УДК 532.5

© 1997 г. П.Я. Кочина

ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

Отмечается вклад Н.Е. Жуковского в теорию фильтрации. В качестве примера рассматриваются две задачи – об удлиненной циклоиде и укороченной циклоиде, решения которых могут быть получены с помощью введенной Н.Е. Жуковским функции.

Великий русский ученый Николай Егорович Жуковский известен главным образом своими работами по аэродинамике и гидродинамике. Но он уделил внимание [1–3] и "теории подпочвенных вод", т.е. теории фильтрации: наряду с работами [1, 2] у него есть работа [3], которая была опубликована лишь посмертно, в 1923 г.

Жуковский широко применял методы теории функций комплексного переменного в гидро- и аэромеханике, он ввел [3] функцию θ, которая получила название функции Жуковского и до сих пор позволяет решать ряд задач теории фильтрации. Эта функция комплексного переменного $z = x + iy$, где x и y – декартовы координаты точки, имеет вид

$$\theta = \omega - i\varkappa z, \qquad \varkappa = \text{const} \tag{1}$$

Здесь $\varkappa$ – коэффициент фильтрации грунта, который предполагается однородным, $\omega = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал, φ – потенциал скорости, ψ – функция тока.

Отделяя в (1) действительные и мнимые части, получим

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2, \quad \theta_1 = \varphi + \varkappa y, \quad \theta_2 = \psi - \varkappa x \tag{2}$$

Отметим, что функция Жуковского θ должна иметь вид (1) в предположении, что ось y направлена вертикально вверх и потенциал скорости имеет вид [4]

$$\varphi = -\varkappa h = -\varkappa(p/(\rho g) + y) \tag{3}$$

где p – давление, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, h – напор; если же ось y направлена вертикально вниз, то в формулах (1) и (3) необходимо сменить знак у величин z и y на противоположный.

Будем считать для определенности, что ось y направлена вертикально вверх.

Из формул (2) и (3) видно, что выражение

$$\theta_1 = \varphi + \varkappa y = -\varkappa p/(\rho g) \tag{4}$$

лишь постоянным множителем отличается от давления p.

Можно назвать комплексным давлением выражение $P = p + ip'$, где

$$\theta_2 = -\varkappa p'/(\rho g) \tag{5}$$

Тогда из (1), (4) и (5) следует формула

$$\theta = -\varkappa P/(\rho g)$$

Таким образом, в однородном грунте функция Жуковского θ пропорциональна комплексному давлению P.

На свободной поверхности грунтового потока давление равно атмосферному. При наличии капиллярности давление также постоянно, и если принять атмосферное давление равным нулю, то на границе капиллярной каймы $p = -\rho g h_c$, где h_c – высота капиллярного поднятия воды в грунте.

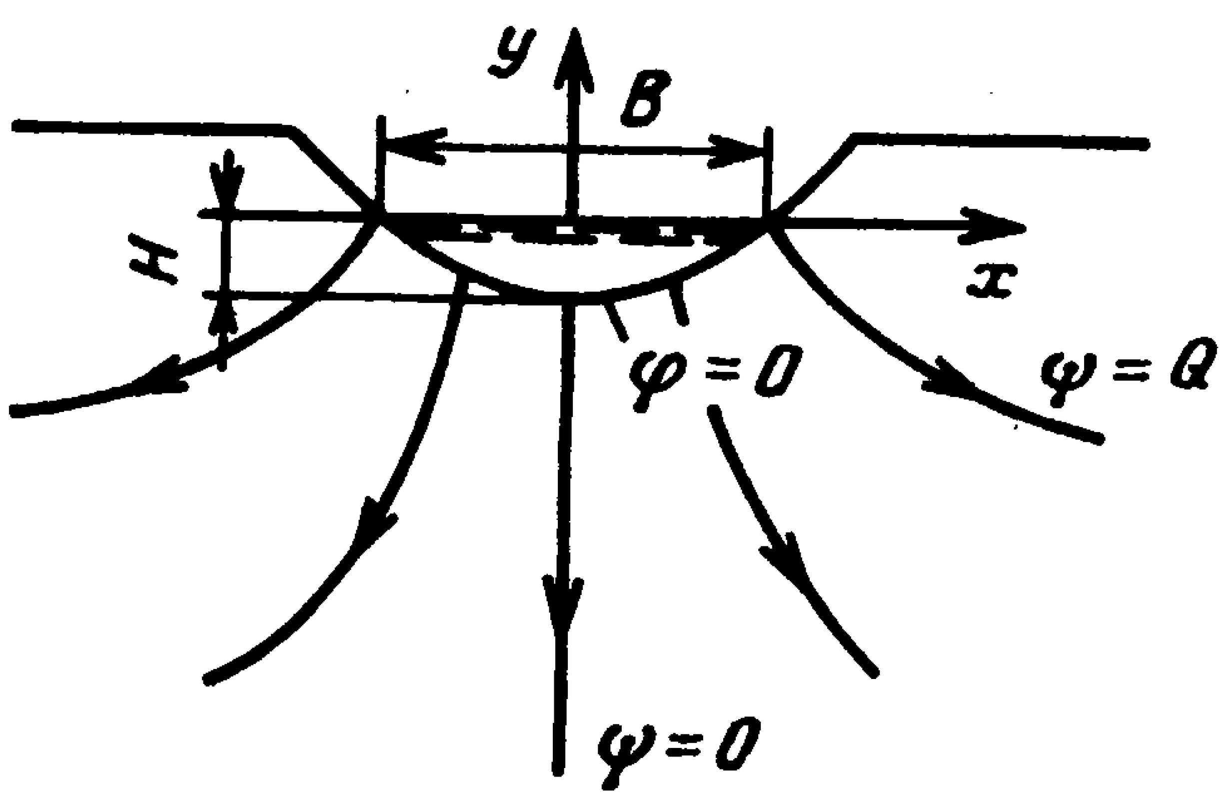
Пользуясь функцией θ, определенной формулой (1), сам Н.Е. Жуковский решил задачи о шпунте Жуковского и об одиночной дрене (дрене Жуковского) [3].

В качестве примера применения функции Жуковского здесь остановимся на каналах Козени криволинейного очертания и рассмотрим две задачи – об удлиненной циклоиде и укороченной циклоиде.

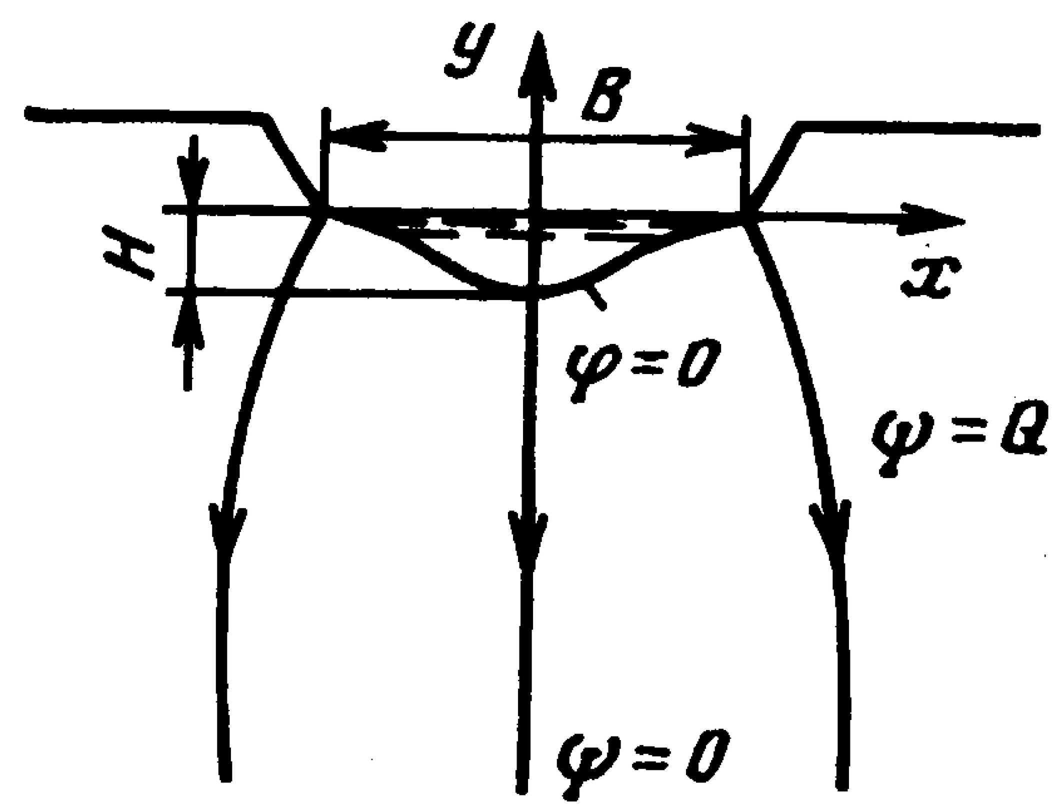
Эти два канала можно получить, предполагая, что функция Жуковского имеет вид [4, 5]

$$\theta = -\varkappa H \exp\left(\pm\frac{\pi\omega}{2Q}\right), \quad \varkappa = \text{const} \tag{6}$$

где знак плюс берется в случае удлиненной циклоиды, минус – в случае укороченной циклоиды. Функция θ определяется формулой (1), H – максимальная глубина канала.



Фиг. 1



Фиг. 2

Разделение в формулах (1) и (6) действительной и мнимой частей дает

$$x = \frac{\psi}{\varkappa} \pm H \exp\left(\pm\frac{\pi\varphi}{2Q}\right)\sin\frac{\pi\psi}{2Q}$$

$$y = -\frac{\psi}{\varkappa} - H \exp\left(\pm\frac{\pi\varphi}{2Q}\right)\cos\frac{\pi\psi}{2Q}$$

Уравнение правой ветви свободной поверхности получим, полагая $\psi = Q$, $\varphi = -\varkappa y$ (фиг. 1, 2)

$$x = \frac{Q}{\varkappa} \pm H \exp\left(\mp\frac{\pi\varkappa y}{2Q}\right)$$

Подставляя в (6) $\varphi = 0$, найдем кривые, которые можно принять за контур поперечного сечения канала:

$$x = \frac{\psi}{\varkappa} \pm H \sin\frac{\pi\psi}{2Q}, \quad y = -H\cos\frac{\pi\psi}{2Q} \tag{7}$$

Исключая параметр ψ из уравнений (7), получим зависимости

$$x = \pm\sqrt{H^2 - y^2} + \frac{2Q}{\varkappa\pi}\arccos\frac{y}{H} \tag{8}$$

Верхний знак дает удлиненную циклоиду (фиг. 1), нижний – укороченную циклоиду (фиг. 2). При этом течение рассматривается в правой полуплоскости и Q – расход из половины канала. Чтобы найти связь расхода с другими характеристиками задачи, положим в (6) $x = B/2$, $\varphi = 0$, $\psi = Q$ (B – ширина канала (фиг. 1, 2)). Тогда для полного расхода из канала получим

$$2Q = \varkappa(B \mp 2H) \tag{9}$$

Из (1) и (6) находим

$$\frac{dz}{d\omega} = -\frac{H\pi i}{2Q}\exp\left(\pm\frac{\pi\omega}{2Q}\right) - \frac{i}{\varkappa} \tag{10}$$

Для удлиненной циклоиды (случай верхнего знака) из (9) и (10) ясно, что решение имеет смысл лишь при $B > 2H$. Это движение с подпором, для него скорость на бесконечности равна нулю, что следует из (10) при $\varphi \to \infty$. Случай укороченной циклоиды (нижний знак, движение без подпора) доставляет больше разнообразия [6, 7].

Отметим, что задачу об укороченной циклоиде можно рассматривать как пример из теории фильтрации [8] задачи о конформном отображении на верхнюю полуплоскость кругового четырехугольника в предельном случае [9], а именно – кругового треугольника, две стороны которого равны, а все три угла прямые.

Приношу благодарность Н.Н. Кочиной за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н.Е.* Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод // Ж. Русск. физ.-хим. об-ва. 1889. Т. 21. № 1. С. 1–20; Собр., соч., Т. 3. М.: Гостехиздат. 1949. С. 184–206.
2. *Жуковский Н.Е.* О влиянии давления на насыщенные водою пески // Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествозн. 1890. Т. 3. Вып. 1. С. 52–55. Собр. соч., Т. 3. М.: Гостехиздат, 1949. С. 207–213.
3. *Жуковский Н.Е.* Просачивание воды через плотины // Опытно-мелиоративная часть НКЗ. 1923. Вып. 30. С. 30–52; Собр. соч. Т. 7. М.: Гостехиздат, 1950. С. 297–332.
4. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Гидромеханика подземных вод и вопросы орошения. М.: Наука, 1994. 238 с.
5. *Полубаринова–Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Kozeny J.* Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel Fluss- und Kanalversickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1931. Bd 26. H. 3. S. 28–31.
7. *Ведерников В.В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.; Л.: Госстройиздат, 1939. 248 с.
8. *Кочина П.Я., Кочина Н.Н.* Задачи о движениях со свободной поверхностью в подземной гидродинамике. М.: Редакция журнала "Успехи физических наук" РАН, 1996. 176 с.
9. *Полубаринова–Кочина П.Я.* О дополнительных параметрах на примерах круговых четырехугольников // ПММ. 1991. Т. 55, Вып. 2. С. 222–227.

Москва

Поступила в редакцию 29.X.1996

УДК 532.5:534.1

© 1997 г. С.В. Мелешко

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ТИПА ДВОЙНОЙ ВОЛНЫ

Исследуются неизэнтропические стационарные пространственные двойные волны уравнений идеального газа с уравнением состояния вида $\tau = g(p)A^2(S)$ в двух случаях, ранее [1] опущенных: при $H \neq 0$, $F'_2 = cF'_3$ и при $H = 0$ с прямыми линиями уровня.

Проведенный анализ завершает классификацию пространственных стационарных неизэнтропических двойных волн с произвольным уравнением состояния $\tau = \tau(p, S)$ при наличии функционального произвола в общем решении задачи Коши. Частные решения такого типа для политропного газа имеются в [2–5][1].

[1] См. также: *Зубов Е.Н.* Двойные волны для пространственных стационарных уравнений газовой динамики: Дисс...канд. физ.-матем. наук. Свердловск, 1978. 98 с.