

УДК 539.3:534.1

© 1997 г. Н.И. Гвоздовская, А.Г. Куликовский

## ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ И ИХ СТРУКТУРЕ В АНИЗОТРОПНЫХ МАГНЕТИКАХ

Обосновывается и используется аналогия между нелинейными электромагнитными волнами в намагничивающихся средах и нелинейными упругими волнами в анизотропных средах. Аналогия имеет место в случае неучета дисперсии и диссипации. Это позволяет, опираясь на уже известные результаты [1], сразу сформулировать все, что относится к исследованию соотношений в волнах Римана и на электромагнитных ударных волнах (УВ). Для описания структуры электромагнитных УВ в магнетиках используется уравнение Ландау–Лифшица, которое существенным образом отличается от соотношений, используемых для описания структуры УВ в упругих средах. Это приводит к тому, что множество допустимых (т.е. имеющих структуру) УВ приобретает сложное строение и существенно отличается от аналогичного множества для упругих УВ. В частности, ниже показано, что множество допустимых электромагнитных УВ не совпадает с множеством изначально эволюционных разрывов. Требование существования структуры выделяет на некоторых частях ударной адиабаты множество, представляющее собой штриховую линию с очень короткой длиной штриха. Кроме того, на ударной адиабате электромагнитных УВ имеется большое количество отдельных точек. Каждая точка соответствует разрыву с выделенной скоростью движения, этим напоминающему фронт медленного горения в газовой динамике.

**1. Электромагнитные ударные волны в намагничивающихся средах. Аналогия с упругими волнами.** Электромагнитные УВ в средах подробно изучались (см. например [2–4]) в случае плоскополяризованных волн, когда магнитное поле до и после разрыва и вектор нормали к поверхности разрыва лежат в одной плоскости. В случае неэлектропроводной неполяризуемой среды уравнения, описывающие непрерывные одномерные волны, и соотношения на разрывах могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_3}{\partial x} = 0$$

$$W[\varepsilon_\alpha] + [H_\alpha] = 0, \quad [B_3] = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$$

$$W[B_\alpha] + [\varepsilon_\alpha] = 0, \quad [E_3] = 0$$

Индекс  $\alpha$  принимает значения 1 или 2,  $\varepsilon_1 = E_2$ ,  $\varepsilon_2 = -E_1$ ;  $E_i$ ,  $H_i$ ,  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей, а также магнитной индукции в декартовой системе координат. Для простоты считается, что электрическая индукция не отличается от электрического поля. Случай, когда диэлектрическая проницаемость среды скалярна и постоянна, легко сводится к рассматриваемому. Ось  $x_3$  выбрана по нормали к фронту волны. В (1.1) и далее индекс  $u$

$x_3$  не пишется, т.е.  $x_3 \equiv x$ . Переменные  $x$  и  $t$  выбраны так, что скорость света равна единице. Квадратными скобками обозначается скачок величины на разрыве  $[B_\alpha] = B_\alpha^+ - B_\alpha^-$ , где индекс минус соответствует состоянию перед разрывом, а плюс – состоянию за разрывом;  $W$  – скорость движения разрыва,  $W < 1$ . Для удобства (и для простоты сравнения с упругими волнами) выберем единицы измерения так, чтобы численные значения величин  $E_i, H_i, B_i$  были в  $\sqrt{4\pi}$  раз большими, чем в гауссовой системе единиц. Тогда энергию единицы объема среды (среда неподвижна и находится в состоянии термодинамического равновесия), а также выражения для  $H_\alpha$  можно записать в виде

$$U(E_\alpha, B_\alpha, s) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \Phi(B_\alpha) + T(s - s_0), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$H_\alpha = \partial\Phi/\partial B_\alpha \quad (1.3)$$

Характер зависимости  $U$  от энтропии  $s$  единицы объема среды, принятый в (1.2), обусловлен тем, что для простоты ниже будут рассматриваться процессы с достаточно малыми изменениями энтропии. В частности, будут рассматриваться электромагнитные УВ умеренной амплитуды. Неотрицательность изменения  $s$  будет использоваться далее как одно из правил отбора допустимых разрывов.

Уравнения (1.1)–(1.3) с точностью до обозначений совпадают с аналогичными соотношениями для несжимаемой однородной упругой среды [1, 5]. Для полного совпадения достаточно заменить  $\varepsilon_\alpha$  на  $v_\alpha$  (скорость среды,  $v_3 = 0$ ),  $B_\alpha$  на  $u_\alpha$  ( $u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x$  – мера деформации среды,  $w_\alpha$  – компоненты вектора перемещений,  $u_3 = 0$ ),  $H_\alpha$  на  $\sigma_{3\alpha} / \rho_0$  ( $\rho_0$  – плотность среды,  $\sigma_{3\alpha}$  – компоненты тензора напряжений). Под  $U$  и  $s$  в случае упругих волн следует понимать энергию и энтропию единицы массы среды.

Во многих случаях энергия магнитного поля в среде задается в виде, пригодном как для термодинамически равновесных, так и для неравновесных состояний. Считается, что эта энергия является функцией двух аргументов,

$$\Phi_m = \Phi_m(B_i, M_k), \quad M_i = B_i - H_i, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

Компоненты вектора намагничивания  $M_i$  определены выше так, что их численные значения в  $\sqrt{4\pi}$  раз меньше, чем в гауссовой системе единиц. Энергия магнитного поля в равновесных состояниях (в частности, до и после разрыва) имеет вид

$$\Phi(B_i) = \min_{M_k} \Phi_m(B_i, M_k), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

а  $M_k$  при заданных значениях  $B_i$  находятся из уравнений

$$\partial\Phi_m/\partial M_k = 0 \quad (1.6)$$

В случае, когда магнитное поле превышает порог насыщения, и при достаточно низких температурах можно считать, что вектор намагничивания постоянен по модулю:  $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$  [6–8]. В дальнейшем  $M_\alpha$  будут считаться независимыми величинами, а  $M_3 = \sqrt{M^2 - M_1^2 - M_2^2}$ . Если энергия магнитного поля в основном определяется взаимной ориентацией векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{M}$  и слабо зависит от взаимодействия вектора  $\mathbf{M}$  и среды (это типичный случай [6, 7]), то с учетом равенств  $B_3 = \text{const}$ ,  $M = \text{const}$ , выражение для внутренней энергии с точностью до постоянной можно записать в виде [6, 7]

$$\Phi_m(B_\alpha, M_\alpha) = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2) - B_\alpha M_\alpha - B_3 \sqrt{M^2 - M_1^2 - M_2^2} + g\phi(M_\alpha) \quad (1.7)$$

Вид функции  $\varphi(M_\alpha)$  определяется свойствами материала. Здесь  $g$  – малый параметр, характеризующий взаимодействие среды и вектора намагничивания. В дальнейшем членами порядка  $g^2$  будем пренебрегать. Два средних члена в правой части (1.7) представляют собой скалярное произведение, причем для сравнения со стандартной записью этого члена, заметим, что  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \text{const}$ , поскольку  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$ ,  $M^2 = \text{const}$ . В выражении (1.7) не выписаны члены, выражающие зависимость энергии от пространственных производных векторов, характеризующих магнитное поле. Этими членами будем пренебрегать, поскольку в дальнейшем предполагается рассмотрение решений, медленно зависящих от координат (характерный линейный размер решения должен быть много больше типичной толщины доменной стенки  $l_* \approx 10^{-6}$  см). Из (1.7) и (1.5) при учете первого равенства (1.4) следует

$$\partial \Phi_m / \partial B_\alpha = \partial \Phi / \partial B_\alpha = B_\alpha - M_\alpha = H_\alpha \quad (1.8)$$

т.е. выполняются равенства (1.3).

Пользуясь малостью  $g$  и равенством (1.5), из (1.7) получим

$$\Phi(B_\alpha) = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2) - M\sqrt{B_3^2 + B_1^2 + B_2^2} + g\varphi^*(B_\alpha) \quad (1.9)$$

Здесь  $\varphi^*$  – значение  $\varphi(M_\alpha)$  при условии параллельности векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{B}$  (члены порядка  $g^2$  и выше не учитываются).

При малых значениях  $B_\alpha$  функцию  $\Phi$ , заданную равенством (1.9), можно разложить в ряд по степеням  $B_\alpha$ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{M}{B_3} \right) (B_1^2 + B_2^2) + \frac{M}{8B_3^3} (B_1^2 + B_2^2)^2 + \frac{g_1}{2} (B_2^2 - B_1^2) \quad (1.10)$$

В последнем слагаемом, происходящем от  $g\varphi^*$ , ввиду малости  $g$  оставлены только члены квадратичные по  $B_\alpha$  (линейные члены на поведение разрывов не влияют и опущены), причем член  $B_1B_2$  уничтожен поворотом системы координат, а член, содержащий  $B_1^2 + B_2^2$ , отброшен как малый по сравнению с первым членом в (1.10).

Существуют такие материалы (например, ферромагнитный кубический кристалл), для которых  $\varphi^*(B_\alpha)$  имеет вид квадратичной формы относительно  $B_1, B_2$  без предположения о малости  $B_\alpha$  [6].

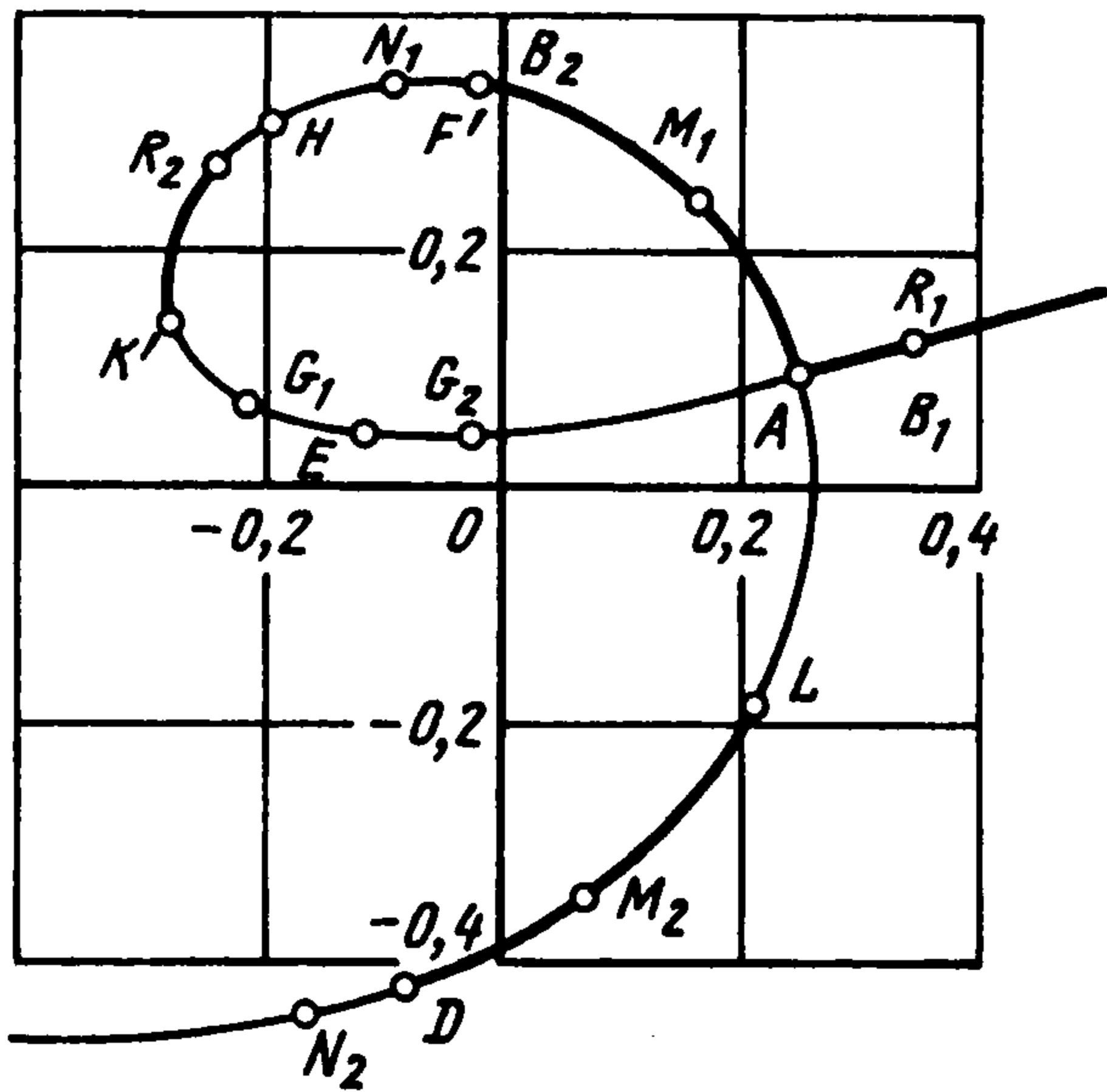
Для случая, когда  $\Phi$  имеет вид разложения по степеням своих аргументов, теория разрывов для упругих сред была развита в [1, 9, 10] (случай  $\kappa < 0$ ). Для произвольных функций  $\Phi$  и  $\varphi$  исследование разрывов проведено в [5] (см. также [1]).

Приведем здесь некоторые необходимые для дальнейшего результаты, относящиеся к случаю, когда  $g\varphi^*(B_\alpha) = g_1(B_2^2 - B_1^2)/2$ . Как можно заключить из [5], эти результаты не зависят от возможности представления первых двух слагаемых в (1.9) в виде разложения (1.10), однако существенно опираются на предположенный выше вид функции  $\varphi^*(B_\alpha)$ . Если зафиксировать значения  $B_\alpha^-$ , то состояния  $B_\alpha^+$ , удовлетворяющие соотношениям на разрыве (1.1), при всевозможных  $W$  составят кривую на плоскости  $B_1B_2$ , которую естественно назвать ударной адиабатой. Наиболее интересным для дальнейшего является вариант, когда начальная точка  $A(B_1^-, B_2^-)$  достаточно близка к началу координат, так что  $(B_1^-)^2 + (B_2^-)^2 < g/\kappa$ . Ударная адиабата для этого случая изображена на фиг. 1.

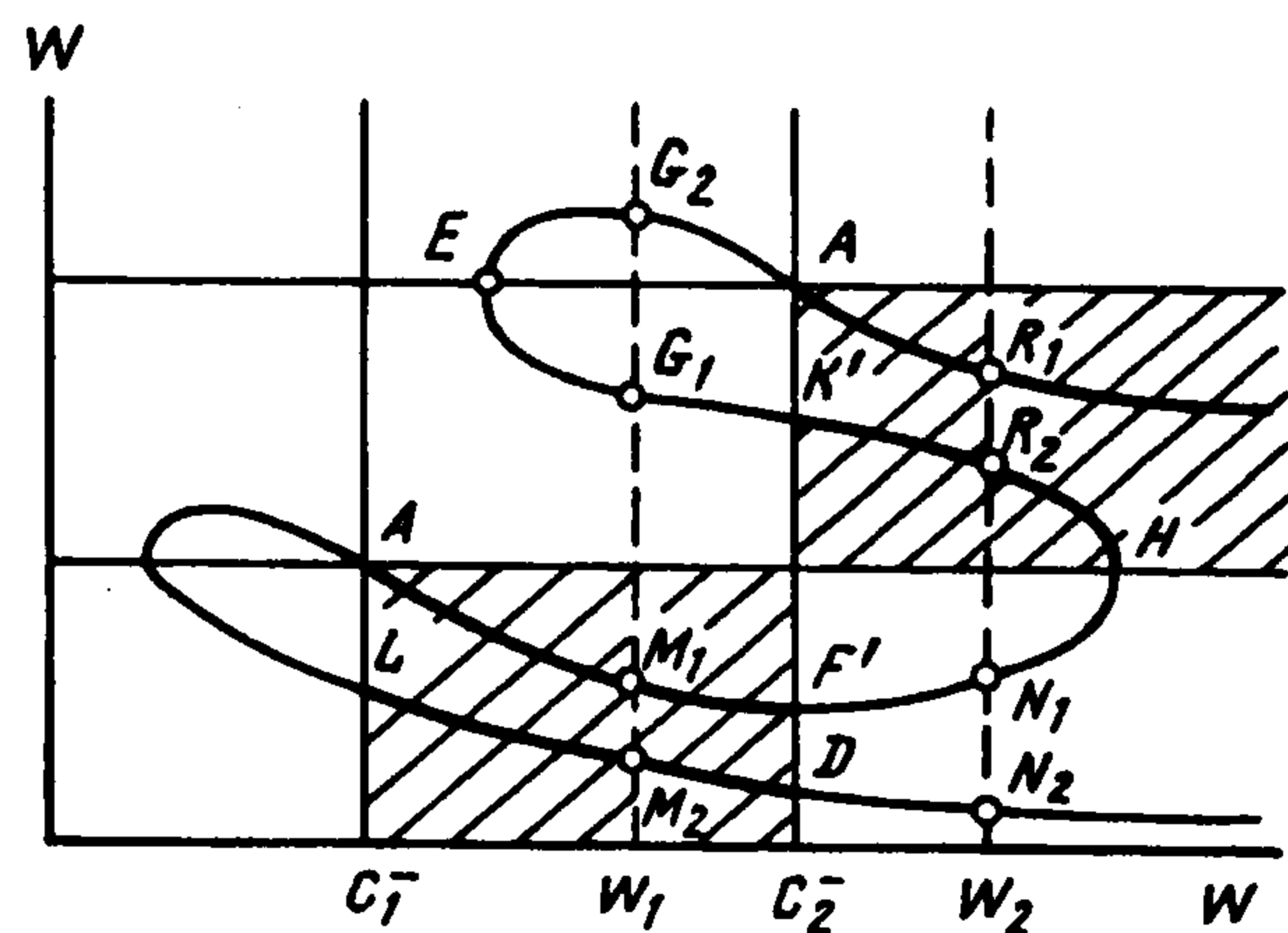
Отображение ударной адиабаты на плоскость скоростей (или "диаграмму эволюционности") изображено на фиг. 2.

На фиг. 2 по горизонтальной оси откладывается скорость разрыва  $W$ , на оси обозначены значения  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$  характеристических скоростей системы (1.1) в состоянии  $B_1^-, B_2^-$ .

Вертикальная ось на фиг. 2 служит только для сравнения скорости разрыва  $W$  и характеристических скоростей  $c_1^+$  и  $c_2^+$  в состояниях  $B_1^+$ ,  $B_2^+$ . Величины  $c_1^+$  и  $c_2^+$  меняются в зависимости от  $B_1^+$  и  $B_2^+$ . Поэтому изображение этих величин и  $W$  по вертикальной оси условно и характеризует только соблюдение неравенств между этими тремя величинами. Жирными линиями на фиг. 1, 2 обозначены изначально эволюционные отрезки ударной адиабаты (т.е. эволюционные в предположении, что кроме исходных соотношений на разрыве (1.1) нет никаких других). Условие возрастания энтропии выполняется для частей ударной адиабаты, лежащих на фиг. 1 вне окружности с центром в начале координат, проходящей через точку А. Как видно из фиг. 1, это условие выполнено для всех изначально эволюционных разрывов.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 изображены точками состояния  $B_1^+$ ,  $B_2^+$  удовлетворяющие соотношениям на разрыве при заданных  $B_1^-, B_2^-$  для двух различных значений  $W = W_1$  и  $W = W_2$ . Этим значениям соответствуют вертикальные штриховые линии на фиг. 2. Состояния  $B_1^+ B_2^+$ , соответствующие значению  $c_1^- < W_1 < c_2^-$ , изображены на фиг. 2 точками  $M_1, M_2, G_1, G_2$ . Разрывы  $A \rightarrow M_1, A \rightarrow M_2$  – медленные эволюционные разрывы. Разрывы  $A \rightarrow G_1, A \rightarrow G_2$  – изначально неэволюционны. Расположение точек  $M_1, M_2, G_1, G_2$  на плоскости  $B_1 B_2$  представлено на фиг. 1. Точно так же при  $W = W_2 > c_2^-$  состояниям  $B_1^+ B_2^+$  соответствуют точки  $R_1, R_2, N_1, N_2$ . Разрывы  $A \rightarrow R_1, A \rightarrow R_2$  – быстрые эволюционные разрывы, разрывы  $A \rightarrow N_1, A \rightarrow N_2$  – неэволюционны. Положение точек  $R_1, R_2, N_1, N_2$  на плоскости  $B_1 B_2$  представлено на фиг. 1.

Изучение структуры упругих УВ с помощью уравнений вязкоупругости показало [5, 10, 11], что эволюционные разрывы и только они обладают структурой, что позволило считать эти разрывы "допустимыми" или физически осуществимыми.

**2. Структура электромагнитных ударных волн.** Изменение вектора намагничивания в магнетиках будем описывать уравнением Ландау–Лифшица [8]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef}) - \lambda \mathbf{H}_{ef} \quad (2.1)$$

Вектор  $\mathbf{H}_{ef}$  представляет собой градиент функции  $\Phi_m(B_i, M_k)$  по переменным  $M_k$  при постоянных  $B_\alpha$ . В рассматриваемом здесь приближении, когда  $|\mathbf{M}| = M = \text{const}$  градиент берется на поверхности сферы  $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2$  и лежит в плоскости касательной к сфере. Величины  $\gamma$  и  $\lambda$  определяются свойствами вещества, причем  $\lambda/(\gamma M)$  меняется в различных материалах в пределах от  $10^{-2}$  до  $5 \cdot 10^{-5}$ . Обычно последний член в

уравнении Ландау–Лифшица записывают в виде  $\lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef})/M^2$ , который в рассматриваемом случае совпадает с написанным, поскольку  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{ef} = 0$ .

Уравнение Ландау–Лифшица успешно используется для описания достаточно быстро движущихся волн [6]. Существует экспериментальное подтверждение затухания по Ландау–Лифшицу в недеформируемых магнетиках [8]. С помощью этих уравнений изучалось поведение солитонов в изотропном случае при учете влияния диссипации [12]. Более сложная система уравнений использовалась при описании движения доменных стенок или медленно движущихся волн [7, 13]. При этом учитывалась зависимость  $\Phi_m$  также от производных магнитного поля, что приводит к появлению в уравнениях (2.1) членов со вторыми производными  $\partial^2 M_\alpha / \partial x^2$ . Как уже было сказано, для пренебрежения этими эффектами нужно, чтобы длина волны  $l$ , определяемая уравнением (2.1), удовлетворяла условию  $l = cW/\gamma H_{ef} \gg l_*$  см, где  $cW$  – скорость волны. Это условие будем считать выполненным.

В качестве криволинейных координат на сфере  $|\mathbf{M}| = M$  выберем  $M_\alpha$ . Тогда с использованием (1.7), проектируя уравнение (2.1) на оси  $M_1$  и  $M_2$ , получим

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} = -\lambda \frac{M^2 - M_1^2 - M_2^2}{M^2 - M_2^2} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_1} \right)_{B_\alpha} - \gamma M_3 \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_2} \right)_{B_\alpha} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial t} = \gamma M_3 \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_1} \right)_{B_\alpha} - \lambda \frac{M^2 - M_1^2 - M_2^2}{M^2 - M_1^2} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_2} \right)_{B_\alpha} \quad (2.3)$$

Домножив эти уравнения на  $(\partial \Phi_m / \partial M_1)_B$  и  $(\partial \Phi_m / \partial M_2)_B$  соответственно и сложив, получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_\alpha} \right)_B \frac{\partial M_\alpha}{\partial t} = \\ & = -\lambda (M^2 - M_1^2 - M_2^2) \left[ \frac{1}{M^2 - M_2^2} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_1} \right)_{B_\alpha}^2 + \frac{1}{M^2 - M_1^2} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial M_2} \right)_{B_\alpha}^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как следует из (2.2)–(2.3), неравенство (2.4) обращается в равенство только при  $\partial M_1 / \partial t = 0$ ,  $\partial M_2 / \partial t = 0$ .

Рассмотрим решение уравнений, описывающих поведение электромагнитного поля, в виде бегущей волны, в которой все величины зависят от переменной  $\xi = Wt - x$ , и будем искать решение задачи о структуре электромагнитной УВ. Значение  $\xi = -\infty$  соответствует состоянию перед разрывом, а  $\xi = \infty$  – состоянию за разрывом,  $W$  – скорость изучаемой волны. Описание решения дается дифференциальными уравнениями (1.1) и уравнениями (2.2), (2.3), в которых  $\partial / \partial t$  следует заменить на  $Wd/d\xi$ ,  $\partial / \partial x$  на  $-d/d\xi$ . Уравнения (1.1) при этом интегрируются и с учетом равенства  $B_\alpha = H_\alpha + M_\alpha$  и условий при  $\xi = -\infty$  дают

$$B_\alpha = B_\alpha^- + \frac{1}{1 - W^2} (M_\alpha - M_\alpha^-) \quad (2.5)$$

где  $B_\alpha^-$  и  $M_\alpha^-$  – значения  $B_\alpha$  и  $M_\alpha$  при  $\xi = -\infty$ . Это позволяет ввести функцию

$$\Phi^*(M_1, M_2) = -\frac{(M_1 + P_1)^2 + (M_2 + P_2)^2}{2(1 - W^2)} - B_3 \sqrt{M^2 - M_1^2 - M_2^2} + g\Phi(M_\beta) \quad (2.6)$$

$$P_\alpha = M_\alpha^- - (1 - W^2) B_\alpha^- = M_\alpha^- \left( 1 - \frac{1 - W^2}{M_3^-} B_3 \right)$$

не зависящую от текущих значений  $B_1$  и  $B_2$ , такую, что с учетом соотношений (2.5) имеем

$$\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial M_\alpha}\right)_{B_k} = \frac{\partial\Phi^*(M_\beta)}{\partial M_\alpha} \quad (2.7)$$

Равенства (2.7) позволяют представить уравнения, описывающие структуру электромагнитной УВ и соотношение (2.4), в виде

$$W \frac{dM_1}{d\xi} = -\lambda \frac{M^2 - M_1^2 - M_2^2}{M^2 - M_2^2} \frac{\partial\Phi^*}{\partial M_1} - \gamma M_3 \frac{\partial\Phi^*}{\partial M_2} \quad (2.8)$$

$$W \frac{dM_2}{d\xi} = \gamma M_3 \frac{\partial\Phi^*}{\partial M_1} - \lambda \frac{M^2 - M_1^2 - M_2^2}{M^2 - M_1^2} \frac{\partial\Phi^*}{\partial M_2} \quad (2.9)$$

$$W \frac{d\Phi^*}{d\xi} = -\lambda(M^2 - M_1^2 - M_2^2) \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{M^2 - M_2^2} \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial M_1}\right)_B^2 + \frac{1}{M^2 - M_1^2} \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial M_2}\right)_B^2 \right] \leq 0 \quad (2.10)$$

Состояниям при  $\xi = \pm\infty$  могут соответствовать только особые точки системы (2.8), (2.9), поскольку производные от  $M_\alpha$  по  $\xi$  согласно (2.5) пропорциональны производным от  $B_\alpha$ , а все производные при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  в решении задачи о структуре УВ должны стремиться к нулю.

Особые точки системы (2.8), (2.9) совпадают с критическими точками функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$ , в которых частные производные этой функции равны нулю. В силу равенств (2.7) в этих точках обращаются в нуль производные  $\partial\Phi_m(M_\alpha, B_\beta) / \partial M_\gamma = 0$ , что согласно (1.6) означает, что особые точки системы (2.8), (2.9) соответствуют равновесным состояниям.

Отметим, что если из соотношений на разрыве (1.1) исключить электрическое поле, то используя равенство  $M_i = B_i - H_i$ , им можно придать вид

$$B_\alpha^+ = B_\alpha^- + \frac{1}{1 - W^2} (M_\alpha^+ - M_\alpha^-) \quad (2.11)$$

Равенства (2.11) отличаются от (2.5) только наличием индекса + у  $B_\alpha$  и  $M_\alpha$ . Если переменным  $M_\alpha$  будем ставить в соответствие  $B_\alpha$  согласно равенствам (2.5), то переход из одной особой точки системы (2.8), (2.9) в другую обеспечивает выполнение соотношений на электромагнитных УВ с термодинамически равновесными состояниями перед и за разрывом.

Соотношения (2.11) показывают, что взаимное расположение особых точек системы (2.8), (2.9) на плоскости  $M_1, M_2$  только масштабом отличается от взаимного расположения точек на плоскости  $B_1 B_2$ , характеризующих возможные состояния перед и за разрывом при заданном значении  $W$ . Это позволяет воспользоваться сведениями из разд. 1 для определения взаимного расположения особых точек.

Согласно неравенству (2.10) все интегральные кривые уравнений (2.8), (2.9) на плоскости  $M_1, M_2$  пересекают линии уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  в сторону убывания этой функции. При этом угол, составляемый интегральными кривыми (ИК) с линией уровня, тем меньше, чем меньше отношение  $\lambda$  к  $\gamma$ . При  $\lambda = 0$  ИК совпадают с линиями уровня функции  $\Phi^*(M_\beta)$ .

Отметим, что при  $\lambda = 0$  (т.е. в отсутствие диссипации) замкнутые линии уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2) = \text{const}$ , не содержащие критических точек, соответствуют периодическим по  $\xi$  решениям уравнений (2.8), (2.9), т.е. периодическим незатухающим волнам. Линии уровня, входящие обеими концами в особую точку, соответствуют уединенным волнам. Ранее [13] были рассмотрены частные виды уединенных волн для случая, когда при  $\xi = \pm\infty$  направления вектора намагничивания совпадают с осью легкого намагничивания.

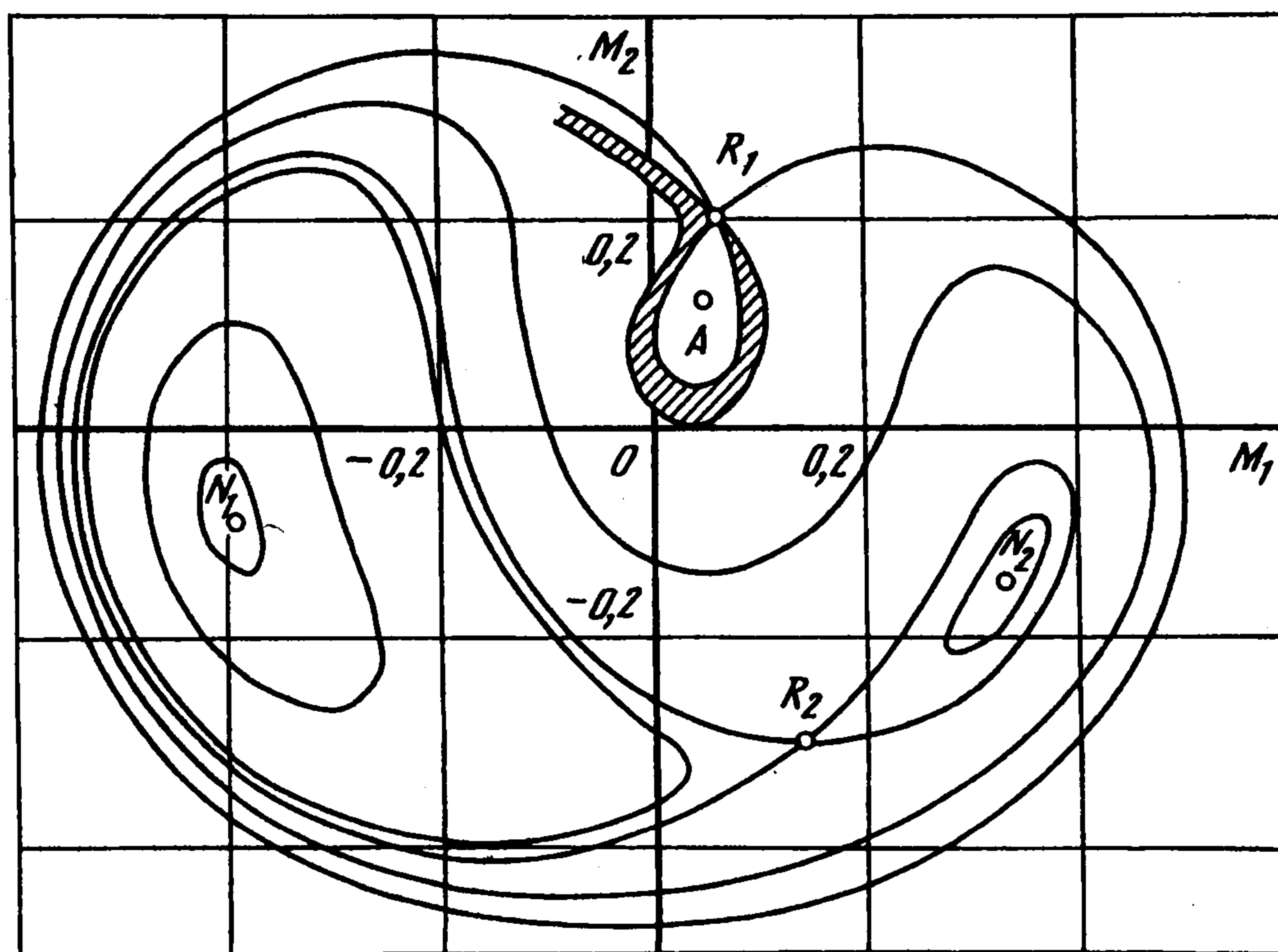
Тип особых точек системы (2.8), (2.9) в силу соотношения (2.10) очевидным образом связан с типом соответствующих критических точек функции  $\Phi^*(M_\alpha)$ . Если  $\Phi^*(M_\alpha)$  имеет максимум, то в силу (2.10) вся окрестность этой точки заполнена ИК, уходящими от нее с ростом  $\xi$ . Следовательно, особая точка – узел или фокус. При достаточно малых  $\lambda/\gamma M$  (именно этот случай рассматривается) особая точка – фокус. Если  $\Phi^*(M_\alpha)$  имеет минимум, то при малых  $\lambda/\gamma M$  особая точка – фокус с входящими интегральными кривыми. Подобным же образом легко получить, что седло соответствует седлу.

При изменении параметров, от которых зависит функция  $\Phi^*$  (в рассматриваемом случае – при изменении  $W$ ) тип критической точки в общем случае не может измениться, пока эта точка изолированная. Изменения могут произойти при слиянии критических точек. Один из главных коэффициентов квадратичной формы, представляющей функцию  $\Phi^*$  в окрестности каждой из критических точек, при их слиянии обращается в нуль, а до слияния имеет в критических точках разные знаки, в то время как (в случае общего положения) второй коэффициент остается отличным от нуля и одинаковым по знаку в обеих точках. Это означает, что одна из сливающихся точек – седло, а вторая – узел. После слияния точки могут исчезнуть, а могут обменяться местами.

При слиянии критических точек интенсивность соответствующего разрыва стремится к нулю и в момент слияния скорость разрыва  $W$  равна характеристической скорости, вычисленной по состоянию, соответствующему этой точке. Изменение типа начальной точки  $A$  с заданными координатами  $M_1^-, M_2^-$  происходит, когда при слиянии точки  $A$  с другой особой точкой скорость волны  $W$  переходит через одно из значений характеристической скорости в точке  $A$ . Исчезновение критических точек после слияния происходит, например, в точке  $H$  (фиг. 2) при увеличении  $W$ . При этом скорость  $W$  равна характеристической скорости за разрывом. При  $W$ , достаточно близких к единице, и при фиксированных значениях  $M_1^-, M_2^-$ , таких, что  $(M_1^-)^2 + (M_2^-)^2 < M^2$ , из (2.6) видно, что начальная точка  $A$  является максимумом для функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$ .

Отсюда и из предыдущих рассуждений следует, что на плоскости  $M_1, M_2$  (фиг. 1) при всех  $W > c_2^-$  точка  $A$  представляет собой максимум функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  (неустойчивый фокус для системы (2.8), (2.9)), точки  $R_1, R_2$  – седла (и для системы (2.8), (2.9) – тоже седла), а точки  $N_1$  и  $N_2$  – минимумы функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  (устойчивые фокусы для системы дифференциальных уравнений). При  $c_1^- < W < c_2^-$  точка  $A$  представляет собой седло для функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  (и для системы (2.8), (2.9)), точка  $G_1$  – седло для  $\Phi^*(M_1, M_2)$  (и седло для системы), точка  $G_2$  – максимум для  $\Phi^*(M_1, M_2)$  (неустойчивый фокус для системы). Это позволяет качественно изобразить линии уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  и ИК системы (2.8), (2.9).

Рассмотрим сначала случай  $W > c_2^-$ . Положение особых точек (ср. с фиг. 1) и линий уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  представлены на фиг. 3. Качественное исследование линий уровня подтверждается численным счетом, один из результатов которого представлен на фиг. 3.

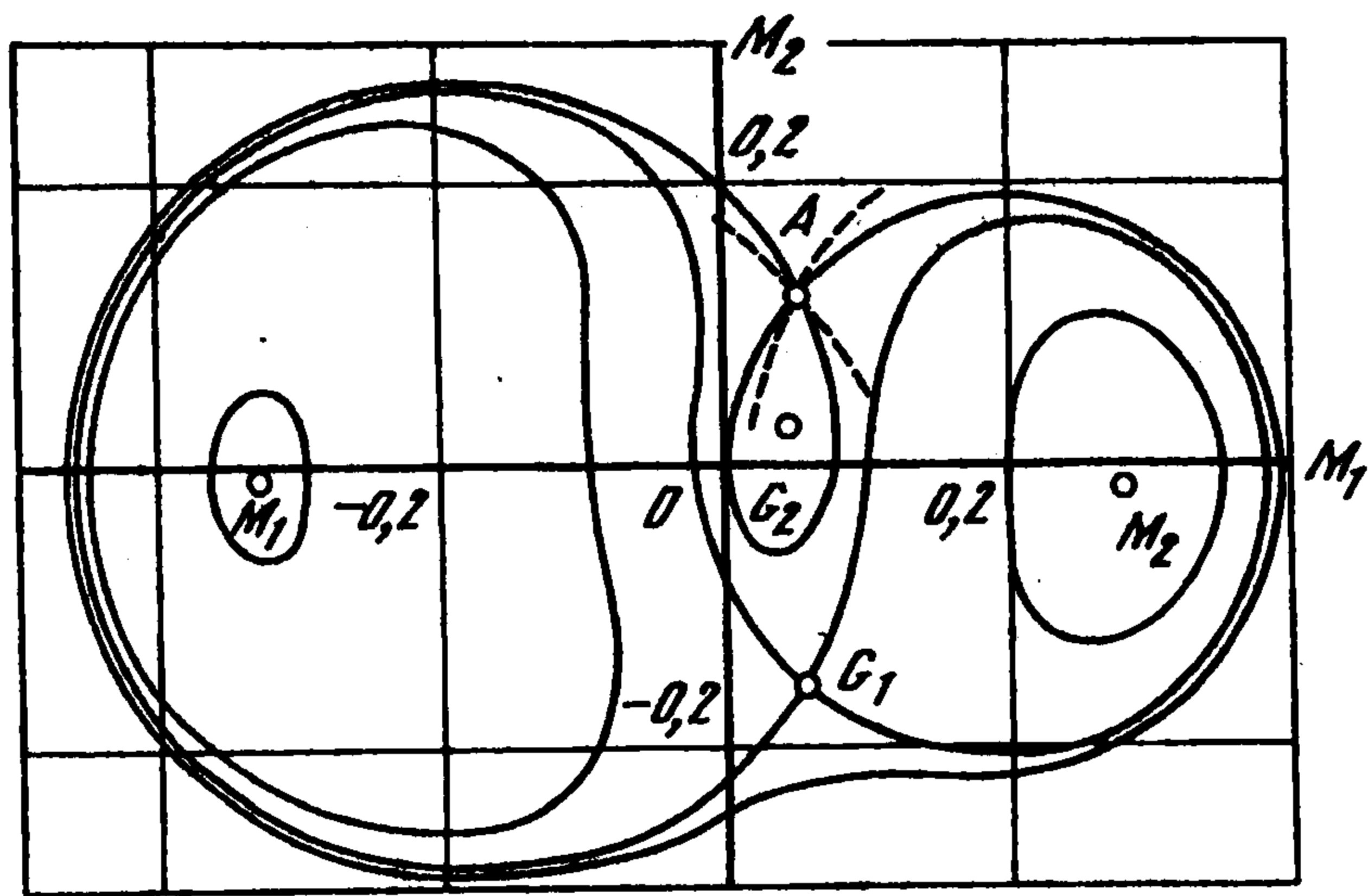


Фиг. 3

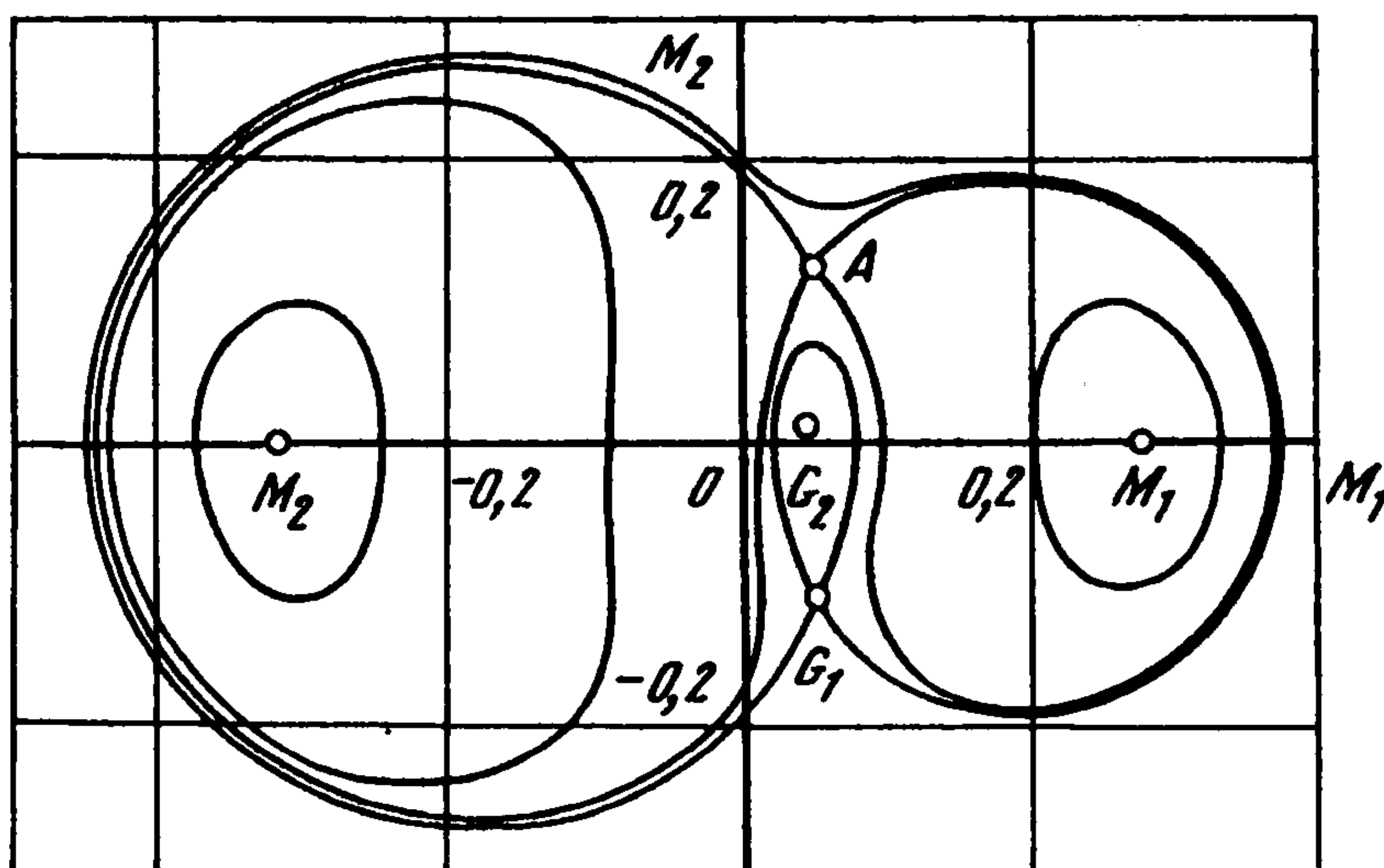
Из фиг. 3 видно, что всегда существует ИК, идущая из точки  $A$  в точку  $R_1$ . Иначе говоря, все разрывы, соответствующие ветви ударной адиабаты, идущей из верхней точки  $A$  направо на фиг. 2 и направо вверх на фиг. 1, являются допустимыми.

ИК, идущие из точки  $A$  к точке  $R_2$ , собираются в узкую полоску, ширина которой тем меньше, чем меньше  $\lambda/\gamma M$  ( $\lambda/\gamma M$  – порядок величины угла составленного ИК с линиями уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$ ) и чем меньше длина петли линии уровня, проходящей через точку  $R_1$  и охватывающей точку  $A$ . Эта полоска, заштрихованная на фиг. 3, при малых  $\lambda/\gamma M$  почти следует линиям уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$ , очень мало продвигаясь в сторону уменьшения  $\Phi^*$  с ростом  $\xi$  и описывает нечто вроде спирали. Между витками этой спирали находятся ИК, попавшие в рассматриваемую область через вторую, внешнюю петлю линии уровня, проходящей через точку  $R_1$ . Отношение ширины полоски к расстоянию между соседними полосками по порядку величины равно отношению длин петель, составляющих линию уровня, проходящих через точку  $R_1$ . Полоска, вышедшая из точки  $A$ , может закончиться в одной из точек  $N_1$  или  $N_2$ , где функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  имеет минимум. Она может также разделиться и часть ИК закончится в  $N_1$ , а часть в  $N_2$ . При этом одна ИК придет в точку  $R_2$ . В последнем случае эволюционная ударная волна  $A \rightarrow R_2$  будет допустимой. При изменении параметров, характеризующих УВ, в частности, при изменении  $W$ , будут изменяться линии уровня функции  $\Phi^*(M_1, M_2)$  и поэтому описанные выше возможности окончания ИК, вышедших из точки  $A$ , будут чередоваться. При малых  $\lambda/\gamma M$  малого изменения линий уровня, вызванного изменением  $W$ , достаточно, чтобы полоска, состоящая из ИК, вышедших из точки  $A$ , сделала несколько лишних оборотов. Если ширина полоски меньше расстояния между полосками, то при изменении  $W$  точка  $A$  не будет соединяться с точкой  $R_2$ , то не будет. Необходимое для этого изменение  $W$  будет тем меньше, чем меньше  $\lambda/\gamma M$ .

Таким образом, множество допустимых разрывов на отрезке ударной адиабаты  $K'H$  (фиг. 1, 2) напоминает штриховую линию, причем длина штриха тем меньше, чем меньше  $\lambda/(\gamma M)$ . Что касается отношения ширины полоски к расстоянию между соседними полосками, то оно, по-видимому, всегда меньше единицы и мало, когда точки  $A$  и  $R_1$  близки, т.е. когда скорость  $W$  близка к  $c_2^-$ . УВ  $A \rightarrow N_1$  и  $A \rightarrow N_2$  неэволюционны из-за того, что граничных условий на разрыве (1.1) больше, чем нужно для



Фиг. 4



Фиг. 5

их эволюционности. Следовательно, эти УВ не представляют интереса, как имеющие тенденцию к распаду при взаимодействии с малыми возмущениями.

Рассмотрим теперь случай, когда  $c_1^- < W < c_2^-$ , считая сначала, что разность  $c_2^- - W$  мала. Тогда картина линий уровня и ИК, изображенная на фиг. 3, качественно не изменится, за исключением смены названий особых точек (см. фиг. 4).

Начальная точка  $A$  теперь седло. Сепаратрисы, выходящие с ростом  $\xi$  из этой точки, изображены штриховой линией на фиг. 4. Эти сепаратрисы могут заканчиваться при  $\xi \rightarrow \infty$  в точках  $M_1$  и  $M_2$  и представлять структуру эволюционных медленных УВ. А при некотором специальном сочетании параметров (которое следует рассматривать как дополнительное соотношение на разрыве) сепаратрисы могут заканчиваться в точке  $G_1$ , представляя структуру УВ  $A \rightarrow G_1$  (которая без этого дополнительного соотношения была бы неэволюционной). Если считать  $B_1^-, B_2^-$  постоянными и изменять  $W$ , то подобно предыдущему случаю варианты окончания ИК, вышедших из точки  $A$ , будут сменяться тем чаще, чем меньше  $\lambda/\gamma M$ .

Из фиг. 4 видно, что ИК, вышедшие из точки  $A$ , ограничивают полосу, составленную из ИК, вышедших из точки  $G_2$ . Если ширина этой полосы меньше расстояния между полосками (что, по-видимому, всегда верно), то при изменении  $W$  будут интервалы, когда обе ИК, вышедшие из точки  $A$ , заканчиваются в одной из особых точек  $M_1$  или  $M_2$ . Это означает отсутствие структуры у одной из медленных УВ. На отрезках ударной адиабаты  $AF'$  и  $LD$ , соответствующих медленным УВ, множество допустимых разрывов представляется при этом штриховыми линиями (штрихи расположены так, что при всех  $W$  хотя бы одна из медленных УВ имеет структуру). Скоростям, соответствующим концам штрихов, соответствуют разрывы типа  $A \rightarrow G_1$ ,

которые эволюционны только в силу упомянутого задания скорости, которое представляет дополнительное соотношение на разрыве.

Если  $c_1 < W < c_2$ , но величина  $W$  близка к  $c_1$ , то картина линий уровня имеет вид, изображенный на фиг. 5 (при изменении  $W$  от  $c_2$  до  $c_1$  происходит перестройка линий уровня; промежуточные варианты рассматривать для краткости не будем). В этом случае всегда существует структура обеих медленных эволюционных УВ  $A \rightarrow M_1$ ,  $A \rightarrow M_2$  и никаких других. Таким образом, отрезки ударной адиабаты, соответствующие медленным УВ, при  $W$ , близких к  $c_1$ , целиком принадлежат множеству допустимых разрывов.

При  $W < c_1$  не существует допустимых разрывов, поскольку начальная точка  $A$  – устойчивый фокус.

В заключение заметим, что столь сложно устроенная ударная адиабата порождает вопросы, связанные со строением решений начально-краевых задач. Кроме того, появляется возможность с помощью малого изменения параметров (например, приложенного извне магнитного поля), входящих в постановку задачи, сильно влиять на строение решения. С точки зрения теории дифференциальных уравнений рассмотренная задача – еще один пример того, что гиперболические системы уравнений часто не могут служить для нахождения решений в целом, поскольку множество допустимых разрывов гиперболические системы не определяют. Отметим также, что множество допустимых разрывов и решение задачи о структуре здесь качественно те же, что и в работе [14], где был рассмотрен более простой пример уравнения в частных производных без конкретных физических приложений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00991).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kulikovskiy A.G., Sveshnikova E.I. Nonlinear waves in Elastic Media. Boca Raton: CRC Press, etc.: 1995. 237 p.
2. Богатырев Ю.К. Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами. М.: Сов. Радио, 1974. 279 с.
3. Катаев И.Г. Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. Радио, 1963. 151 с.
4. Гапонов А.В., Островский Л.А., Фрейдман Г.И. Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9–10. С. 1376–1413.
5. Свешникова Е.И. Ударные волны в слабоанизотропном упругом несжимаемом материале // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 144–153.
6. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994. 462 с.
7. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
9. Свешникова Е.И. Квазипоперечные ударные волны в упругой среде при специальных видах начальной деформации // ПММ, 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 637–678.
10. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. О структуре квазипоперечных ударных волн // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 926–932.
11. Чугайнова А.П. О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 187–189.
12. Nakata I. Nonlinear electromagnetic waves in a ferromagnet // J. Phys. Soc. Japan. 1991. V. 60. N 1. P. 77–81.
13. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наук. думка, 1983. 189 с.
14. Куликовский А.Г. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 6. С. 1349–1352.