

5. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
6. Коул Д., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
7. Шифрин Э.Г. Исследование осесимметричных трансзвуковых течений при помощи специальной плоскости годографа // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 549–558.
8. Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
9. Никольский А.А. О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
10. Шифрин Э.Г. Некоторые свойства симметричного обтекания профиля с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 99–101.
11. Шифрин Э.Г. О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 158–162.
12. Рылов А.И. О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
13. Рылов А.И. О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–786.
14. Рылов А.И. О структуре дозвукового течения между несимметричным телом и отошедшей ударной волной // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 87–92.
15. Finn R.S., Gilbarg D. Three-dimensional subsonic flows, and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations // Acta math. 1957. V. 98. № 3/4. P. 265–296.

Новосибирск

Поступила в редакцию
26.VII.1995

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. С.Д. Алгазин, И.А. Кийко

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

На основе новой постановки задачи о флаттере [1] с использованием полученных ранее результатов [2, 3] предлагается алгоритм для изучения флаттера пластин произвольной формы в плане при произвольных однородных граничных условиях.

Исследования по панельному флаттеру пластин в подавляющем большинстве относятся к прямоугольным пластинам в частной постановке, когда вектор скорости потока параллелен одной из сторон (см. обзор [4]). Методом Бубнова–Галеркина в двучленном приближении был изучен [5] флаттер круглой и эллиптической пластин (в последней задаче вектор скорости потока параллелен большой оси эллипса). Таким образом, широкий класс практически важных задач выпал из рассмотрения. Ниже этот пробел восполняется.

1. Постановка задачи и дискретизация. Исследование устойчивости колебаний тонкой пластины произвольной формы в плане, которая в плоскости x, y занимает область G с границей ∂G и обдувается потоком газа, приводит к спектральной задаче [1] для амплитудного значения прогибов $\varphi = \varphi(x, y), (x, y) \in G$

$$D\Delta^2\varphi - \beta V q \text{grad} \varphi = \lambda\varphi; \quad D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2)), \quad \beta = kp_0 / c_0 \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{\partial G} = 0, \quad M\varphi|_{\partial G} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, h – ее толщина, $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ – вектор скорости газа, p_0, c_0 – давление и скорость звука в невозмущенном потоке, k – показатель политропы газа.

Собственное число λ связано с частотой колебаний соотношением

$$\lambda = -\rho h \omega^2 - \beta \omega \quad (1.3)$$

в котором ρ – плотность материала пластины.

Оператор M в (1.2) – это известный в теории пластин дифференциальный оператор, определяемый типом граничных условий. Методика решения спектральной задачи (1.1)–(1.3) описана для произвольного оператора M .

Колебания пластины будут устойчивыми или нет в зависимости от того, будет ли $\text{Re} \omega < 0$ или $\text{Re} \omega > 0$; если $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ – наименьшее по модулю собственное значение, то вследствие (1.3) выписанным неравенствам соответствуют $F(\alpha_1, \beta_1) > 0$ или $F(\alpha_1, \beta_1) < 0$, где $F(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 \beta_1^2 - \rho h \beta_1^2$. Поскольку $\alpha_1 = \alpha_1(V)$, $\beta_1 = \beta_1(V)$, уравнение $F(\alpha_1, \beta_1) = 0$ определяет нейтральную кривую и соответствующую ей критическую скорость флаттера. Речь идет, следовательно, о нахождении нулей функции $F(\alpha_1(V), \beta_1(V))$ при заданном направлении вектора скорости потока.

Обозначим через l характерный размер области G и введем безразмерные (со штрихами) координаты и параметры:

$$x = x'l, \quad y = y'l, \quad E = E'p_0, \quad h = h'l$$

$$\rho = \rho'p_0 / c_0^2, \quad \omega = \omega'c_0 / l, \quad V = V'c_0, \quad \varphi = \varphi'l$$

Подставив в (1.1)–(1.3), убеждаемся, что в безразмерной форме система сохраняет свой вид, если параметр β заменить на безразмерный параметр k . В дальнейшем изложении штрихи будем опускать.

Введем вместо декартовых координат x, y криволинейные координаты r, ϑ по формулам $x = u(r, \vartheta)$, $y = v(r, \vartheta)$; если выполнены условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}$$

то система координат r, ϑ ортогональна. Выберем теперь функции $u(r, \vartheta)$ и $v(r, \vartheta)$ таким образом, чтобы функция

$$\psi(\zeta) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta), \quad \zeta = r \exp(i\vartheta)$$

задавала конформное отображение круга $|\zeta| = r \leq 1$ на область G . Тогда в координатах (r, ϑ) уравнение (1.1) примет вид

$$D\Delta(|\psi'(\zeta)|^{-2} \Delta\varphi) - k((V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}(V_y u_r - v_r V_x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}) = \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi \quad (1.4)$$

$$\left(u_r = \text{Re} \left(\frac{\psi'(\zeta)\zeta}{r} \right), \quad v_r = \text{Im} \left(\frac{\psi'(\zeta)\zeta}{r} \right) \right)$$

граничные условия (1.2) преобразуются известным образом [3].

В дальнейшем изложении область G предполагается односвязной, а контур ∂G – кривой Ляпунова; это обеспечивает выполнение основной теоремы Римана и теоремы о соответствии границ [6].

Обозначим

$$f(r, \vartheta) = \Phi(r, \vartheta) + \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi$$

$$\Phi(r, \vartheta) = k \left[(V_x u_r + V_y v_r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (V_y u_r - V_x v_r) \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} \right]$$

и запишем уравнение (1.4) в виде

$$D\Delta(|\psi'(\zeta)|^{-2} \Delta\varphi) = \Phi(r, \vartheta) + \lambda |\psi'(\zeta)|^2 \varphi \quad (1.5)$$

Теперь очевидно, что дискретизация краевой задачи (1.5), (1.2) вполне аналогична описанной ранее [3] для бигармонического оператора.

Выберем в круге сетку, состоящую из m окружностей, радиусы которых – положительные корни многочлена Чебышева T_{2m} , а на каждой окружности введем равномерную сетку из $N = 2n + 1$ точек и обозначим ζ_j узлы этой сетки. Здесь и всюду далее $i, j = 1, 2, \dots, S$; $S = mN$. Перейдем [3] к интегральному уравнению и применим для функции $f(r, \vartheta)$ интерполяционную формулу К.И. Бабенко для функции двух переменных в круге [2]. В результате получим

$$\Phi_i - \frac{1}{D} \sum_j B_{ij} z_j^{-1} \Phi_j = \frac{\lambda}{D} \sum_j B_{ij} \Phi_j, \quad z_j = |\psi'(\zeta_j)|^2 \quad (1.6)$$

Здесь B – матрица дискретного оператора, обратного к бигармоническому с выписанными краевыми условиями.

Обозначим через $D^{(r)}$ и $D^{(\vartheta)}$ матрицы дифференцирования по r и ϑ , получающиеся дифференцированием интерполяционной формулы; тогда

$$\Phi_j = a_j \sum_l D_{jl}^{(r)} \Phi_l + r^{-1} b_j \sum_l D_{jl}^{(\vartheta)} \Phi_l$$

$$a_j = k(V_x u_r + V_y v_r)|_{\zeta=\zeta_j}, \quad b_j = k(V_y u_r - V_x v_r)|_{\zeta=\zeta_j}$$

Теперь из (1.6) получаем для вектора Φ длины S , компоненты которого – значения соответствующей функции в узлах сетки, задачу на собственные значения в матричной форме

$$\Phi = \lambda D^{-1} A^{-1} B \Phi$$

$$A = I - D^{-1} B Z^{-1} (a D^{(r)} + b D^{(\vartheta)}), \quad Z^{-1} = \text{diag}(z_1^{-1}, \dots, z_S^{-1})$$

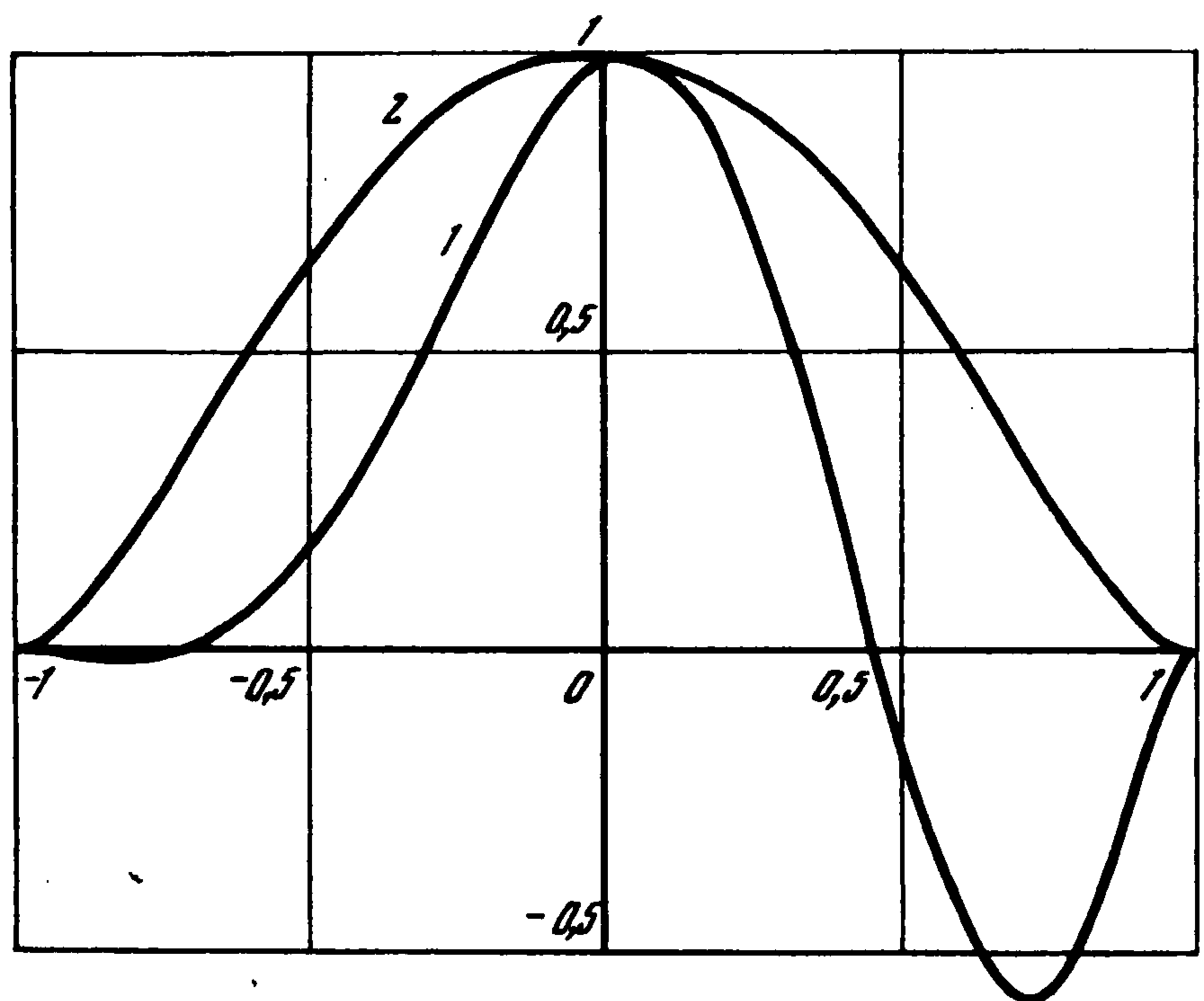
$$a = \text{diag}(a_1, \dots, a_S), \quad b = \text{diag}(b_1, \dots, b_S)$$

Пусть μ – наибольшее по модулю собственное значение матрицы $D^{-1} A^{-1} B$. Тогда искомое минимальное по модулю собственное значение будет $\lambda = 1/\mu$.

2. Обсуждение методики. Изложенный способ решения системы (1.1)–(1.3) основан на глобальной интерполяционной формуле К.И. Бабенко для функции двух переменных в круге. Свойства этой интерполяции таковы, что она реагирует на степень гладкости интерполируемой функции: более гладкая функция точнее приближается интерполяционной формулой, соответственно более точным оказывается предложенный алгоритм.

Поскольку степень гладкости решения заранее не известна (современное состояние проблемы изложено в [7]), использовать оценки погрешности при вычислении собственных значений [8] практически затруднительно. Однако

можно привести соображения качественного характера, которые говорят в пользу надежности алгоритма: а) использована интерполяция многочленами (алгебраическими и тригонометрическими); известно [9], что многочлен с большей точностью приближает более гладкую функцию; б) узлы сетки по радиусу выбирались как корни многочлена Чебышева T_{2m} , которые сгущаются к границе, и тем в большей степени, чем больше m . Тем самым минимизировалась постоянная Лебега и в лучшей степени удовлетворялось второе из граничных условий, что существенно для уравнений с малым параметром у старшего



оператора. Окончательный вывод о надежности алгоритма может быть сделан только на основании вычислительных экспериментов.

3. Результаты расчетов. Все расчеты проведены при следующих значениях параметров: $k = 1,4$; $\nu = 0,33$; $c_0 = 331,26$ м/с, $p = 1,0133 \cdot 10^5$ Па; $E = 6,867 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; относительная толщина пластины $h = 3 \cdot 10^{-3}$. Оператор M в (1.2) – производная по нормали (жесткое защемление): а) Область G – круг $r \leq 1$, $\psi(\zeta) = \zeta$, $V_x = -V$, $V_y = 0$.

Для безразмерной критической скорости получено значение $V^* = 0,2798$. По графикам на фигуре можно судить о форме прогибов: представлены $\text{Re}\phi(x, 0)/\phi_{\max}$ (кривая 1) и $\text{Re}\phi(0, y)/\phi_{\max}$ (кривая 2); б) Область G ограничена эпитрохойдой $\psi(\zeta) = \zeta(1 + 0,1\zeta^4)$, $V_x = -V$, $V_y = 0$.

Критическая скорость $V^* = 0,2798$. Графики, характеризующие форму прогибов, практически не отличаются от соответствующих кривых, приведенных на фигуре для случая круга. В случае $V_x = V_y = -V/\sqrt{2}$ для критической скорости получено значение $V^* = 0,2789$, графики $\text{Re}\phi(x, x)$ и $\text{Re}\phi(x, -x)$ по сравнению с приведенными не несут новой информации.

Все расчеты проведены на трех сетках: 9×31 , 11×31 , 13×31 (число узлов соответственно по радиусу и окружности); во всех случаях результаты совпали с точностью до четвертой цифры после запятой, что свидетельствует об эффективности, экономичности и надежности предложенной методики.

Полученные результаты представляют и непосредственный интерес: задача о флаттере круглой пластины исследована недостаточно, вторая из решенных здесь задач раньше не рассматривалась.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00407).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 167–171.
2. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
3. Алгазин С.Д., Бабенко К.И. Численное решение задачи об изгибе и свободных колебаниях пластинки // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1011–1015.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Johns J.J. Some panel-flutter studies using piston theory // J. Aeronaut. Sci. 1958. V. 25. № 11. P. 679–684.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Кошелев А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука, 1986. 239 с.
8. Алгазин С.Д. О локализации собственных значений замкнутых линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24. № 2. С. 3–8.
9. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехтеориздат, 1954. 328 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XII.1995