

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко С.В. О неизэнтропических стационарных пространственных и плоских нестационарных двойных волнах // ПММ, 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 255–260.
2. Зубов Е.Н. О пространственных установившихся течениях газа с прямыми линиями уровня при наличии интеграла Бернулли // Докл. АН СССР, 1976. Т. 227. № 1. С. 57–59.
3. Зубов Е.Н. Об одном классе пространственных установившихся течений политропного газа с показателем адиабаты, равным двум // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 3. С. 92–100.
4. Зубов Е.Н. О пространственных установившихся течениях идеального газа в вырожденном годографе при наличии интеграла Бернулли // Тр. ин-та мат. и мех. Уральск. науч. центра АН СССР. 1978. Вып. 25. С. 31–42.
5. Зубов Е.Н. О пространственных установившихся течениях идеального газа с прямыми линиями уровня // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 1. С. 47–64.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.1.1995

УДК 533.6.011

© 1997 г. А.И. Рылов

О СВОЙСТВАХ МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для осесимметричных потенциальных течений получен ряд результатов, характеризующих изменение газодинамических параметров, реализующихся в дозвуковой области сопел Лаваля с цилиндрической образующей, а также при обтекании полубесконечных тел с цилиндрической образующей. Данной работе предшествуют работы [1], в которой установлены свойства монотонности решений систем уравнений, описывающих осесимметричные течения; и [2], в которой для плоских течений рассмотрен ряд близких по постановке задач.

1. Рассмотрим осесимметричные потенциальные течения идеального (невязкого и не теплопроводного) газа. С использованием традиционных зависимых и независимых переменных эти течения описываются неоднородной системой уравнений, что существенно усложняет анализ осесимметричных дозвуковых течений. Как следствие, для этих течений имеется заметно меньше строгих результатов, чем для аналогичных плоских течений. Имеющиеся же результаты получены в основном с помощью анализа решений приближенных уравнений [3–7]. Поэтому можно ожидать, что переход к однородной системе, полученной ранее [1], даст дополнительные возможности для изучения осесимметричных течений.

Рассмотрим [1] функции $\alpha = u$ и $\beta = urv$. Здесь и далее x и y – цилиндрические координаты (x – ось симметрии), u и v – компоненты вектора скорости, ρ – плотность, q и θ – модуль и угол наклона вектора скорости, c – скорость звука, $M = q/c$ – число Маха.

С использованием функций α и β рассматриваемые течения описываются следующей однородной системой [1]:

$$(1 - M^2)\alpha_x - \frac{uv}{\rho r c^2}\beta_x + \frac{c^2 - v^2}{\rho r c^2}\beta_y = 0$$

(1.1)

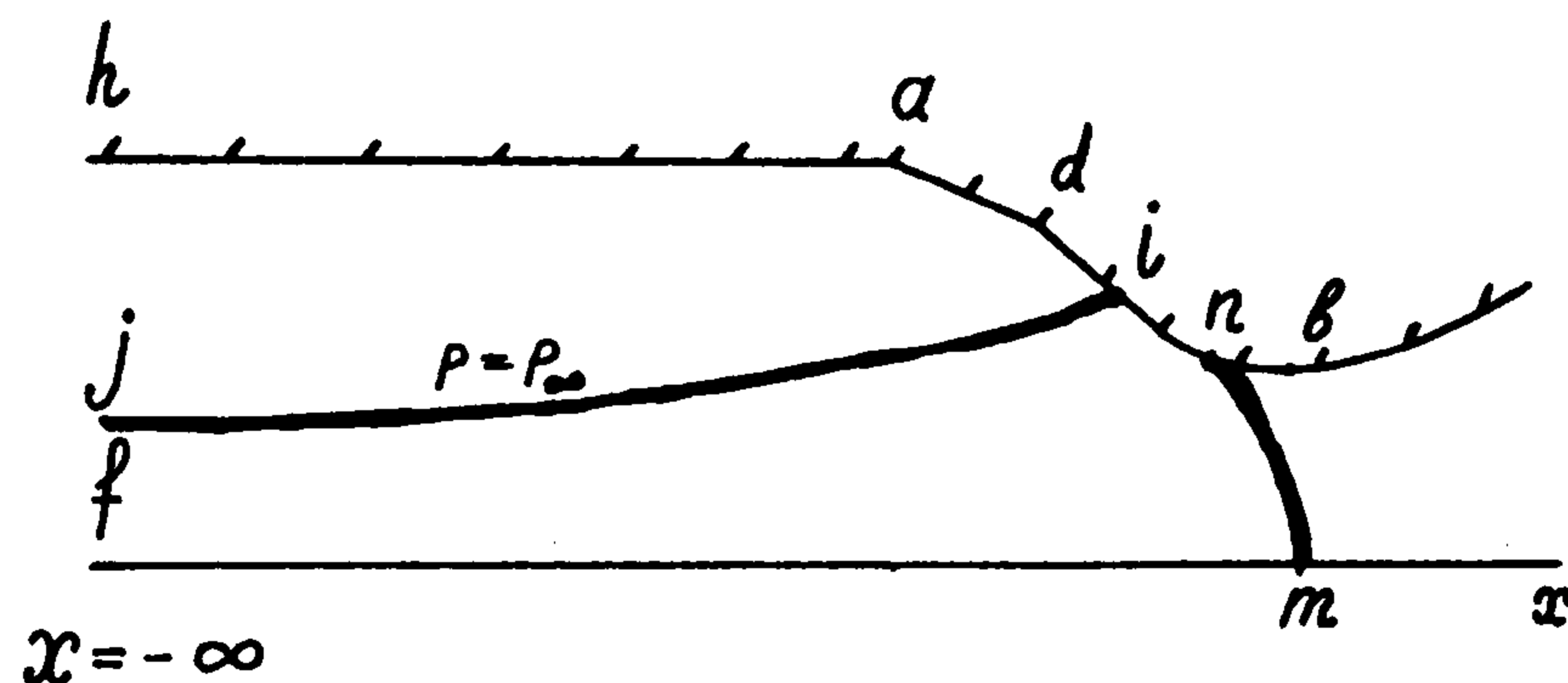
$$\frac{uv}{c^2}\alpha_x - \frac{c^2 - v^2}{c^2}\alpha_y + \frac{\beta_x}{\rho r} = 0$$

Производные α_l и β_l , вычисляемые вдоль, соответственно, линий $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, имеют вид

$$\alpha_l = -\beta_n \frac{1 - M^2 \sin^2 \omega}{\gamma p}, \quad \beta_l = \alpha_n \gamma p (1 - M^2 \sin^2 \varphi) \quad (1.2)$$

где β_n и α_n — производные, вычисляемые по нормали к линиям $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, φ и ω — углы, составляемые касательными к линиям, соответственно, $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ с вектором скорости.

Для однозначного определения линии уровня (ЛУ) функции α , проходящей через рассматриваемую точку, далее будем полагать, что линия уровня $\alpha = \text{const}$ является также границей области повышенного или пониженного (относительно ЛУ) значения α . В этом случае при прохождении возможных точек ветвления выбирается та из крайних ветвей, которая примыкает к указанной области. Кроме того, что важно для дальнейшего, при движении вдоль так определенной ЛУ знак производной α_n не меняется. Сказанное относится и к ЛУ функции β .



Фиг. 1

Из соотношений (1.2) видно, что при $M \leq 1$ функции α и β обладают свойством монотонности, согласно которому каждая из них монотонна вдоль ЛУ другой функции.

Одним из важных следствий свойства монотонности является отсутствие замкнутых ЛУ функций α и β при условии, что на этих ЛУ $M \leq 1$. Далее, из того, что указанные ЛУ не могут обрываться внутри дозвуковой области, следует, что каждая из ЛУ функций α и β , выйдя из одной точки границы дозвуковой области, обязательно должна выйти на эту границу в некоторой другой точке. И, наконец, можно отметить роль ЛУ $\beta = 0$, вдоль которой монотонны не только функция $\alpha = u$, но и давление p и другие функции, зависящие от q .

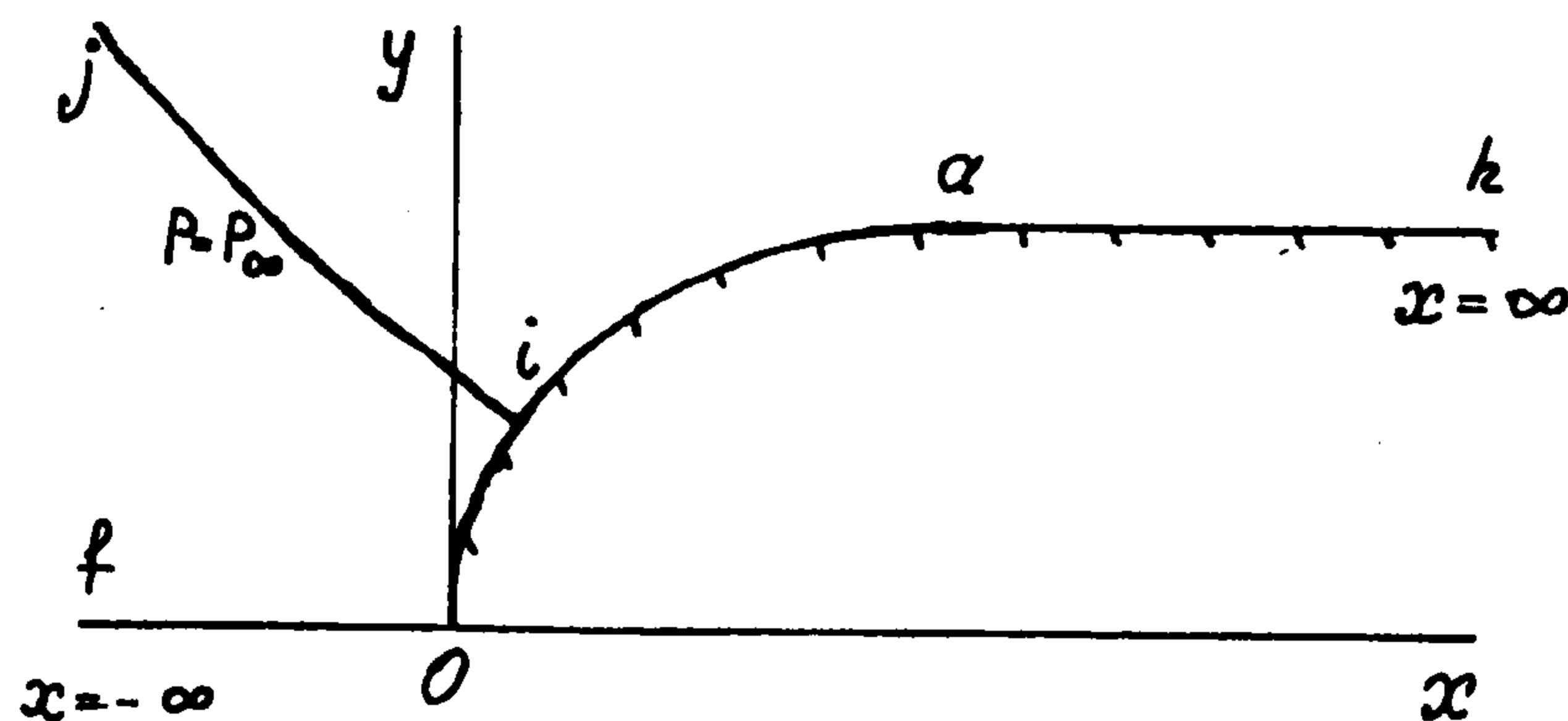
Указанные выше свойства ЛУ функций α и β могут быть использованы для построения одного из возможных вариантов метода ЛУ для осесимметричных дозвуковых течений. В данном случае в основе метода лежит совместный анализ ЛУ функций α и β , проходящих через некоторые характерные точки, и условий на границе рассматриваемой дозвуковой области. При исследовании некоторых задач этот метод позволяет доказать несовместимость результатов анализа ЛУ и предполагаемых свойств течения и, как следствие, указать на действительные свойства рассматриваемого течения. Данный метод и близкий к нему "модифицированный" метод годографа активно использовались при исследовании плоских течений [1, 2, 8-14], а также при изучении упрощенных уравнений, описывающих околозвуковые осесимметричные течения [7]. Для осесимметричных дозвуковых течений, описываемых полными уравнениями газовой динамики, метод ЛУ используется в следующих разделах работы.

2. Рассмотрим осесимметричное сопло Лавала с полубесконечной дозвуковой частью, фиг. 1. Здесь в сечении fh при $x = -\infty$ $v = 0$; ha — цилиндрическая образующая; ab — участок сужения, на котором $v \leq 0$, $u \geq 0$; правее точки b $v > 0$, $u > 0$. На участке ab , исключая точку b , возможны изломы контура, в которых происходит торможение потока. На фиг. 1 даны две такие точки, a и d . Считаем, что в дозвуковой области $mfhan$ реализуется потенциальное течение без точек ветвления линий тока и без местных сверхзвуковых зон. Последнее, в частности, означает, что на верхней стенке левее звуковой точки n (mn — звуковая линия (ЗЛ)) нет выпуклых угловых точек.

Неравенства, характеризующие газодинамические параметры на ЗЛ, представляют интерес и сами по себе, и для последующего анализа дозвукового течения в рассматриваемом сопле с помощью метода ЛУ. В связи с этим будет полезна следующая теорема.

Теорема 1. На ЗЛ mn , соединяющей ось симметрии и стенку сопла, $\beta \leq 0$, $\nu \leq 0$ и, как следствие, звуковая точка расположена на участке сужения ab .

Доказательство. Звуковая точка m на оси симметрии является точкой локального максимума u для дозвуковой области и ЗЛ. Следовательно, в достаточно малой дозвуковой окрестности этой точки линии $\alpha = u = \text{const}$ соединяют ось симметрии и ЗЛ. При движении вдоль этих линий от оси симметрии $\alpha_n < 0$ и поэтому, согласно (1.2), на ЗЛ вблизи оси симметрии $\nu < 0$. Для приближенных уравнений данный факт хорошо известен [5–7].



Фиг. 2

При движении вдоль ЗЛ от оси симметрии, когда дозвуковая область остается слева, переход от отрицательных значений ν к положительным возможен при прохождении через точку, в которой либо $\nu = 0$, $u = c$, либо $\nu = 0$, $u = -c$. Первая из этих точек также является точкой максимума u для дозвуковой области и звуковой линии. Следовательно, в достаточно малой дозвуковой окрестности этой точки существуют ЛУ $\alpha = u = \text{const}$, у которых в начальных точках $q = c$ и $\nu < 0$, в конечных $q = c$ и $\nu > 0$, и вдоль которых $\alpha_n < 0$. Но, согласно (1.2), это исключено. Для приближенных уравнений данный факт следует из полученных ранее результатов [7].

Итак, для строгого доказательства теоремы осталось рассмотреть экзотическую возможность перехода от $\nu < 0$ к $\nu > 0$ через точку, в которой $\nu = 0$, $u = -c$. Для опровержения такой возможности, как оказывается, необходимо учитывать форму дозвуковой части сопла, так как анализ линий $\alpha = \text{const}$ в окрестности этой точки уже не приводит к противоречию. Рассмотрим ЛУ $\beta = \nu = 0$, выходящую из этой точки в дозвуковую область. При движении вдоль этой ЛУ $\beta_n \leq 0$ и, следовательно, согласно (1.2), функция u возрастает, а q убывает. В рассматриваемом дозвуковом течении внутренние точки торможения исключены, поэтому на указанной ЛУ, вплоть до выхода ее на границы дозвуковой области, $\nu = 0$, $\theta = \pi$, $-c < u = -q \leq 0$. Но на оси симметрии, слева на бесконечности и на верхней стенке $\theta \neq \pi$. На ЗЛ при $\theta = \pi$ имеем $u = -c$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Эти результаты используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. Во всех точках дозвуковой части рассматриваемого сопла (фиг. 1) $\nu \leq 0$ скорость потока монотонно возрастает вдоль оси симметрии fm и монотонно убывает вдоль цилиндрической образующей ha .

Доказательство. По условию задачи и по результатам теоремы 1 на границе дозвуковой области $\nu \leq 0$. Предположение о том, что в некоторой внутренней точке этой области $\nu > 0$, опровергается с помощью анализа ЛУ $\beta = u\nu = \text{const}$, проходящей через эту точку. Указанная ЛУ не может оборваться внутри дозвуковой области, не может замкнуться сама на себя и, наконец, не может выйти на границу области, так как на ней $\nu \leq 0$, $\beta \leq 0$.

Допустим теперь, что в некоторой точке оси симметрии fm скорость убывает. Тогда вдоль ЛУ $\alpha = u = \text{const}$, выходящей из этой точки, согласно (1.2), функция β возрастает, и, следовательно, указанная ЛУ не может достичь границы области, на которой $\beta \leq 0$, что и опровергает сделанное предположение. Аналогично демонстрируется невозможность ускорения потока в точках цилиндрической образующей, что и завершает доказательство теоремы.

Следствием теоремы, в частности, являются неравенства $p \geq p_\infty$ на ha , $p \leq p_\infty$ на fm и существование в дозвуковой области по крайней мере одной линии ij постоянного давления (изобары) $p = p_\infty$, выходящей с участка сужения на бесконечность. Эти факты полезны, например, при интерпретации экспериментальных данных для сопел Лаваля с длинной дозвуковой цилиндрической частью.

3. Рассмотрим продольное обтекание полубесконечного тела с цилиндрической образующей ah (фиг. 2) и с головной частью oa , вдоль которой угол наклона стенки $0 \leq \gamma \leq \pi/2$. Течение предполагается потенциальным, не содержащим замкнутых линий тока и точек ветвления линий тока, за исключением точки o . На бесконечном расстоянии от точки o имеем $u = u_\infty$, $0 < u_\infty < c$, $v = 0$. В области течения $M \leq 1$. В силу сделанных предположений на оси симметрии fo и на цилиндрической образующей ah имеем $v = 0$, $u \geq 0$, на головной части будет $v \geq 0$, $u \geq 0$, и на теле угол наклона стенки γ совпадает с углом θ .

Теорема 3. Для данного обтекания имеет место следующее:

1) вдоль оси симметрии fo и цилиндрической образующей ah скорость монотонно убывает; как следствие, $p \geq p_\infty$ на fo , $p \leq p_\infty$ на ah и в области течения существует по крайней мере одна изобара ij $p = p_\infty$, уходящая с головной части на бесконечность;

2) во всех точках области течения $0 \leq u \leq u_*$, $0 \leq \beta \leq \beta_*$, $0 \leq v \leq \beta_*/(\rho u)$, где u_* и β_* — максимальные значения u и β на головной части тела (принцип максимума).

Доказательство. Из полученных ранее результатов [15] следует, что в рассматриваемом течении при удалении от точки o на бесконечность величина $|v|$ убывает как $R^{-(1+\epsilon)}$, $R^2 = x^2 + y^2$, $\epsilon > 0$. Следовательно, при $R = \infty$ имеем $\beta = 0$. Пусть теперь в некоторой точке на fo или ah производная $u_x > 0$. Тогда вдоль ЛУ функции α , выходящей из этой точки, согласно (1.2) функция β убывает и, следовательно, эта ЛУ не может выйти на границу рассматриваемой области, в том числе и на бесконечность, так как на этой границе $\beta \geq 0$. Полученное противоречие и доказывает первое утверждение теоремы.

Допустим, что в некоторой внутренней точке дозвуковой области не выполняется одно из неравенств второго утверждения. Тогда совместный анализ соответствующих ЛУ функций α и (или) β , проходящих через эту точку, и граничных условий приводит к противоречию. Теорема доказана.

Данные результаты естественным образом переносятся на случай обтекания полубесконечных кормовых частей, содержащих цилиндрическую образующую ah (фиг. 2). В этом случае течение осуществляется справа налево ($u_\infty < 0$), на замыкающей части oa имеем $v \leq 0$, $u \leq 0$, и на теле в отличие от предыдущего случая, когда на бесконечности течение осуществлялось слева направо, $\theta = \gamma + \pi$. При данных условиях в области течения $v \leq 0$ и вдоль цилиндрической образующей и вдоль оси симметрии ускорение потока положительно.

Для плоских течений результаты, аналогичные теоремам 2 и 3, получены ранее в работе [2].

На важность приложения результатов работы [1] для исследования осесимметричных течений указывали (при обсуждении [1]) Г.Г. Черный и С.И. Чернышенко, на результат [15], принципиальный при доказательстве теоремы 3, указал П.И. Плотников. Всем им автор признателен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (95-01-00958).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов А.И. Свойства монотонности решений эллиптических систем первого порядка и их приложения к уравнениям механики жидкости и газа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 758–766.
2. Рылов А.И. О свойствах монотонности некоторых вихревых плоских течений несжимаемой жидкости и дозвуковых течений газа // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 386–391.
3. Гудерлей К.Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во. иностр. лит., 1960. 421 с.
4. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тел вращения звуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 280–284.

5. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
6. Коул Д., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
7. Шифрин Э.Г. Исследование осесимметричных трансзвуковых течений при помощи специальной плоскости годографа // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 549–558.
8. Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
9. Никольский А.А. О плоских вихревых течениях газа // Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74–85.
10. Шифрин Э.Г. Некоторые свойства симметричного обтекания профиля с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 99–101.
11. Шифрин Э.Г. О выпуклости ударной волны на дозвуковом отрезке в плоском течении // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 158–162.
12. Рылов А.И. О возможных режимах обтекания заостренных тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 95–99.
13. Рылов А.И. О некоторых свойствах дозвукового течения за ударной волной, возникающей при сверхзвуковом обтекании тел конечной толщины // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 780–786.
14. Рылов А.И. О структуре дозвукового течения между несимметричным телом и отошедшей ударной волной // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 87–92.
15. Finn R.S., Gilbarg D. Three-dimensional subsonic flows, and asymptotic estimates for elliptic partial differential equations // Acta math. 1957. V. 98. № 3/4. P. 265–296.

Новосибирск

Поступила в редакцию
26.VII.1995

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. С.Д. Алгазин, И.А. Кийко

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

На основе новой постановки задачи о флаттере [1] с использованием полученных ранее результатов [2, 3] предлагается алгоритм для изучения флаттера пластин произвольной формы в плане при произвольных однородных граничных условиях.

Исследования по панельному флаттеру пластин в подавляющем большинстве относятся к прямоугольным пластинам в частной постановке, когда вектор скорости потока параллелен одной из сторон (см. обзор [4]). Методом Бубнова–Галеркина в двучленном приближении был изучен [5] флаттер круглой и эллиптической пластин (в последней задаче вектор скорости потока параллелен большой оси эллипса). Таким образом, широкий класс практически важных задач выпал из рассмотрения. Ниже этот пробел восполняется.

1. Постановка задачи и дискретизация. Исследование устойчивости колебаний тонкой пластины произвольной формы в плане, которая в плоскости x, y занимает область G с границей ∂G и обдувается потоком газа, приводит к спектральной задаче [1] для амплитудного значения прогибов $\varphi = \varphi(x, y), (x, y) \in G$

$$D\Delta^2\varphi - \beta V q \text{grad} \varphi = \lambda\varphi; \quad D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2)), \quad \beta = kp_0 / c_0 \quad (1.1)$$

$$\varphi|_{\partial G} = 0, \quad M\varphi|_{\partial G} = 0 \quad (1.2)$$