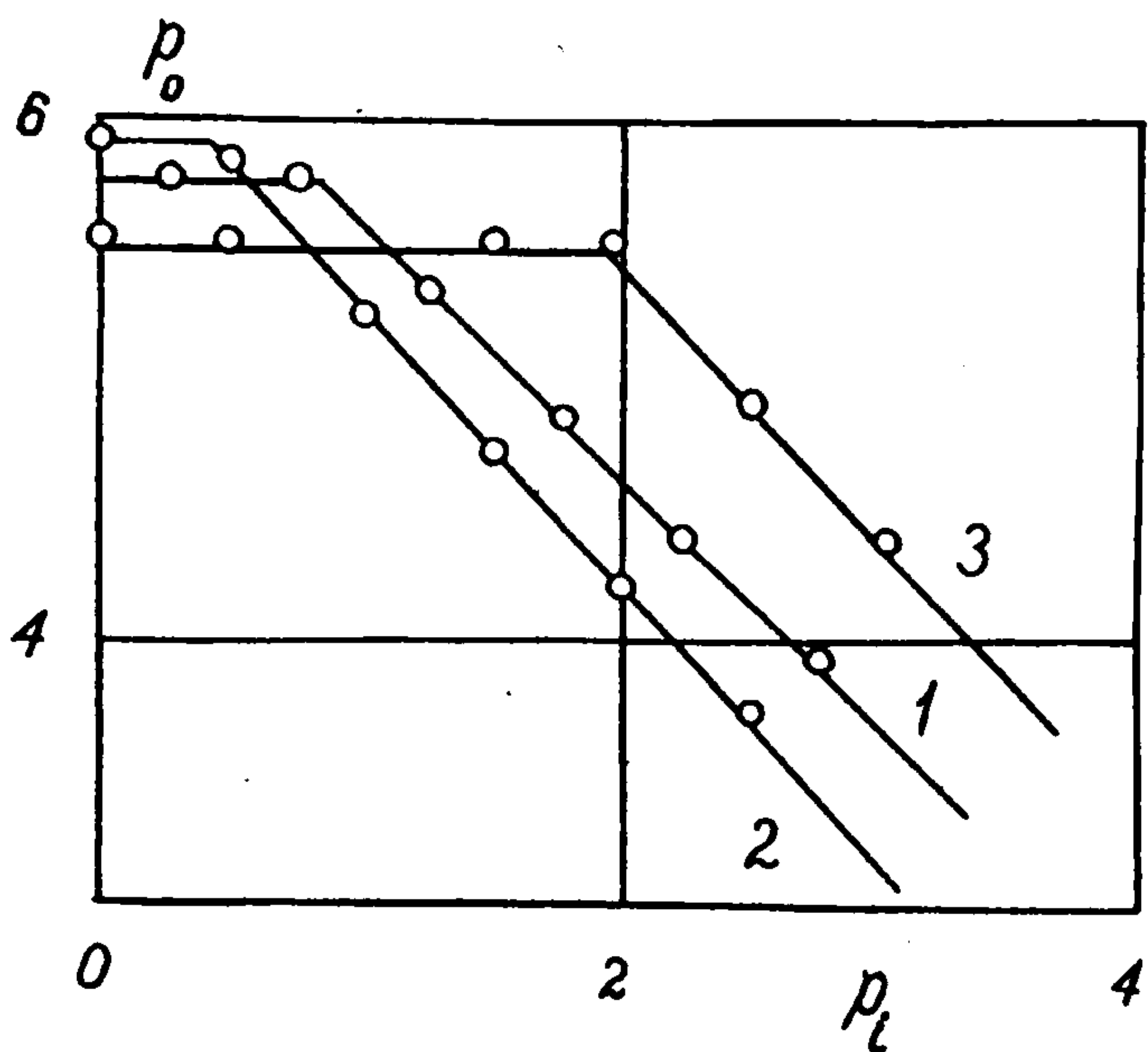
Справедливы следующие асимптотические формулы для корней $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ уравнения (6.2):

$$\lambda_{1,2} = -\beta^{-1} \left[\left(1 - \frac{3}{2}\chi_1 p \right) \pm i \sqrt{\left(1 - \frac{9}{4}\chi_1 \right) \chi_1 p} \right] + O(\beta^{-2})$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{\beta}{2\mu} \left[-(5+\mu) \pm \sqrt{25 + 6\mu + \mu^2} \right] + O(1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

При $\chi \leq 5/9$ ($\chi_1 \geq 4/9$) потеря устойчивости обусловлена прохождением одного из корней уравнения (6.2) из левой полуплоскости в правую через нуль и запаздывания потери устойчивости не наблюдается. Поэтому далее предполагается, что χ принадлежит интервалу $(5/9, 1)$ ($\chi_1 \in (0, 4/9)$).

Критическое значение следящей силы найдем из условия $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$:

$$p_{cr}(\beta, \mu, \chi) = 2/3\chi_1 + O(\beta^{-1})$$

Используя в (3.1) асимптотические формулы для $\lambda_1(p)$ и p_{cr} , получим приближенное выражение для комплексной фазы

$$\Psi(p) = \beta^{-1} \left[\frac{1}{3\chi_1} - p + \frac{3}{4}\chi_1 p^2 - \frac{i}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{9}{4}\chi_1\right)\chi_1 \left(p^2 - \frac{4}{9\chi_1^2}\right)} \right] \quad (6.3)$$

Погрешность формулы (6.3) не превосходит $O(\beta^{-2})$.

Соотношение $\text{Re}\Psi(p) = \text{const}$ определяет на комплексной плоскости семейство гипербол. Общее представление о поведении линий уровня $\text{Re}\Psi(p) = \text{const}$ дает фиг. 4,а, соответствующая случаю $\chi = 0,8$.

Отметим, что из-за отсутствия ветвления стационарного решения в точке обращения λ_1 в нуль карта линий уровня существенно отличается от изображенной на фиг. 3,б.

Точка

$$p_* = \frac{3}{2} + i\sqrt{\frac{1}{\chi_1} - \frac{9}{4}}$$

в которой $\lambda_1 = 0$, для функции $\text{Re}\Psi(p)$ седловая. Линии Стокса $\text{Re}[\Psi(p) - \Psi(p_*)] = 0$ пересекает действительную ось в точках

$$p_*^\pm(\beta, \mu, \chi) = \frac{2}{3\chi_1} \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{\chi_1} \left(\frac{1}{\chi_1} - \frac{9}{4} \right)} + O(\beta^{-1})$$

Описанное в разд. 3 разбиение интервала $I = [0, p_{cr})$ состоит из интервалов $I_0 = (p_*, p_{cr})$ и $I_1 = [0, p_*]$.

На интервале I_0 функция входа-выхода с погрешностью $O(\beta^{-1})$ имеет вид $\Pi(p) = 2p_{cr} - p$.

На интервале I_1 функция входа-выхода $\Pi(p) \equiv p_*$. Точка p_* является барьерной, ограничивающей пребывание фазовых траекторий системы (1.2) в окрестности неустойчивого положения равновесия. У решений с начальным значением следящей силы в интервале I_1 наблюдается наиболее длительное запаздывание потери устойчивости

$$\Delta(\chi) = p_*^+ - p_{cr} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{1-\chi} \left(\frac{1}{1-\chi} - \frac{9}{4} \right)}$$

Отметим, что $\Delta(\chi) \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow 5/9$; $\Delta(\chi) \rightarrow \infty$ при $\chi \rightarrow 1$.

На фиг. 5 кривая 1 изображает построенный по выписанным приближенным формулам график функции $\Pi(\cdot)$ для системы Циглера с параметрами $\kappa_0 = 2,0$, $\beta = 30,0$, $\delta = 1,5$, $\mu = 1,0$, $\chi = 0,8$. Светлыми точками, расположенными рядом с этой кривой, представлены результаты, полученные с помощью численного интегрирования уравнений движения. В проведенных расчетах $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varphi_1(p_i) = \varphi_2(p_i) = 0,5$, $\dot{\varphi}_1(p_i) = \dot{\varphi}_2(p_i) = 0$. В качестве p_0 взято значение следящей силы при первом (после завершения начального переходного процесса) пересечении траекторией системы (1.2) сферы радиуса $R = 0,33$ с центром в точке фазового пространства, соответствующей стационарному решению мгновенной системы. Видно, что результаты расчетов подтверждают оценку длительности запаздывания потери устойчивости, получаемую с помощью функции входа-выхода.

Пример 2. Рассмотрим снова систему с достаточно жесткими шарнирами ($\kappa = \kappa_0\varepsilon$). Пусть $\kappa_0 = 0,5$, $\beta = 3,25$, $\delta = 1,5$, $\mu = 1,0$, $\chi = 0,85$. В этом случае тривиальное решение $x = 0$ уравнений движения в форме (6.1) при $\varepsilon = 0$ устойчиво при $p \leq p_{cr} = 3,06$.

Линии уровня функции $\text{Re}\Psi(p)$, построенные с помощью численного интегрирования уравнений (3.3), изображены на фиг. 4,б.

Как и в примере 1, точка $p_* = 1,5 + 2,102i$, в которой $\lambda_1 = 0$, будет регулярной точкой функции $\Psi(p)$. Линии Стокса $\text{Re}[\Psi(p) - \Psi(p_*)] = 0$ пересекают действительную ось в точках $p_*^- = 1,013$ и $p_*^+ = 5,857$.

Ветвление функции $\Psi(p)$ происходит в точке $p_{er} = 1,306 + 0,616i$, в которой λ_1 – кратный корень характеристического уравнения (разд. 4). Линии уровня $\text{Re}[\Psi(p) - \Psi(p_{er})] = 0$ пересекают действительную ось в точках $p_1^- = 0,721$, $p_1^0 = 1,214$ и $p_1^+ = 5,622$.

Строгое решение задачи о построении функции входа-выхода $\Pi(\cdot)$ при наличии у характеристического уравнения линеаризованной системы кратных корней отсутствует. Установим возможный вид функции $\Pi(\cdot)$, используя предположение [6] о свойствах системы в такой ситуации. Это предположение применительно к системе (6.1) состоит в том, что при изменении следящей силы в интервале (p_{**}^-, p_*^+) существует близкая к тождественной замена переменных $x \rightarrow x_*$, переводящая (6.1) в систему

$$\dot{x}_* = [\Xi(p) + O(\varepsilon)]x_* + O(|x_*|^2) \quad (6.4)$$

допускающую при $\varepsilon \neq 0$ тривиальное решение $x_* \equiv 0$. Величина $p_{**}^- = 0,506$ удовлетворяет условию

$$\text{Re} \int_{p_{**}^-}^{p_*^+} \lambda_1(p') dp' = 0$$

В области устойчивости скорость приближения типичной фазовой траектории системы (6.4) к началу координат определяется корнями $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения (6.2) (можно проверить, что $\lambda_4(p) < \lambda_3(p) < \text{Re}\lambda_{1,2}(p)$). Справедлива следующая оценка, характеризующая поведение типичной траектории:

$$C_1 \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \text{Re} \int_{p_i}^p \lambda_1(p') dp' \right] \leq \frac{|x_*(p)|}{|x_*(p_i)|} \leq C_2 \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \text{Re} \int_{p_i}^p \lambda_1(p') dp' \right] \quad (6.5)$$

при условии $0 < |x_*(p_i)| \leq C_3$ (C_1, C_2, C_3 – положительные постоянные).

Оценка (6.5) нарушается для решений, скорость приближения которых к началу координат определяется корнями $\lambda_3(p)$, $\lambda_4(p)$. Доля начальных условий, порождающих такие решения, не превосходит $O(\varepsilon^\eta)$, где η – произвольное положительное число.

Из (6.5) вытекает формула для функции входа–выхода $\Pi(\cdot)$ при $p_i \in I'_0 = (p_{**}^-, p_{cr})$:

$$\operatorname{Re} \int_{p_i}^{\Pi(p_i)} \lambda_1(p') dp' = 0, \quad \Pi(p_i) > p_{cr} \quad (6.6)$$

Действительно, при выполнении (6.5) фазовая траектория, впервые вошедшая в ε -окрестность начала координат при $p = p_i + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$, выйдет из этой окрестности при $p = \Pi(p_i) + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$.

Формулу (6.6) можно преобразовать к виду (3.2).

На интервале $I'_1 = [0, p_{**}^-]$ функция $\Pi(\cdot)$ системы (6.1) принимает постоянное значение p_*^+ .

Результаты работы [4] позволяют обосновать приведенное определение функции входа–выхода только на интервале $I_0 = (p_1^-, p_{cr}) \subset I'_0$. Отметим, что точка $p_1^- \in I'_0$, связанная с точкой p_{cr} дугой линии уровня функции $\operatorname{Re}\Psi(p)$ не является какой-то особенной точкой функции $\Pi(\cdot)$, заданной соотношением (6.6).

На фиг. 5 кривая 2 изображает график предполагаемой функции входа–выхода для изучаемой системы. Как и в предыдущем примере, светлыми точками представлены результаты численного исследования запаздывания потери устойчивости ($\varepsilon = 10^{-2}$).

Пример 3. Рассмотрим систему Циглера с параметрами, приведенными в разд. 2. Линии уровня функции $\operatorname{Re}\Psi(p)$ данной системы изображены на фиг. 4,в.

Точка $p_* = 2,457 + 0,621i$, в которой $\lambda_1 = 0$, является для функции $\operatorname{Re}\Psi(p)$ точкой ветвления, описанной в разд. 5. Линии Стокса $\operatorname{Re}[\Psi(p) - \Psi(p_*)] = 0$ пересекают действительную ось в точках $p_*^- = 1,968$ и $p_*^+ = 5,491$.

Функция входа–выхода в рассматриваемом случае на интервале $I_0 = (p_*^-, p_{cr})$ ставит в соответствие точке p точку $\Pi(p)$ из интервала (p_{cr}, p_*^+) , соединенную с p дугой линии уровня функции $\operatorname{Re}\Psi(p)$. На интервале $I_1 = [0, p_*^-)$ функция входа–выхода $\Pi(p) = p_*^+$ [5].

График функции входа–выхода представлен на фиг. 5 (кривая 3). Светлые точки – результаты численного исследования запаздывания потери устойчивости ($\varepsilon = 10^{-3}$).

Отметим, что полная карта линий уровня в окрестности точки ветвления для построения функции входа–выхода не требуется. В обозначениях разд. 5 линии Стокса, пересекающие действительную ось в точках p_*^- и p_*^+ , будут линиями p_*B' и p_*C' соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94–01–00512, 95–01–01092А), Международной ассоциации развития сотрудничества ученых СНГ и ЕС (INTAS) (93–339) и Международного научного фонда (МНН000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
2. Нейштадт А.И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 300–301.
3. Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067.
4. Нейштадт А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
5. Neishtadt A.I. On calculation of stability loss delay time for dynamical bifurcations // Proc. 11th Intern. Congress of Math. Phys. Paris: Intern. Press, 1995. P. 280–287.

6. *Neishtadt A.I., Simó C., Treschev D.V.* On stability loss delay for a periodic trajectory // *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Boston: Birkhäuser. 1996. P. 253–278.
7. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // *Ing.-Arch.* 1952. V. 20. № 1. S. 49–56.
8. *Roorda J., Nemat-Nasser S.* An energy method for stability analysis of nonlinear nonconservative systems // *AIAA Journal*. 1967. V. 5. № 7. P. 1262–1268.
9. *Баничук Н.В., Братусь А.С., Мышкис А.Д.* Об эффектах стабилизации и дестабилизации в неконсервативных системах // *ПММ*. 1989. Т. 53. № 2. С. 206–214.
10. *Фейгин М.И.* К теории движения неустойчивого на прямом курсе судна // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1982. № 1. С. 66–72.
11. *Young T.H., Chen F.Y.* Post-flutter analysis of beams subjected to subtangential forces // *Intern. J. Non-Linear Mechanics*. 1993. V. 28. № 1. P. 29–41.
12. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1995