Для удлиненной циклоиды (случай верхнего знака) из (9) и (10) ясно, что решение имеет смысл лишь при $B > 2H$. Это движение с подпором, для него скорость на бесконечности равна нулю, что следует из (10) при $\varphi \to \infty$. Случай укороченной циклоиды (нижний знак, движение без подпора) доставляет больше разнообразия [6, 7].

Отметим, что задачу об укороченной циклоиде можно рассматривать как пример из теории фильтрации [8] задачи о конформном отображении на верхнюю полуплоскость кругового четырехугольника в предельном случае [9], а именно – кругового треугольника, две стороны которого равны, а все три угла прямые.

Приношу благодарность Н.Н. Кочиной за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод // Ж. Русск. физ.-хим. об-ва. 1889. Т. 21. № 1. С. 1–20; Собр., соч., Т. 3. М.: Гостехиздат. 1949. С. 184–206.
2. *Жуковский Н.Е.* О влиянии давления на насыщенные водою пески // Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествозн. 1890. Т. 3. Вып. 1. С. 52–55. Собр. соч., Т. 3. М.: Гостехиздат, 1949. С. 207–213.
3. *Жуковский Н.Е.* Просачивание воды через плотины // Опытно-мелиоративная часть НКЗ. 1923. Вып. 30. С. 30–52; Собр. соч. Т. 7. М.: Гостехиздат, 1950. С. 297–332.
4. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. М.: Наука, 1994. 238 с.
5. *Полубаринова–Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Kozeny J.* Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel Fluss- und Kanalversickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1931. Bd 26. H. 3. S. 28–31.
7. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
8. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. М.: Редакция журнала "Успехи физических наук" РАН, 1996. 176 с.
9. *Полубаринова–Кочина П.Я.* О дополнительных параметрах на примерах круговых четырехугольников // ПММ. 1991. Т. 55, Вып. 2. С. 222–227.

Москва

Поступила в редакцию
29.X.1996

УДК 532.5:534.1

 С.В. Мелешко

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ТИПА ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ

Исследуются неизэнтропические стационарные пространственные двойные волны уравнений идеального газа с уравнением состояния вида $\tau = g(p)A^2(S)$ в двух случаях, ранее [1] опущенных: при $H \neq 0$, $F'_2 = cF'_3$ и при $H = 0$ с прямыми линиями уровня.

Проведенный анализ завершает классификацию пространственных стационарных неизэнтропических двойных волн с произвольным уравнением состояния $\tau = \tau(p, S)$ при наличии функционального произвола в общем решении задачи Коши. Частные решения такого типа для политропного газа имеются в [2–5][1].

---

[1] См. также: *Зубов Е.Н.* Двойные волны для пространственных стационарных уравнений газовой динамики: Дисс...канд. физ.-матем. наук. Свердловск, 1978. 98 с.

Рассматриваются двойные волны

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(p,S)$$

нередуцируемые к инвариантным решениям уравнений, описывающие течения идеального газа в пространственном стационарном неизобарическом и неизэнтропическом случае

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \tau\nabla p = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} - \tau \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \tag{1}$$

с уравнением состояния $\tau = \tau(p,S)$, $\tau_p \neq 0$, $\tau_S \neq 0$. Здесь $\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3)$ – скорость, p – давление, S – энтропия, τ – удельный объем, $d/dt = u_\alpha d/dx_\alpha$ (по повторяющемуся греческому индексу проводится суммирование от 1 до 3, если не оговорено особо), а также ниже используются обозначения

$$H = \tau_p + \mathbf{v}_p\mathbf{v}_p, \; \zeta = \tau_S + \mathbf{v}_p\mathbf{v}_S, \; \xi = 2\zeta - \tau_S, \; \mathbf{b} = \mathbf{v}\times\mathbf{v}_S, \; \lambda = \mathbf{b}\mathbf{v}_p$$

Из проведенного ниже исследования и полученных ранее результатов [1] следует, что имеются лишь следующие виды пространственных неизэнтропических, неизобарических стационарных течений идеального газа типа двойной волны, нередуцируемых к инвариантным решениям с функциональным произволом.

1°. Двойные волны с произволом в одну функцию одного аргумента и уравнением состояния $\tau = g(p)A^2(S)$, в которых $u_1 = h_1(p)A(S)$, а другие координаты скорости u_2, u_3 имеют вид либо $u_2 = h_2(p)A(S)$, $u_3 = u_3(S)$, либо $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$. В первом случае функции $h_1(p)$, $h_2(p)$ и $g(p)$ удовлетворяют системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (21) ($F_2 = h_2'/h_1'$, $h_1h_1'' + h_2h_2'' \neq 0$). Во втором случае функции $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ – произвольные, а $h_1(p)$ и $g(p)$ связаны соотношением $g + h_1h_1' = 0$ ($h_1h_1'' \neq 0$).

Такие решения для политропного газа рассматривались ранее в 1, где функции $u_2(S)$ и $u_3(S)$ были связаны с $A(S)$ линейной зависимостью, т.е., был указан лишь частный класс решений вида двойной волны.

2°. Двойные волны с прямыми линиями уровня с произволом в две функции одного аргумента, являющиеся произвольными функциями решения уравнения (31). Для $\tau(p,S)$, $\mathbf{v}(p,S)$ имеется переопределенная система, состоящая из пяти дифференциальных уравнений: (3), (30) и (32). Анализ этой переопределенной системы в общем случае уравнений состояния затруднителен. Но в частном случае эта система совместна только для политропного газа с показателем политропы $\gamma = 2$ и имеет решение с произволом в одну функцию одного аргумента.

3°. Двойные волны с прямыми линиями уровня с произволом в две функции одного аргумента и уравнением состояния $\tau = g(p)A^2(S)$. При этом $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ – произвольные ($(u_i/A)_S \neq 0$, $i = 2,3$), $u_1 = h_1(p)A(S)$. Здесь $h_1(p) = k_1p + k$ и $g(p) = -k_1h_1$.

4°. Двойные волны с произволом в одну функцию двух аргументов, которая является произвольной функцией решения уравнения (1.25) из [1]

$$-gQ_p + h_1'(\chi' - Q(h_2'/h_1')' - x_3(h_3'/h_1')')(h_3Q_{x3} - h_2) = 0$$

Функции $g(p)$ и $h_i(p)$ ($i = 1,2,3$) связаны уравнениями (1.24) из [1]

$$h_\alpha h_\alpha'' = 0, \; h_\alpha h_\alpha' = -g$$

Здесь $\chi = \chi(p)$, $Q = Q(p,S,x_3)$, $u_i = h_i(p)A(S)$ ($i = 1,2,3$) и уравнение состояния $\tau = g(p)A^2(S)$.

Теорема. Имеются лишь четыре указанных выше вида пространственных неизэнтропических, неизобарических стационарных течений идеального газа типа двойной волны, нередуцируемых к инвариантным решениям с функциональным произволом.

Доказательство. После введения новой зависимой переменной $\varphi = (\operatorname{div}\mathbf{v})/\tau_p$ из (1) получаем

$$\mathbf{v}\nabla p - \tau\varphi = 0, \quad \mathbf{v}\nabla S = 0, \quad \mathbf{v}_S\nabla S = H\varphi \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \nabla p + \varphi\mathbf{v}_p = 0$$

В силу неизобаричности течения $\varphi \neq 0$, $\mathbf{v}_p \neq 0$, (для определенности считается $u_{1p} \neq 0$). Из (2) вытекает

$$\tau + \mathbf{v}\mathbf{v}_p = 0 \tag{3}$$

(интеграл Бернулли).

Продифференцировав полным образом D_i по пространственной переменной x_i (i = 1, 2, 3) и составив следующие комбинации из уравнений (2), получаем:

$$\mathbf{D}\times\boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{v}_p\times\nabla\varphi - \mathbf{v}_{pS}\nabla S - \varphi^2\mathbf{v}_p\times\mathbf{v}_{pp} = 0 \tag{4}$$

$$D(H\varphi - \mathbf{v}_S\nabla S)/Dt = Hd\varphi/dt - \varphi(\tau\mathbf{v}_{pS} + \mathbf{v}_p(\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S))\nabla S + \varphi^2(H^2 + \tau H_p) = 0 \tag{5}$$

$$D\boldsymbol{\Phi}/Dt = \mathbf{v}_p d\varphi/dt + \tau\nabla\varphi + \varphi\zeta\nabla S - \varphi^2(\mathbf{v}_p H - \tau\mathbf{v}_{pp}) = 0 \tag{6}$$

где $\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3)$, $D/Dt = \mathbf{v}\mathbf{D}$.

После исключения из (4) производных $\nabla\varphi$ при помощи уравнений (6) находим

$$(\zeta\mathbf{v}_p - \tau\mathbf{v}_{pS})\times\nabla S = 0 \tag{7}$$

В дальнейшем необходимо различать два случая: $H \neq 0$ и $H = 0$.

1°. Пусть $H \neq 0$. Если φ выразить из третьего уравнения системы (2), подставить эту величину в остальные уравнения этой системы, то вместе с (7) получается однородная система квазилинейных дифференциальных уравнений относительно p и S. Из запрета на редукцию двойных волн к инвариантным решениям [6] и уравнений (2), (6) следует равенство

$$\tau\mathbf{v}_{pS} - \zeta\mathbf{v}_p = 0 \tag{8}$$

откуда вытекает существование такой вектор-функции $\mathbf{F} = (F_1(p),\ F_2(p),\ F_3(p))$, что ($F_1 \equiv 1$)

$$\mathbf{v}_p = u_{1p}\mathbf{F} \tag{9}$$

Так как $H \neq 0$, то из второго и третьего уравнений системы (2) следует, что $\mathbf{b} \neq 0$. Для определенности считается $b_1 \equiv u_2 u_{3S} - u_3 u_{2S} \neq 0$.

Система уравнений, которой должны удовлетворять функции $\mathbf{U} = (p, S, \varphi)'$, записывается в виде следующей переопределенной системы квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_{x_3} + G_3\mathbf{U}_{x_1} = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{U}_{x_2} + G_2\mathbf{U}_{x_1} = \mathbf{f}_2 \\ p_{x_1} + \varphi u_{1p} = 0, \quad \varphi e_1 S_{x_1} + \varphi_{x_1} = f \\ b_1 G_i = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_i & 0 \\ 0 & \varphi e_i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{e} \equiv (e_1, e_2, e_3) = \frac{\xi\lambda}{\tau H}\mathbf{v}_p + \frac{\xi}{\tau}\mathbf{b}\end{gathered} \tag{10}$$

с функциями $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ и f, которые не зависят от производных $\mathbf{U}_{x_i}$ ($i = 1-3$).

Для существования решения системы (1), имеющего функциональный произвол, необходимо

$$\xi\lambda(b_1\mathbf{v}_p - u_{1p}\mathbf{b}) = 0 \tag{11}$$

Это следует из рассмотрения матрицы, составленной из коэффициентов при старших производных в продолженной системе (10). Результаты анализа случаев, когда $\lambda(b_1 \mathbf{v}_p - u_{1p}\mathbf{b}) = 0$ или $\xi \neq 0$, приведены ранее [1]: либо получаются противоречивые уравнения, либо происходит редукция к плоским течениям. Ниже исследуется неизученный ранее случай $\xi = 0$.

При выполнении условия $\xi = 0$ часть уравнений системы (10) принимает вид

$$\mathbf{\Psi} \equiv (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = \tau H \nabla \varphi + \varphi H \zeta \nabla S - \varphi^2 \mathbf{c} = 0$$

$$\mathbf{c} \equiv (2H^2 + \tau H_p)\mathbf{v}_p - \tau H \mathbf{v}_{pp}$$

Из уравнений $\mathbf{D} \times \mathbf{\Psi} = 0$ получаются еще три (скалярных), уравнения первого порядка

$$\mathbf{a} \times \nabla S + \varphi \mathbf{d} \times \mathbf{v}_p = 0 \tag{12}$$

Здесь

$$\mathbf{a} = \tau H[H_p / H - 2u_{1_{pp}} / u_{1_p} + 2H/\tau]_S \mathbf{F}$$

$$\mathbf{d} = (2H^2 + \tau H_p)\mathbf{v}_{pp} - \tau H \mathbf{v}_{ppp}$$

Из запрета на редукцию двойной волны к инвариантному решению в уравнениях (10), (12) следует $\mathbf{a} = 0$ и $d_i = F_i d_i$, $(i = 2,3)$, т.е.

$$[H_p / H - 2u_{1pp} / u_{1p} + 2H/\tau]_S = 0 \tag{13}$$

$$F_i'(u_{1p}(2H^2 + \tau H_p) - 2\tau H u_{1pp}) - \tau H u_{1p} F_i'' = 0, \quad (i = 2,3) \tag{14}$$

При выполнении равенств (3), (9), (14) и $\xi = 0$ система (10) находится в инволюции и имеет решение с произволом в одну функцию от одного аргумента x_i. Поэтому при $H \neq 0$ осталось исследовать на совместность только систему, состоящую из уравнений (3), (9), (14) и $\xi = 0$. Это рассмотрение разбивается на два случая: $F'_2 = F'_3 = 0$ и $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$.

Пусть сначала $F_2' = F_3' = 0$, т.е. $F_i = \mathrm{const}$. Без ограничения общности можно считать $F_2 = F_3 = 0$ или $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$. Здесь $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ считаются произвольными функциями энтропии. Из условия $\xi = 0$ и (3) находятся произвольные

$$u_{1p} = -\tau / u_1, \quad u_{1S} = \tau_S u_1 / (2\tau) \tag{15}$$

После дифференцирования перекрестным образом u_1 по p и S последних уравнений и приравнивания смешанных производных имеем $(\tau_S / \tau)_p = 0$. Отсюда получаем $\tau = A^2(S) g(p)$, а после интегрирования (15) имеем $u_1^2 = -2A^2(S)\int g(p)dp$. При этом непосредственной подстановкой проверяется, что $\mathbf{a} = 0$. Таким образом, в данном случае уравнение состояния должно иметь вид $\tau = A^2(S) g(p)$, а компоненты скорости

$$u_1 = h_1(p) A(S), \quad u_2 = u_2(S), \quad u_3 = u_3(S)$$

причем $h_1(p)$ определяется из уравнения $h_1 h_1' + g = 0$, а функции $u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ – произвольные.

Заметим, что для политропного газа было получено 1 такое же условие относительно функции $h_1(p)$, но функции $u_2 = u_2(S)$, $u_3 = u_3(S)$ считались связанными с $A(S)$, т.е. указан более узкий класс решений (вследствие дополнительного предположения).

Пусть теперь $(F_2')^2 + (F_3')^2 \neq 0$. Так как $\tau H u_{1p} \neq 0$, то в силу линейности уравнений (14) относительно F_i' и F_i'' $(i = 2,3)$ без ограничения общности можно считать $F_2' \neq 0$ и $F_3 = 0$.

Из (14) получается $a_1 = 0$ и

$$H_p / H = 2u_{1pp} / u_{1p} - 2H/\tau + F_2'' / F_2'$$

После подстановки сюда $H=\tau_p+u_{1p}^2(1+F_2^2)$ вытекает равенство

$$\frac{2u_{1pp}\tau_p}{u_{1p}H}+\frac{F_2''}{F_2'}-\frac{2H}{\tau}-\frac{\tau_{pp}+2F_2F_2'u_{1p}^2}{H}=0 \tag{16}$$

Из (3) определяется компонента скорости $u_2=-(u_1+\tau/u_{1p})/F_2$. Подставив ее выражение в (9) ($i=3$) и в $\xi=0$ (с учетом (3)), находим

$$u_{1pp}=u_{1p}\left[\frac{H}{\tau}-\frac{F_2'(u_1u_{1p}+\tau)}{\tau F_2}\right],\ u_{1pS}=\frac{\tau_S u_{1p}}{2\tau} \tag{17}$$

После перекрестного дифференцирования равенств (17) получим

$$u_1(2\tau u_{1S}-(BF_2)/(u_{1p}F'_2))/\tau_S \quad (B=-\tau\tau_{ps}-\tau_p\tau_s) \tag{18}$$

а после дифференцирования равенства (18) по p и подстановки в него (17) получим

$$4Bu_{1S}=\frac{\tau_S}{u_{1p}}\left[-2B+\frac{BF_2}{F_2'}\left(\frac{2B}{\tau\tau_S}+\frac{2\tau_p}{\tau}+u_{1p}^2(1+F_2^2)+\frac{F_2''}{F_2'}\right)-\frac{B_pF_2}{F_2'}\right] \tag{19}$$

Если $B\neq 0$, то из соотношений (18), (19) определяются u_1 и u_{1S} через u_{1p}. Тогда после дифференцирования равенств (18) по S имеем

$$(B_p/B)_S=B/\tau^2 \tag{20}$$

а после подстановки первого выражения (17) в (16) получим уравнение, дифференцирование которого по S при учете равенства (20) дает соотношение $\tau_p+u_{1p}^2(1+F_2^2)=0$, противоречащее условию $H\neq 0$. Поэтому необходимо считать $B=0$, что соответствует уравнению состояния $\tau=g(p)A^2(S)$. Для такого уравнения состояния $u_1h_1(p)A(S)$, а относительно функций $F_2(p)$ и $h_1(p)$ имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}F_2F_2''((h_1')^2(1+F_2^2)+g')=2(F_2')^2h_1'(g'h_1-h_1'g)+F_2F_2'gg''+\\ +2((F_2')^2g+(h_1')^2F_2F_2'(1+F_2^2))((h_1')^2(1+F_2^2)+g')\\ F_2gh_1''=F_2(1+F_2^2)(h_1')^3-F_2'h_1(h_1')^2+h_1'(F_2g'-gF_2')\end{gathered} \tag{21}$$

Функция $u_2=u_2(S)$ остается произвольной.

Как и в предыдущем случае, аналогичное решение для политропного газа было получено ранее[1], но функция $u_2(S)$ была связана с функцией $A(S)$ линейной зависимостью.

Таким образом, если $H\neq 0$, то стационарные неизэнтропические неизобарические течения типа двойных волн, имеющие функциональный произвол и не редуцируемые к инвариантным решениям, существуют только для уравнений состояния $\tau=A^2(S)g(p)$.

2°. Пусть теперь $H=0$. Из запрета на редукцию к инвариантным решениям системы (2), (5), (7) следует выполнение уравнений

$$\mathbf{vg}=0,\ \mathbf{v}_S\mathbf{g}=0,\ \mathbf{g}^2+\xi\mathbf{v}_p\mathbf{g}=0 \quad (\mathbf{g}=\tau\mathbf{v}_{pS}-\zeta\mathbf{v}_p) \tag{22}$$

Для дальнейшего исследования делается переход к новым независимым переменным p, S, x_3 (без ограничения общности считается выполненным неравенство $p_{x_1}S_{x_2}-p_{x_2}S_{x_1}\neq 0$), т.е. $x_1=P(P,S,x_3)$, $x_2=Q(p,S,x_3)$.

Уравнения (1) после этого перехода запишутся так:

$$BP_p-AQ_p=0,\ u_{1p}BP_S-(\tau+u_{1p}A)Q_S=0$$

$$(\tau+u_{2p}B)P_S-u_{2p}AQ_S=0$$

$$(u_{3p}B-\tau Q_{x_3})P_s-(u_{3p}A-\tau P_{x_3})Q_S=0$$

$$(u_{2S}-u_{3S}Q_{x_3})P_p-(u_{1S}-u_{3S}P_{x_3})Q_p=0 \tag{23}$$

$$(A\equiv u_1-u_3P_{x_3},\ B\equiv u_2-u_3Q_{x_3})$$

причем

$$P_pQ_S-P_SQ_p\neq 0 \tag{24}$$

Исследование системы (23) разбивается на два случая: а) $\mathbf{v}_S\times\mathbf{v}_{pS}=0$ (этот случай изучен ранее [1]), б) $\mathbf{v}_S\times\mathbf{v}_{pS}\neq 0$ (этот случай был исключен из рассмотрения в [1] и в диссертации Е.Н. Зубова).

Ниже рассматривается случай *б*. Для определенности считается, что $R=u_{2pS}u_{1p}-u_{1pS}u_{2p}\neq 0$.

Так как следует считать $P_S^2+Q_S^2\neq 0$, то из второго и третьего уравнений (23) получается, что $A^2+B^2\neq 0$ и

$$\tau+u_{1p}A+u_{2p}B=0 \tag{25}$$

или в силу (3)

$$u_{3p}=U_{1p}P_{x_3}+u_{2p}Q_{x_3}=0$$

После интегрирования этого уравнения по x_3 получаем

$$x_3u_{3p}+u_{1p}P+u_{2p}Q=\chi \tag{26}$$

с произвольной функцией $\chi=\chi(p,S)$. Из (25) следует, что вторoe и третье уравнения системы (23) сводятся к

$$u_{1p}P_S+u_{2p}Q_S=0 \tag{27}$$

Дифференцирование равенства (26) по S и подстановка туда (27) приводит к соотношению

$$u_{1pS}P+u_{2pS}Q=\chi_S-x_3u_{3pS} \tag{28}$$

Тогда из (26) и (28) находим

$$P=\frac{1}{R}(-x_3\begin{vmatrix}u_{3p} & u_{2p}\\ u_{3pS} & u_{2pS}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\chi & u_{2p}\\ \chi_S & u_{2pS}\end{vmatrix}) \tag{29}$$

$$Q=\frac{1}{R}(x_3\begin{vmatrix}u_{3p} & u_{1p}\\ u_{3pS} & u_{1pS}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\chi & u_{1p}\\ \chi_S & u_{1pS}\end{vmatrix})$$

Если $\mathbf{b}=0$, то $\mathbf{v}=u_1\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}=\mathbf{F}(p)$, $F_1\equiv 1$, $F_2'\neq 0$. После подстановки выражений (29) в первое уравнение (23), получаем $(F_3'/F_2')'=0$, если $F_3=k_1F_2+k_2$ с постоянными k_1, k_2, а это означает, что $u_3=k_1u_2+k_2u_1$, т.е. редукцию к инвариантному решению. Поэтому следует рассматривать $\mathbf{b}\neq 0$, т.е. векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_S$ и $\mathbf{b}$ не компланарны. Из уравнений (22) находим

$$\tau\mathbf{v}_{pS}=\zeta\mathbf{v}_p-\xi\lambda\mathbf{b}/\mathbf{b}^2 \tag{30}$$

При этом, так как $R\neq 0$, то $\xi\lambda\neq 0$.

После подстановки выражений (29) в (23) и учета равенства (30) в системе (23) остается только одно линейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно функции $\chi = \chi(p,S)$

$$\chi_{pS} + A\chi_p + B\chi_S + C\chi = 0 \tag{31}$$

Здесь

$$A = -\frac{\zeta}{\tau}, \quad C = A_p + AB + \frac{\xi\tau_p}{2\tau^2}$$

$$B = -\frac{\tau\mathbf{b}^2}{\zeta\lambda}\left[\frac{\xi\lambda}{\tau\mathbf{b}^2}\begin{vmatrix} u_{1p} & u_{2p} \\ b_{1p} & b_{2p}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_{1p} & u_{2p} \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^{-1} + \left(\frac{\xi\lambda}{\tau\mathbf{b}^2}\right)_p\right]$$

Таким образом, при $H = 0$, в случае *б* течения с прямыми линиями уровня существуют, если функции τ и $u_i(p,S)$ $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют переопределенной системе, состоящей из пяти дифференциальных уравнений: (3), (30) и

$$H \equiv \tau_p + \mathbf{v}_p\mathbf{v}_p = 0 \tag{32}$$

Анализ этой переопределенной системы в общем случае уравнения состояния затруднителен. Проведем его для уравнения состояния вида $\tau = g(p)A^2(S)$.

Дифференцирование равенства (32) по S и подстановка выражения (30) дает соотношение, откуда, из вида уравнения состояния и в силу того, что $\xi \neq 0$, следует

$$\tau_p + 2\lambda^2 / \mathbf{b}^2 = 0 \tag{33}$$

После дифференцирования уравнений (3), (32), (33) по p получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{v}\mathbf{v}_{pp} = 0, \quad \mathbf{v}_p\mathbf{v}_{pp} = -\tau_p / 2 \\ \mathbf{b}\mathbf{v}_{pp} = \lambda g''/(2g') - \mathbf{b}_p(g'A^2\mathbf{b} + \mathbf{v}_p)\end{gathered} \tag{34}$$

Определителем при производных $\mathbf{v}_{pp}$ в уравнениях (34) будет $d \equiv \tau(\mathbf{v}\mathbf{v}_s) + \mathbf{v}^2(\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S)$.

Если $d = 0$, то после дифференцирования d по p вытекает равенство, используя которое, а также первые два уравнения (34), находим вторые производные

$$\mathbf{v}_{pp} = -\mathbf{k}\xi(2\tau^2 + \tau_p\mathbf{v}^2)/(2\tau\mathbf{v}^2) - \mathbf{b}\tau_{pp}/(2\lambda) \quad (\mathbf{k} = \mathbf{v} \times \mathbf{v}_p) \tag{35}$$

После дифференцирования (33) по p с учетом (35) и соотношения $d = 0$ определяется $\mathbf{v}^2 = -2\tau\tau_p / \tau_{pp}$. Откуда $\mathbf{v}\mathbf{v}_S = -(2\tau\tau_p / \tau_{pp})_S$, а из соотношения $d = 0$ следует $\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S = -\tau_S / 2$. Но тогда получается $\xi = 0$, что невозможно в исследуемом случае. Значит, необходимо $d \neq 0$.

Так как $d \neq 0$, то из уравнений (34) находятся вторые производные

$$d\mathbf{v}_{pp} = b\mathbf{k} + \tau_{pp}(\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{v}_S) - \mathbf{v}_S\mathbf{v}^2)/2 \tag{36}$$

$$(b = \tau_{pp}\lambda/(2\tau_p) + \tau_p(\tau\mathbf{v}_S + (\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S)\mathbf{v}^2)/(2\tau\lambda))$$

Непосредственными выкладками проверяется выполнение равенства $(\mathbf{v}_{pp})_S - (\mathbf{v}_{pS})_p = 0$. Поэтому новые соотношения, содержащие производные от $\mathbf{v}$ не выше второго порядка, могут быть получены только после дифференцирования уравнения (33) по S

$$\mathbf{a}\mathbf{v}_{SS} - \tau_p\xi\mathbf{b}^2/(2\tau) = 0 \quad (\mathbf{a} \equiv 2\lambda\mathbf{k} - \tau_p(\mathbf{v}^2\mathbf{v}_S - (\mathbf{v}\mathbf{v}_S)\mathbf{v})) \tag{37}$$

Для дальнейшего будут полезны следствия уравнений (3), (30), (32), (33). Так как векторы

$\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_S$ и $\mathbf{b}$ не компланарны, то векторы $\mathbf{v}_p$ и $\mathbf{k}$ линейным образом выражаются через них:

$$\mathbf{v}_p = [-\mathbf{v}(\tau\mathbf{v}_S^2 + (\mathbf{v}\mathbf{v}_S)(\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S)) + \mathbf{v}_S(\tau(\mathbf{v}\mathbf{v}_S) + \mathbf{v}^2(\mathbf{v}_p\mathbf{v}_S)) + \lambda\mathbf{b}]/\mathbf{b}^2 \tag{38}$$

$$\mathbf{k} = [\mathbf{v}\lambda(\mathbf{v}\mathbf{v}_S) - \mathbf{v}_S\lambda\mathbf{v}^2 + \mathbf{b}d]/\mathbf{b}^2 \tag{39}$$

Отсюда вытекает соотношение

$$2(\tau\mathbf{v}_S + (\mathbf{v}_p\mathbf{v}_s)\mathbf{v})^2 + \tau_p\mathbf{b}^2 = 0 \tag{40}$$

Тогда при учете равенства (39), уравнение (37) запишем в виде

$$4\lambda\tau d\mathbf{b}\mathbf{v}_{SS} = \tau_p\xi(\mathbf{b}^2)^2 \tag{41}$$

Теперь новые уравнения, содержащие производные от u_i не выше второго порядка, могут быть получены только после дифференцирования уравнения (41) по p. Оказывается, что после этого дифференцирования и учета (41) получается уравнение $F = 0$, содержащее производные от u_i не выше первого порядка (из-за его громоздкости оно здесь не приводится). Это уравнение затем необходимо продифференцировать по p и по S. Ввиду громоздкости дальнейших выкладок, которые проводились на ЭВМ в системе REDUCE, описываются лишь результаты.

Имеем $(\mathbf{v}^2 + 2\tau^2/\tau_p)(\tau\tau_{pp} - \tau_p^2) \neq 0$ (иначе получается противоречие условию $\xi \neq 0$). Тогда из уравнения $F = 0$ находится выражение для $\mathbf{v}\mathbf{v}_S$, после подстановки которого в равенство

$$\partial(\mathbf{v}\mathbf{v}_S)/\partial p + \tau_S = 0 \tag{42}$$

следует

$$2\tau_p^3 b_0\mathbf{v}^2 + \tau^2(4\tau_p^2 b_0 + 6\tau_p^2 a^2 - 3a^3) = 0 \tag{43}$$

$$(a \equiv \tau\tau_{pp} - \tau_p^2,\ b_0 = (\tau\tau_p a_p - 2a(a + \tau_p^2)))$$

Пусть $b_0 \neq 0$. Поскольку в силу (30) равенство (42) справедливо, то после подстановки в него произведения $\mathbf{v}\mathbf{v}_S$, найденного из $F = 0$, определяется $\mathbf{v}^2$, а после подстановки $\mathbf{v}^2$ в соотношение (3), получается

$$(\tau\tau_{pp} - \tau_p^2)(\tau\tau_{pp} - 3\tau_p^2) = 0$$

что противоречит условию $b_0 \neq 0$.

Пусть теперь $b_0 = 0$. Тогда из (43) находим $\tau_{pp} - 3\tau_p^2 = 0$, что соответствует уравнению состояния политропного газа с показателем политропы $\gamma = 2$. При этом $\mathbf{v}\mathbf{v}_S = \mathbf{v}^2 A'/A$ и из соотношения $\partial(\mathbf{v}\mathbf{v}_S)/\partial S - \mathbf{v}_{SS} - \mathbf{v}_S^2 = 0$ вытекает уравнение

$$\mathbf{v}\mathbf{v}_{SS} - (\mathbf{v}^2/A^2)(AA'' + 2(AA'g + \mathbf{v}_p\mathbf{v}_s)^2/(\mathbf{v}^2 g' + 2g^2 A^2) = 0 \tag{44}$$

дифференцирование которого по p приводит к тождеству. Это означает, что переопределенная система, состоящая из уравнений (3), (30), (32), (33) находится в инволюции.

Заметим, что в этом случае уравнение (3) и $\mathbf{v}\mathbf{v}_S = \mathbf{v}^2 A'/A$ имеет интеграл

$$\mathbf{v}^2 = (c_1 - 4p^{1/2})A^2 \quad (c_1 = \mathrm{const})$$

Таким образом, для уравнения состояния вида $\tau = g(p)A^2(S)$ система уравнений (3), (30), (32), (33) совместна только для уравнений состояния политропного газа с показателем политропы $\gamma = 0$ и имеет решение с произволом в одну функцию одного аргумента.

Тем самым доказательство утверждения теоремы завершено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17361).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелешко С.В.* О неизэнтропических стационарных пространственных и плоских нестационарных двойных волнах // ПММ, 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 255–260.
2. *Зубов Е.Н.* О пространственных установившихся течениях газа с прямыми линиями уровня при наличии интеграла Бернулли // Докл. АН СССР, 1976. Т. 227. № 1. С. 57–59.
3. *Зубов Е.Н.* Об одном классе пространственных установившихся течений политропного газа с показателем адиабаты, равным двум // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 3. С. 92–100.
4. *Зубов Е.Н.* О пространственных установившихся течениях идеального газа в вырожденным годографом при наличии интеграла Бернулли // Тр. ин-та мат. и мех. Уральск. науч. центра АН СССР. 1978. Вып. 25. С. 31–42.
5. *Зубов Е.Н.* О пространственных установившихся течениях идеального газа с прямыми линиями уровня // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978. Т. 9. № 1. С. 47–64.
6. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.I.1995

УДК 533.6.011

 А.И. Рылов

О СВОЙСТВАХ МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ДОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для осесимметричных потенциальных течений получен ряд результатов, характеризующих изменение газодинамических параметров, реализующихся в дозвуковой области сопел Лаваля с цилиндрической образующей, а также при обтекании полубесконечных тел с цилиндрической образующей. Данной работе предшествуют работы [1], в которой установлены свойства монотонности решений систем уравнений, описывающих осесимметричные течения, и [2], в которой для плоских течений рассмотрен ряд близких по постановке задач.

1. Рассмотрим осесимметричные потенциальные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. С использованием традиционных зависимых и независимых переменных эти течения описываются неоднородной системой уравнений, что существенно усложняет анализ осесимметричных дозвуковых течений. Как следствие, для этих течений имеется заметно меньше строгих результатов, чем для аналогичных плоских течений. Имеющиеся же результаты получены в основном с помощью анализа решений приближенных уравнений [3–7]. Поэтому можно ожидать, что переход к однородной системе, полученной ранее [1], даст дополнительные возможности для изучения осесимметричных течений.

Рассмотрим [1] функции $\alpha = u$ и $\beta = y\rho v$. Здесь и далее x и y – цилиндрические координаты (x – ось симметрии), u и v – компоненты вектора скорости, ρ – плотность, q и θ – модуль и угол наклона вектора скорости, c – скорость звука, $M = q/c$ – число Маха.

С использованием функций α и β рассматриваемые течения описываются следующей однородной системой [1]:

$$\begin{gathered}\left(1-M^2\right)\alpha_x - \frac{uv}{y\rho c^2}\beta_x + \frac{c^2-v^2}{y\rho c^2}\beta_y = 0\\ \frac{uv}{c^2}\alpha_x - \frac{c^2-v^2}{c^2}\alpha_y + \frac{\beta_x}{y\rho} = 0\end{gathered} \qquad (1.1)$$