УДК 539.3

© 1997 г. В. И. Горбачев, Б.Е. Победря

ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Дается определение эффективных характеристик в неоднородных средах, в том числе в композитах. Формулируется основная краевая задача и двойственная ей для определения эффективных характеристик в неоднородной среде, необязательно регулярной структуры. Приводится пример слоистой среды.

1. Понятие эффективных характеристик было введено при построении статистических теорий определения свойств неоднородных материалов [1]. Пусть линейный оператор L таков, что для уравнения

$$Lu = f \tag{1.1}$$

известен оператор Грина G: $LG = I$ (I – тождественный оператор). Тогда решение операторного уравнения (1.1) имеет вид $u = Gf$. Если входные данные f не являются случайными, то для среднего поля $\langle u\rangle$ имеем

$$\langle u\rangle = \langle G\rangle f \tag{1.2}$$

Эффективный оператор L^* определяется следующим образом:

$$L^*\langle u\rangle = f \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) получаем, что

$$L^* = \langle G\rangle^{-1}$$

т.е. задача осреднения стохастически неоднородных материалов сводится к построению осредненной функции Грина. Точно найти эту функцию чаще всего не представляется возможным, но имеется достаточное число приближенных подходов к этой проблеме [2–5].

Ниже осуществляется детерминированный подход к проблеме эффективных характеристик тепловых, электрических, магнитных и отчасти упругих свойств неоднородных материалов, в том числе композитов.

2. Пусть в некотором теле, имеющем объем V и ограниченном замкнутой поверхностью Σ, дана конкретизация операторного уравнения (1.1) для некоторой величины u в виде уравнения и граничного условия

$$\left[C_{ij}(x)u_{,j}\right]_{,i} + f(x) = 0 \tag{2.1}$$

$$u\big|_\Sigma = u^0(y), \quad y \in \Sigma \tag{2.2}$$

Будем считать всегда, что $x \equiv x_1,\ x_2,\ x_3; \xi \equiv \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in V$ и $y,\ \eta \in \Sigma$. По повторяющемуся индексу, обозначенному малой латинской буквой, проводится суммирование от

1 до 3, а по индексу, обозначенному большой латинской буквой, – от 1 до 2. Для частных производных принимаем обозначения $\varphi_{,i} \equiv \partial\varphi / \partial x_i$, $\varphi_{|i} \equiv \partial\varphi / \partial\xi_i$. Угловыми скобками будем обозначать среднее значение величины по объему с указанием, если это необходимо, переменной, по которой происходит осреднение:

$$\langle\varphi(x,\xi)\rangle_x \equiv \frac{1}{V}\int_V \varphi(x,\xi)dV_x$$

Задача (2.1), (2.2) называется первой краевой задачей (задачей 1).

Если на границе тела Σ задано условие

$$C_{ij}u_{,j}n_i\big|_\Sigma = S_0(y) \tag{2.3}$$

где n_i – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности Σ, то задача (2.1), (2.3) называется второй краевой задачей.

Для двойственной формулировки второй краевой задачи введем величину

$$\varepsilon_i \equiv u_{,i} \tag{2.4}$$

и определяющие соотношения

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j,\ \ \varepsilon_i = J_{ij}\sigma_j,\ \ C_{ij}J_{jk} = J_{ij}C_{jk} = \delta_{ik} \tag{2.5}$$

где C_{ij} и J_{ij} – компоненты положительно определенных взаимообратных тензоров второго ранга [6]. Если они зависят от координат ($C_{ij} = C_{ij}(x)$, $J_{ij} = J_{ij}(x)$), то среда называется неоднородной, а если эти функции разрывны, то неоднородная среда называется композитом [5].

Используя обозначения (2.4), (2.5), уравнение (2.1) и граничное условие (2.3) можно переписать в виде

$$\sigma_{i,i}(x) + f(x) = 0 \tag{2.6}$$

$$\sigma_i n_i\big|_\Sigma = S_0(y) \tag{2.7}$$

К уравнению (2.6) следует добавить так называемое уравнение совместности, которое, используя (2.5), можно записать в виде

$$\in_{ilk}\left[J_{jl}(x)\sigma_l(x)\right]_{,k} = 0 \tag{2.8}$$

Вторая краевая задача в двойственной формулировке задается уравнениями (2.6), (2.8) и граничным условием (2.7) (задача 2).

Не будем останавливаться на условиях разрешимости поставленных краевых задач и на существовании обобщенного решения в случае композиционной среды (см. [7]). Заметим, что если под $u(x)$ понимать температурное поле, то $C_{ij}(x)$ – компоненты тензора теплопроводности, $\sigma_i(x)$ – компоненты теплового потока, а $\varepsilon_i(x)$ – градиента температуры, $f(x)$ – плотность массового теплового источника. Если $u(x)$ – электростатический потенциал, то $C_{ij}(x)$ – компоненты тензора электрической проницаемости, $\varepsilon_i(x)$ – компоненты вектора электрической напряженности, а $\sigma_i(x)$ – электрической индукции. Можно дать указанным величинам трактовку магнитного поля, а при повышении ранга тензоров – и упругого поля (о чем пойдет речь в разд. 6).

Для определения эффективных тензоров, компоненты которых обозначены соответственно через C^*_{ij} и J^*_{ij}, сформулируем первую и вторую краевые задачи со специальными граничными условиями и при отсутствии внешнего поля [8].

Первая специальная краевая задача (задача 1_0) заключается в решении однородного уравнения (2.1), при выполнении граничных условий (2.2) в виде

$$u\big|_\Sigma = \gamma_i y_i,\ \ \gamma_i = \text{const} \tag{2.9}$$

Вторую специальную краевую задачу (задачу 2_0) дадим в двойственной формулировке. Она заключается в решении однородного уравнения (2.6) при выполнении условия совместности (2.8) и граничного условия (2.7) в виде

$$\sigma_i n_i|_\Sigma = \tau_i n_i(y), \quad \tau_i = \text{const} \qquad (2.10)$$

Известны [5] тождества для краевых задач 1 и 1_0:

$$\langle \varepsilon_i(x) \rangle = \frac{1}{V} \int_\Sigma u_0(y) n_i(y) d\Sigma_y = \gamma_i$$

и для краевых задач 2 и 2_0:

$$\langle \sigma_i(x) \rangle = \frac{1}{V} \int_\Sigma S_0(y) y_i d\Sigma_y + \langle f(x) x_i \rangle = \tau_i$$

Из решения краевой задачи 1_0 находим компоненты эффективного тензора C^*_{ij}

$$\langle \sigma_i(x) \rangle = C^*_{ij} \gamma_j \qquad (2.11)$$

а из решения краевой задачи 2_0 – компоненты эффективного тензора

$$\langle \varepsilon_i(x) \rangle = J^*_{ij} \tau_j \qquad (2.12)$$

Основная гипотеза, принимаемая в механике композитов, утверждает, что для статистически однородной среды тензоры с компонентами C^*_{ij} и J^*_{ij} взаимообратны [2],

3. Точные значения эффективных тензоров найдены лишь для небольшого класса композитов [2]. Это связано чаще всего с трудностью решения сформулированных специальных краевых задач 1_0 и 2_0.

Развиваемый в последнее время в ряде работ метод осреднения [5, 9, 10] позволил несколько расширить круг точно найденных эффективных характеристик благодаря более удобной формулировке задач для их определения [5, 11–13]. Это касается так называемых периодических структур [5, 9], ибо методика осреднения применима именно к таким структурам. Однако было замечено, что найденные эффективные модули упругости, например, для слоистых композитов периодической структуры, и даже микронапряжения (напряжения в каждом компоненте композита) оказываются справедливыми для произвольной неоднородности по одной координате [5].

Цель данной работы – формулировка специальных краевых задач для нахождения эффективных характеристик сред с произвольной неоднородностью, удобная для исследования. Граничные условия (если они есть) таких специальных краевых задач должны быть однородными, а свободный член уравнений зависеть от $C_{ij}(x)$ или $J_{ij}(x)$, т.е. характеризовать неоднородность структуры рассматриваемого материала.

Предположим, что известна функция Грина краевой задачи 1 $G(x, \xi)$ и краевой задачи 2_0 $\tilde{G}(x,\xi)$:

$$\left[C_{ij}(x)\tilde{G}_{,j}(x,\xi)\right]_{,i} = -\delta(x-\xi) \qquad (3.1)$$

$$C_{ij}(y)\tilde{G}_{,j}(y,\xi)n_i(y)|_\Sigma = 0$$

Введем также обозначения

$$E_i(x,\xi) \equiv G_{,i}(x,\xi), \quad \Gamma_i(x,\xi) \equiv C_{ij}(x)G_{,j}(x,\xi) \qquad (3.2)$$

$$\tilde{E}_i(x,\xi) \equiv \tilde{G}_{,i}(x,\xi), \quad \tilde{\Gamma}_i(x,\xi) \equiv C_{ij}(x)\tilde{G}_{,j}(x,\xi) \qquad (3.3)$$

Заметим, что из (3.1) и (3.3) следует, что

$$\left\langle \tilde{\Gamma}_i(x,\xi) \right\rangle_x = \frac{1}{V}\xi_i, \ \left\langle \tilde{\Gamma}_{i|j}(x,\xi) \right\rangle_x = \frac{1}{V}\delta_{ij} \tag{3.4}$$

Решение первой краевой задачи 1 может быть выражено через функцию Грина $G(x, \xi)$ с учетом (3.2):

$$u(\xi) = -\int_{\Sigma} \Gamma_i(y,\xi) n_i(y) u_0(y) d\Sigma_y + \int_V G(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_j(\xi) = -\int_{\Sigma} \Gamma_{i|j}(y,\xi) n_i(y) u_0(y) d\Sigma_y + \int_V E_j(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.6}$$

$$\sigma_j(\xi) = -C_{jk}(\xi)\int_{\Sigma} \Gamma_{i|k}(y,\xi) n_i(y) u_0(y) d\Sigma_y + \int_V \Gamma_j(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.7}$$

а решение второй краевой задачи (2.1), (2.3) (задачи 2) – через функцию Грина $\tilde{G}(x,\xi)$ с учетом (3.3):

$$u(\xi) = \int_{\Sigma} \tilde{G}(y,\xi) S_0(y) d\Sigma_y + \int_V \tilde{G}(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_i(\xi) = \int_{\Sigma} \tilde{G}_{|i}(y,\xi) S_0(y) d\Sigma_y + \int_V \tilde{E}_i(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.9}$$

$$\sigma_i(\xi) = C_{ij}(\xi)\int_{\Sigma} \tilde{G}_{|j}(y,\xi) S_0(y) d\Sigma_y + \int_V \tilde{\Gamma}_i(x,\xi) f(x) dV_x \tag{3.10}$$

Воспользуемся формулами (3.5) – (3.7) для краевой задачи 1_0. Применяя теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$u(\xi) = \left[\xi_j - V\left\langle \Gamma_j(x,\xi) \right\rangle_x\right]\gamma_j \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_i(\xi) = \gamma_i - V\left\langle \Gamma_{j|i}(x,\xi) \right\rangle_x \gamma_j$$

$$\sigma_i(\xi) = \left[C_{ij}(\xi) - VC_{ik}(\xi)\left\langle \Gamma_{j|k}(x,\xi) \right\rangle_x\right]\gamma_j \tag{3.12}$$

Сравнивая формулы (2.11) и (3.12), находим

$$C^*_{ij} = \left\langle C_{ij}(\xi) - VC_{ik}(\xi)\left\langle \Gamma_{j|k}(x,\xi) \right\rangle_x \right\rangle_\xi \tag{3.13}$$

Точно так же воспользуемся формулами (3.8) – (3.10) для второй специальной краевой задачи 2_0. Используя теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$u(\xi) = \tau_j V\left\langle \tilde{E}_j(x,\xi) \right\rangle_x, \ \varepsilon_i(x) = \tau_j V\left\langle \tilde{E}_{j|i}(x,\xi) \right\rangle_x \tag{3.14}$$

$$\sigma_i(\xi) = \tau_j VC_{ik}(\xi)\left\langle \tilde{E}_{j|k}(x,\xi) \right\rangle_x \tag{3.15}$$

Сравнивая формулу (2.12) и вторую формулу (3.14), находим

$$J^*_{ij} = V\left\langle \left\langle \tilde{E}_{j|i}(x,\xi) \right\rangle_x \right\rangle_\xi \tag{3.16}$$

Видно, что тензоры с компонентами (3.13) и (3.16) симметричны. Можно показать, что они являются положительно определенными.

Заметим, что с помощью функций Грина могут быть построены интегральные операторы на границе тела, являющиеся континуальным аналогом матриц А.А. Ильюшина [7]

$$u_0(\eta)=\int_\Sigma \tilde{G}(y,\eta)S_0(y)d\Sigma_y$$

$$S_0(\eta)=-n_j(\eta)C_{jk}(\eta)\int_\Sigma \Gamma_{i|k}(y,\eta)n_i(y)u_0(y)d\Sigma_y$$

4. Перейдем к формулировке краевой задачи для нахождения компонент эффективного тензора C^*_{ij} (3.9). Обозначим

$$N_i(\xi)\equiv -V\langle\Gamma_i(x,\xi)\rangle_x \tag{4.1}$$

Тогда из формулы (3.13) следует

$$C^*_{ij}=\langle C_{ij}(\xi)+C_{ik}(\xi)N_{j|k}(\xi)\rangle \tag{4.2}$$

Воспользуемся теперь обозначением (4.1) и подставим выражения $u(\xi)$ и $\sigma_i(\xi)$ из формул (3.14), (3.12) в однородное уравнение (2.1) и условие (2.9). Учитывая произвольность величин γ_i, получаем искомую формулировку краевой задачи для величин N_i

$$\left[C_{ik}(\xi)N_{j|k}(\xi)\right]_{|i}+C_{ij|i}(\xi)=0 \tag{4.3}$$

$$N_i(\eta)|_\Sigma=0 \tag{4.4}$$

В самом деле, правая часть уравнения (4.3) зависит от $C_{ij}(\xi)$, а граничное условие (4.4) – однородное. Следовательно, решение задачи (4.3), (4.4) связано со структурой материала.

Пусть, например, C_{ij} зависят от одной координаты $\xi_3=\zeta$. Тогда (4.3) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left[C_{33}(\zeta)N'_j(\zeta)\right]'+C'_{3j}(\zeta)=0 \tag{4.5}$$

где штрих означает производную по ζ. Граничное условие (4.4) принимает вид

$$N_i(0)=N_i(l)=0 \tag{4.6}$$

Решение задачи (4.5), (4.6) таково:

$$N_j(\zeta)=\left\langle\frac{1}{C_{33}}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{C_{3j}}{C_{33}}\right\rangle\int_0^\zeta\frac{dz}{C_{33}(z)}-\int_0^\zeta\frac{C_{3j}(z)}{C_{33}(z)}dz \tag{4.7}$$

Из (4.7) и (4.2) получаем

$$C^*_{ij}=\langle C_{ij}\rangle-\left\langle\frac{C_{3i}C_{3j}}{C_{33}}\right\rangle+\left\langle\frac{C_{3i}}{C_{33}}\right\rangle\left\langle\frac{1}{C_{33}}\right\rangle^{-1}\left\langle\frac{C_{3j}}{C_{33}}\right\rangle \tag{4.8}$$

Для изотропной среды, т.е. для $C_{ij}(\zeta)=\lambda(\zeta)\delta_{ij}$ и из (4.8) имеем

$$C^*_{ij}=\langle\lambda\rangle\delta_{ij}+\left[\left\langle\frac{1}{\lambda}\right\rangle^{-1}-\langle\lambda\rangle\right]\delta_{3i}\delta_{3j} \tag{4.9}$$

5. Рассмотрим краевую задачу 2o для нахождения компонент эффективного тензора J^*_{ij}. Обозначим

$$M_i(\xi) \equiv V\left\langle \tilde{E}_i(x,\xi)\right\rangle_x \tag{5.1}$$

Из формулы (3.16) следует, что

$$J^*_{ij} = \left\langle M_{j|i}\right\rangle \tag{5.2}$$

Воспользуемся обозначением (5.1) и подставим выражение (3.15) в однородное уравнение (2.6) и условие (2.10). Получим

$$\tau_k\left[C_{ij}(\xi)M_{k|j}(\xi)\right]_{|i} = 0$$

$$\tau_j C_{ik}(\eta)M_{j|k}(\eta)n_i(\eta)\Big|_\Sigma = \tau_j n_j(\eta)$$

Уравнение совместности удовлетворяется тождественно. Воспользовавшись произвольностью величин τ_j, получим для $M_k(\xi)$ уравнение и граничное условие, которые, введя величину

$$P_{ij}(\xi) \equiv C_{ik}(\xi)M_{j|k}(\xi) \tag{5.3}$$

запишем в виде

$$P_{ik|i}(\xi) = 0, \quad P_{ik|i}(\eta)n_i(\eta) = n_k(\eta) \tag{5.4}$$

Уравнение совместности (2.8) запишется в форме

$$\in_{ijk}\left[J_{jl}(\xi)P_{lm}(\xi)\right]_{|k} = 0 \tag{5.5}$$

Из (3.4), (5.5) и (5.1) следует, что

$$\left\langle P_{ij}(\xi)\right\rangle = \delta_{ij} \tag{5.6}$$

а из (5.2) и (5.3):

$$J^*_{ij} = \left\langle J_{ik}(\xi)P_{kj}(\xi)\right\rangle \tag{5.7}$$

Однако и краевая задача (5.4) – (5.6) также не удовлетворяет требованиям, сформулированным в разд. 3 для получения эффективных характеристик. Поэтому введем новые величины L_{ij}

$$P_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \in_{ikl} L_{jk|l}(\xi) \tag{5.8}$$

Уравнение (5.4) после подстановки в него (5.8) удовлетворяется тождественно. Уравнение совместности (5.5) принимает вид

$$\in_{ijk}\in_{pmn}\left[J_{jp}(\xi)L_{lm|n}(\xi)\right]_{|k} + \in_{ijk} J_{jl|k}(\xi) = 0 \tag{5.9}$$

т.е. его правая часть зависит только от $J_{ij}(\xi)$. Граничное условие (5.4) после подстановки в него (5.8)

$$n_i(\eta)\in_{ijk} L_{lj|k}(\eta)\Big|_\Sigma = 0 \tag{5.10}$$

становится однородным. Следовательно, краевая задача (5.9), (5.10) отвечает поставленным требованиям. Из (5.7) определяем эффективные характеристики

$$J^*_{ij} = \left\langle J_{ij}(\xi) + \in_{klm} J_{ik}(\xi)L_{jl|m}(\xi)\right\rangle \tag{5.11}$$

а из (5.6) следует

$$\in_{ikl}\left\langle K_{jkl I}(\xi)\right\rangle=0 \tag{5.12}$$

Рассмотрим случай, когда J_{ij} зависит от одной координаты, например, $\xi_3=\zeta$. Уравнение (5.9) становится в этом случае обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\in_{IJ}\in_{PM}\left[J_{JP}(\zeta)L'_{IM}\right]'+\in_{IJ}\,J'_{JI}(\zeta)=0 \tag{5.13}$$

а граничное условие (5.10):

$$n_I\varepsilon_{IJ}L'_{IJ}(\zeta)\big|_\Sigma=0$$

не накладывает ограничений на зависимость $L_{ij}(\zeta)$. Однако имеем ограничения на эти функции, вытекающие из (5.12):

$$\in_{IK}\left\langle L_{jK}(\zeta)\right\rangle=0 \tag{5.14}$$

Решая уравнение (5.13) при удовлетворении условиям (5.14), находим

$$\in_{IK}\,L'_{jK}(\zeta)=J^{-1}_{IJ}(\zeta)\left\langle J^{-1}_{JK}\right\rangle^{-1}\left\langle J^{-1}_{KL}J_{Lj}\right\rangle-J^{-1}_{IJ}(\zeta)J_{Jj}(\zeta)$$

где J^{-1}_{IJ} – элементы матрицы 2×2, обратной к матрице с элементами J_{IJ}.

Из (5.11) получаем

$$J^*_{ij}=\left\langle J_{ij}(\zeta)+\in_{KL}\,J_{iK}(\zeta)L'_{jL}\right\rangle=\left\langle J_{ij}\right\rangle+\left\langle J_{iI}J^{-1}_{IJ}\right\rangle\left\langle J^{-1}_{JK}\right\rangle^{-1}\left\langle J^{-1}_{KL}J_{Lj}\right\rangle-\left\langle J_{iI}J^{-1}_{IJ}J_{Jj}\right\rangle \tag{5.15}$$

Для изотропной среды, т.е. при

$$J_{ij}(\zeta)=\delta_{ij}\,/\,\lambda(\zeta)$$

из (5.15) имеем

$$J^*_{ij}=\frac{1}{\langle\lambda\rangle}\delta_{ij}+\left(\left\langle\frac{1}{\lambda}\right\rangle-\frac{1}{\langle\lambda\rangle}\right)\delta_{3i}\delta_{3j}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что тензоры (4.9) и (5.15) взаимообратны, т.е. основная гипотеза, сформулированная в разд. 2 для сред с одномерной неоднородностью, выполняется.

6. Для получения эффективных модулей упругости и эффективных упругих податливостей уравнения несколько усложняются. Приведем только окончательную формулировку краевых задач (подробности см. в [14]).

Компоненты эффективного тензора модулей упругости получаются осреднением выражения

$$C^*_{ijkl}=\left\langle C_{ijkl}(\xi)+C_{ijmn}(\xi)N_{mkl|n}(\xi)\right\rangle$$

Величины N_{ijk} определяются из системы дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\left[C_{ijkl}(\xi)+C_{ijmn}(\xi)N_{mkl|n}(\xi)\right]_{|j}=0,\quad N_{mkl|_\Sigma}=0$$

Для нахождения компонент эффективного тензора упругих податливостей требуется осреднить выражение

$$J^*_{ijkl}=\left\langle J_{ijkl}(\xi)+\in_{mpr}\in_{nqs}\,J_{ijmn}(\xi)L_{pqkl|rs}(\xi)\right\rangle$$

Величины L_{pqkl} удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\in_{tiw}\in_{uvj}\left[J_{ijkl}(\xi)+\in_{mpr}\in_{nqs}\,J_{ijmn}(\xi)L_{pqkl|rs}(\xi)\right]_{|vw}=0$$

$$\in_{ipr}\in_{jqs}\,L_{pqkl|rs}n_j(\eta)\Big|_{\Sigma}=0$$

Кроме того, величины L_{pqkl} должны удовлетворять условиям

$$\in_{ipr}\in_{jqs}\left\langle L_{pqkl|rs}(\xi)\right\rangle=0$$

Для случая, когда модули C_{ijkl} зависят только от одной координаты, эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей получаются точно такими, как для слоистой среды, причем они являются взаимообратными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-0084).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 11. С. 967–980.
2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. М.: Мир, 1978. 564 с.
3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1962. 334 с.
4. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 303 с.
5. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
7. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 313 с.
8. *Победря Б.Е.* Эффективные характеристики композитов // Композитные материалы и конструкции. 1993. № 1. С. 26–35.
9. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
11. *Победря Б.Е., Горбачев В.И.* О статических задачах упругих композитов // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1977. № 5. С. 101–110.
12. *Победря Б.Е., Мольков В.А.* Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 119–130.
13. *Мольков В.А., Победря Б.Е.* Эффективные модули упругости волокнистых и слоисто-волокнистых композитов // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 41–63.
14. *Горбачев В.И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. Вып. 2. С. 61–76.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1995